JOURNAL OF TAIWAN AGRICULTURAL ENGINEERING
VOL. 68, NO. 4, DECEMBER 2022
DOI - 10.29974/JTAE.202212_68(4).0003

推移質輸砂率的冪率函數模型及其應用

POWER LAW FUNCTION MODEL OF BED LOAD TRANSPORT RATE AND ITS APPLICATION

西北農林科技大學
水利與建築工程學院
博士研究生
許 曉 陽
Xiao-Yang Xu

西北農林科技大學
水利與建築工程學院
教授
張 根 廣*
Gen-Guang Zhang

青海民族大學
土木與交通工程學院
講師
周 雙
Shuang Zhou

摘 要

推移質輸砂率公式一般可轉化為無量綱輸砂強度和無量綱水流強度的冪率函數關係，但冪率函數的指數嚴格來說並不是一個常數，而是一個隨著推移質運動強度而異的變數。基於漸近線輔助擬合法，推導了能夠反映指數變化的推移質輸砂率冪率函數模型，該模型不包含泥砂臨界起動條件，兼顧了低、中及高強度的推移質輸砂率計算。以推移質輸砂率的冪率函數模型為基礎，構建了泥砂起動概率公式和陡坡推移質輸砂率公式。通過與實測資料和各經典公式的對比，表明本文所提公式均具有較高的計算精度和良好的適用性，可為工程實際應用提供可靠參考。

關鍵詞：推移質輸砂率、冪率函數、變冪指數、起動概率、陡坡河道。

* 通訊作者，西北農林科技大學水利與建築工程學院教授
712100 中國陝西省咸陽市楊陵區，zgg64@163.com

POWER LAW FUNCTION MODEL OF BED LOAD TRANSPORT RATE AND ITS APPLICATION

Xiao-Yang Xu
Northwest A&F University
College of Water Resources and Architectural Engineering

Gen-Guang Zhang*
Northwest A&F University
College of Water Resources and Architectural Engineering

Shuang Zhou
Qinghai Minzu University
School of Civil and Transportation Engineering

ABSTRACT

The formula of bed load sediment transport rate can generally be transformed into the power function relationship between the dimensionless sediment transport intensity and the dimensionless water flow intensity. The exponent of power function is not a constant, but a variable that varies with the intensity of bedload movement. Based on the asymptote assisted fitting method, a power function model of bed load transport rate that can reflect the change of index n is derived. The power function model does not involve the critical starting condition of sediment Θ_c. The bed load transport rate can be calculated considering low, medium and high sediment transport intensity. Based on the power function model of bed load transport rate, the formula of sediment incipient probability and the formula of bed load transport rate on steep slopes are constructed. Through the comparison with the measured data and the classical formulas, it shows that the formulas in this paper have high calculation accuracy and good applicability, which can provide a reliable reference for the practical application of engineering.

Keywords: Transport rate of bed load, Power law, Changing exponent, Entrainment probability, Steep channel.

Xu, X.Y., Zhang, G.G.*, & Zhou, S. (2022). "Power Law Function Model of Bed Load Transport Rate and its Application." *Journal of Taiwan Agricultural Engineering,* 68(4), 80-90. https://doi.org/10.29974/JTAE.202212_68(4).0003

JOURNAL OF TAIWAN AGRICULTURAL ENGINEERING
VOL. 68, NO. 4, DECEMBER 2022
DOI - 10.29974/JTAE.202212_68(4).0003

一、前言

推移質輸移規律始終是國內外泥砂學者研究的熱點問題之一。推移質輸砂率是河床演變、水力固體輸送、航運工程和水資源生態環境工程等領域的重要參數。自 19 世紀末期法國 Duboys 提出第一個推移質輸砂率公式以來，眾多學者在推移質輸砂率計算方面取得了豐富的研究成果。推移質輸砂率公式可分為經驗性公式和半經驗性公式。經驗性公式是以大量試驗數據為基礎建立的推移質輸砂率公式，如 Meyer-Peter Müller 公式 (1948)、Parker 公式 (1978)、郭俊克公式 (1989)、Cheng 公式 (2002)、Camenen 公式 (2005)、Xian 公式 (2011) 和 Recking 公式 (2013) 等。半經驗性公式是基於某種簡化或假定建立的理論公式，公式中的某些參數需實測資料率定。半經驗性公式又可分為基於泥砂起動概率的公式 (Einstein，1950；Engelund *et al.*，1976；Wang *et al.*，2008；孟震，2015；Cheng，2020)、基於輸砂功率理論的公式 (Ceballos，1992；高建恩，1993；Abrahams *et al.*，2006)、基於泥砂躍移特性的公式 (Lee，2000；Zhao *et al.*，2020；周雙等，2021) 和基於非線性理論的公式等 (楊具瑞等，2003；周雙等，2019；許曉陽等，2019)。半經驗性公式一般具有較嚴格的理論推導和適用性強的特點，但公式結構複雜，且計算精度一般不及經驗性公式 (孟震，2015)，不利於在實際工程中應用 (Mcewan *et al.*，2004)；經驗性公式雖然疏於對推移質輸砂機理的闡釋，但具有簡單的公式結構和較高的計算精度，更有利於解決工程實際問題 (韓其為，2021)。

推移質研究方法一般可分為確定性方法 (Meyer-peter *et al.*，1948；Parker，1978；郭俊克，1989；Ceballos，1992；高建恩，1993；Lee，2000；楊具瑞等，2003；Abrahams *et al.*，2006；Xian *et al.*，2011；周雙等，2019；許曉陽等，2019；Zhao *et al.*，2020；周雙等，2021)、隨機性方法(Einstein，1950；Cheng，2002；Camenen *et al.*，2005；Wang *et al.*，2008；Recking，2013；Cheng *et al.*，2020) 和確定性與隨機性相結合的方法 (Engelund et al.，1976；孟震，2015)，主要區別在於推移質泥砂起動輸移是否存在明確的臨界起動條件 (孟震，2015)。對於確定性的方法或確定性與隨機性相結合的方法，推移質輸砂率公式一般以剩餘切應力來表示，如 $(\Theta-\Theta_c)$ 和 $(\sqrt{\Theta}-\sqrt{\Theta_c})$ 或 $(\sqrt{\Theta}-\lambda\sqrt{\Theta_c})$，式中，$\Theta$ 為無量綱水流強度；λ 為常數係數；Θ_c 為泥砂起動條件(錢寧等，1983；Cheng，2002；孟震，2015)。該類公式中泥砂起動條件 Θ_c 對公式的適用性影響很大，且 Θ_c 的取值不盡相同，例如 Meyer-Peter Müller 公式和 Engelund 公式中 $\Theta_c = 0.047$；Parker 公式中 $\Theta_c = 0.03$；阿克斯-懷特公式中 $\Theta_c = 0.029$ (錢寧等，1983)，其公式適用範圍一般為 $\Theta > \Theta_c$，往往無法兼顧低、中和高強度的推移質輸砂率計算。對於隨機性研究方法，一般認為泥砂起動輸移不存在臨界條件，如經驗性公式中的 Cheng 公式、Camenen 公式和 Recking 公式等；半經驗性公式的 Einstein 公式 (1950) 和 Wang 公式 (2008) 等，由於公式中沒有包含泥砂起動條件，因此可計算低強度輸砂問題 (Einstein，1950；Wang *et al.*，2008；孟震，2015)，且該理念已在諸多試驗研究中得到了證實，如 Paintal (1971)、Lavelle and Mofjeld (1987)、Buffifington (1999) 和 Papanicolaou *et al.* (2002) 等。

推移質輸砂率公式一般可轉化為無量綱輸砂強度 Φ 和無量綱水流強度 Θ 的冪率函數關係，如 $\Phi = \Theta^n$，式中 n 為冪率函數的指數 (錢寧等，1983；Cheng，2002)。Lavelle and Mofjeld (1987) 發現指數 n 變化範圍為 1.5 ~ 18，如在低輸砂強度時，Paintal (1971) 發現指數 n = 16，曼茨在水槽試驗中得出指數 n = 17；在高輸砂強度時，錢寧等 (1983) 曾對 Meyer-Peter Müller、Bagnold、Engelund、Yalin、Einstein 及阿克斯-懷特等經典推移質輸砂率公式進行比較發現，指數 n 的取值分別為 1.5、1 和 1.35 ~ 1.45，美國水道試驗站的試驗結果表明，指數 n 的取值範圍為 1.5 ~ 1.8 (錢寧等，1983)；在中輸砂強度時，冪率函數的指數 n 隨著輸砂強度的減小逐漸增大，變化範圍介於 1.35 ~ 18 之間 (錢寧等，1983；Cheng，2002)。總體而言，在用冪率函數表示無量綱輸砂強度 Φ 和無量綱水流強度 Θ 的關係時，冪率函數指數 n 是一個隨推移質運動強度而異的變數，而非常數。解決方法主要有兩種：(1) 以泥砂起動概率來反映冪率函數指數 n 的變化，但起動概率一般是以理論推導確定的公式，而泥砂起動輸移規律極其複雜，使公式往往難以兼顧低、中和高強度的推移質輸砂率計算精度 (Einstein，1950；Wang *et al.*，2008；孟震，2015)。(2) 以經驗公式來反映冪率函數指數 n 的變化，如 Cheng (2002) 和 Camenen (2005) 以指數函數修正低、中強度的輸砂率公式，但由於研究方法的限制，現有的該類推移質輸砂率公式精度和適用範圍仍需進一步探討。

本文擬首先以推移質輸砂率冪率函數為基礎，以大量試驗數據建立低、高輸砂強度的推移質輸砂率公式；然後，採用漸近線輔助擬合法，構建能夠反映指數 n 變化的推移質輸砂率冪率函數模型；再以推移質輸砂率的冪率函數模型為基礎，構建泥砂起動概率公式和陡坡推移質輸砂率公式；最後，通過與實測資料

和各經典公式的對比，驗證本文各公式的計算精度和適用性。

二、推移質輸砂率的冪率函數模型

推移質輸砂率一般可表示為無量綱輸砂強度和無量綱水流強度的函數。無量綱參數運算式為：

$$\Phi = g_b \frac{1}{\gamma_s}\left(\frac{\gamma}{\gamma_s-\gamma}\right)^{0.5}(gD^3)^{-0.5} \quad \text{.....(1)}$$

$$\Theta = \frac{\rho u_*^2}{(\rho_s-\rho)gD} \quad \text{.....(2)}$$

式中，Φ 為無量綱輸砂率；g_b 為以重量計的單寬推移質輸砂率；D 為泥砂顆粒粒徑；γ 為流體重度；γ_s 為泥砂顆粒重度；u_*為摩阻流速；ρ_s 為泥砂顆粒密度；ρ為流體密度；g 為重力加速度。

無量綱參數 Φ 和 Θ 間存在冪率函數關係。當 $\Phi \to 0$ 時，以 Paintal (1971) 和 Taylor and Vanoni (1972) 的低輸砂強度實測資料為基礎，可得推移質輸砂率公式為：

$$\Phi_0 = 5\times10^{22}\Theta^{18} \quad \text{.....(3)}$$

當 $\Phi\to+\infty$時，以 Gilbert (1914)、Wilson (1966) 和 Roseberry (2012) 的中、高輸砂強度實測資料 (Meng *et al.*，2016) 為基礎，可得推移質輸砂率公式為：

$$\Phi_{+\infty} = 10\Theta^{1.7} \quad \text{.....(4)}$$

式 (3) 和式 (4) 分別為 $\Phi\to0$ 和 $\Phi\to+\infty$時推移質輸砂率曲線的漸近線，見圖 1。

對於非線性問題，若函數曲線在→0 和→+∞時存在斜漸近線，則函數曲線可採用漸近線輔助擬合法合併成為統一公式 (Vatankhah，2015)。採用漸近線輔助擬合法，由式 (3) 和式 (4) 可得：

$$\Phi = (\Phi_0^\beta + \Phi_{+\infty}^\beta)^{1/\beta} = \left[(5\times10^{22}\Theta^{18})^\beta + (10\Theta^{1.7})^\beta\right]^{1/\beta}$$

$$\text{.....(5)}$$

式中，β 為形狀參數。採用 Paintal、Taylor and vanoni、Gilbert (1914)、Wilson (1966)和 Roseberry (2012) 的輸砂率實測資料對形狀參數 β 進行率定，可取形狀參數 β=-0.2。式 (5) 為推移質輸砂率的冪率函數模型，如圖 1 所示。由式 (5) 可知，當 $\Phi\to0$ 和 $\Phi\to+\infty$時，式 (5) 可分別轉化為推移質輸砂率曲線的漸近線式 (3) 和式 (4)；形狀參數 β 主要對函數曲線的中部產生影響，不影響 $\Phi\to0$ 和 $\Phi\to+\infty$時的函數曲線。

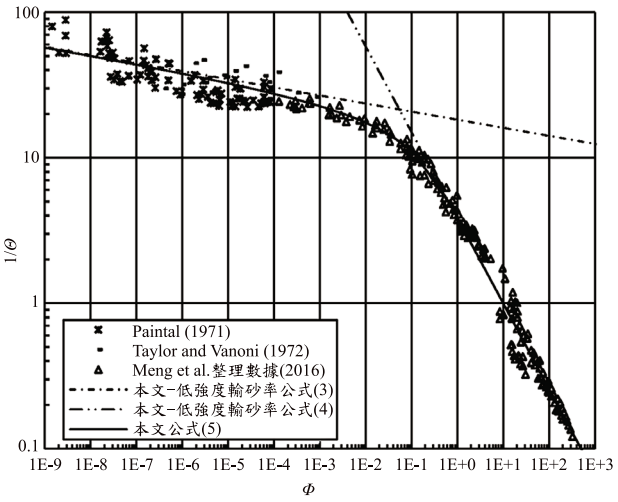

圖 1　推移質輸砂率的冪率函數模型

三、推移質輸砂率冪率函數模型的檢驗

3.1　冪率函數模型的驗證

首先，採用 Paintal (1971) 和 Taylor and vanoni (1972) 的輸砂強度實測資料、Wang *et al.* (2008) 整理的 Meyer-Peter and Müller (1948) 和 Einstein (1942) 均勻砂水槽資料、Meng *et al.* (2016) 整理的 Gilbert (1914)、Wilson (1966) 和 Roseberry (2012) 等均勻砂水槽資料及孟震 (2015) 的均勻砂水槽資料對式 (5) 進行驗證，見圖 2。然後，採用 Parker (1978) 的野外卵礫石實測資料和張原鋒等 (1997) 發表的黃河中、下游砂質均勻推移質實測資料對式 (5) 進行驗證，見圖 3。最後，與經典的確定性與隨機性相結合方法、隨機性方法和經驗性方法的推移質輸砂率公式進行對比，見圖 2 和圖 3。確定性與隨機性相結合方法推移質輸砂率公式選擇 Engelund 公式，隨機性方法推移質輸砂率公式選擇 Einstein 公式和 Wang 公式，經驗性方法推移質輸砂率公式選擇 Meyer-Peter Müller 公式、Parker 公式、郭俊克公式、Cheng 公式、Camenen 公式、Xian 公式和 Recking 公式。

由圖 2 可見，本文公式與實測數據整體符合良好。在 Φ < 0.001 時，各家公式曲線離散度較大，但公式曲線基本仍在實測數據帶寬內；本文公式與 Cheng 公式基本重合，且較其他公式預測結果略佔優勢。在 0.001 < Φ < 1 時，本文公式與 Xian 公式符合最好，其

JOURNAL OF TAIWAN AGRICULTURAL ENGINEERING
VOL. 68, NO. 4, DECEMBER 2022
DOI - 10.29974/JTAE.202212_68(4).0003

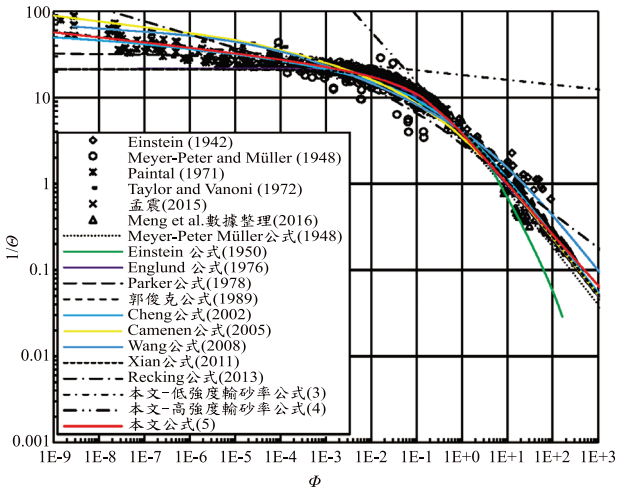

圖 2　水槽實測數據的分析驗證

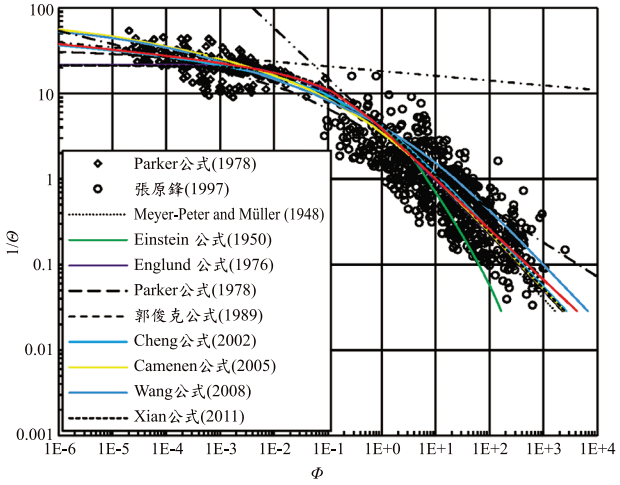

圖 3　野外實測數據的分析驗證

他各家公式曲線雖均較為集中，也基本居於實測數據帶中心區域，但與實測數據相比均有不同程度的偏低，原因在於其公式結構無法反映低、中輸砂強度時指數 n 的變化趨勢。隨著輸砂強度的增大，在 Φ>1 時，本文公式與 Cheng 公式和 Xian 公式基本重合，與實測數據符合最好；其他各家公式曲線逐漸發散，與輸砂強度實測值偏差增大。

由圖 3 可見，在同樣的水流條件下，野外實測資料的離散性更大，數據帶更寬，無量綱輸砂率最大相差可達 100 倍以上 (孟震，2015)；從公式的預測結果來看，各家公式均能夠正確預測天然河流無量綱輸砂率的變化趨勢。本文公式、Parker 公式和 Cheng 公式預測結果最優，實測數據基本均勻的分佈在無量綱輸砂率預測曲線兩側。

3.2　冪率函數模型的精度分析

本文選擇相對誤差絕對值 E (楊具瑞等，2003) 和均方根相對誤差 $RMSRE$ (孟震，2015) 來評價冪率函數模型的計算精度，各參數定義如下：

$$E=\left|\frac{x_i-y_i}{y_i}\right| \quad \text{.....(6)}$$

$$RMSRE=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i-y_i}{y_i}\right)^2} \quad \text{.....(7)}$$

式中，N 為推移質輸砂率的樣本個數；x_i 為推移質輸砂率的計算值；y_i 為推移質輸砂率的實測值。E 值和 $RMSRE$ 值越低，說明公式的精度越高。

在推移質輸砂率公式驗證時需定義實測資料的排除標準：(1) $\Theta<\Theta_c$ 時，包含 $(\Theta-\Theta_c)$ 和 $(\sqrt{\Theta}-\sqrt{\Theta_c})$ 或 $(\sqrt{\Theta}-\lambda\sqrt{\Theta_c})$ 的計算公式不再適用；(2) 定義分散度 $I=x_i/y_i$ (金中武，2009)，實測數據的分散度 I<0.1 和 I > 10 時，實測數據不參與公式的精度驗證。可將二者占總實測數據的百分比作為公式的排除率指標。為便於公式精度比較，僅將本文公式和計算精度較高的經驗性公式進行對比，如 Meyer-Peter Müller 公式、Parker 公式、Cheng 公式和 Xian 公式等。此外，由於野外實測資料測量精度較差，且得到公認的實測數據不多 (孟震，2015)，本文將不再採用野外實測資料對上述公式進行精度分析，而採用水槽實測資料進行精度分析，結果見表 1。

由表 1 可見，Meyer-Peter Müller 公式和 Xian 公式的資料排除率最高，主要由於 Θ_c = 0.047 取值較高造成，使公式無法計算低強度輸砂率，公式適用性存在一定限制；本文公式、Parker 公式和 Cheng 公式資料排除率基本一致，公式適用性較寬。在用於低、中和高強度的輸砂率計算中，本文公式 E = 54.2%和

表 1　推移質輸砂率公式的精度量化參數

公式	精度量化參數		
	平均 E (%)	$RMSRE$	排除率指標(%)
Meyer-Peter Müller 公式(1948)	45.4	0.95	25.2
Parker 公式(1978)	63.5	1.13	12.7
Cheng 公式(2002)	69.0	1.37	10.4
Xian 公式(2011)	46.3	0.96	25.8
本文公式(5)	54.2	1.11	10.7

RMSRE = 1.11 較 Parker 公式的 *E* = 63.5%和 *RMSRE* = 1.13 和 Cheng 公式的 *E* = 69.0%和 *RMSRE* = 1.37 更低，表明本文公式在整體實測資料範圍內計算精度最高，適用性更強。

在推移質輸砂率公式應用時，學者們習慣對推移質輸砂的強弱進行劃分，以便更好的探討推移質輸砂率公式的適用性。如 Cheng (2002) 將輸砂強度劃分為低、中及高強度推移質輸砂，孟震 (2015) 將輸砂強度劃分為超低、低、中及高強度推移質輸砂，但劃分時學者均未給出各階段的明確分界點。本文借鑒 Cheng (2002) 的輸砂強度劃分方法，將輸砂強度劃分為低、中及高強度推移質輸砂。作者認為可通過以下兩點對推移質輸砂率的強弱進行劃分：(1) 當推移質輸砂率公式以剩餘切應力來表示時，如 $(\Theta-\Theta_c)$ 和 $(\sqrt{\Theta}-\sqrt{\Theta_c})$ 或 $(\sqrt{\Theta}-\lambda\sqrt{\Theta_c})$，推移質輸砂率公式往往無法計算 $\Theta<\Theta_c$ 的推移質輸砂率，因此可將 Θ_c 確定為低和中強度輸砂的分界點。褚君達 (1993) 曾對泥砂起動條件 Θ_c 進行總結，Θ_c 一般介於 0.0231～0.0716，具體取值與水、砂條件和泥砂起動標準相關；(2) 隨著水流強度的增大，推移質泥砂的輸移模式將由單層運動轉化為層移運動，此時推移質泥砂輸移強度較強，因此可由推移質泥砂層移質運動的臨界條件 Θ_t 作為中和高強度輸砂的分界點，本文 Θ_t 的取值將在“4.1 泥砂起動概率公式”中具體討論。鑒於本文推移質輸砂率公式在整體上均具有較高的計算精度，在公式應用時不必對低、中及高強度的推移質輸砂進行劃分，可直接採用式 (5) 進行推移質輸砂率計算。

四、推移質輸砂率的冪率函數模型的應用

4.1 泥砂起動概率公式

4.1.1 泥砂起動概率公式的建立

Shih and Diplas (2018) 對球體泥砂顆粒進行了長時間的平均作用力測量，以單顆粒球體泥砂顆粒為研究對象，採用局部水流功率理論，得到了忽略泥砂顆粒運動間歇時間的推移質輸砂率公式：

$$\Phi_e = k\Theta^n \quad (8)$$

式中，k 為常數係數；Φ_e 為忽略泥砂顆粒運動間歇時間的無量綱輸砂率強度。當輸砂強度較高時，泥砂運動成為必然性時間，此時 $\Phi_e=\Phi$。

在觀測時間 T 內，T_c 為泥砂運動時間，T_w 為泥砂等待時間，Φ_t 為 T 時間內的無量綱輸砂累積量，則忽略泥砂顆粒運動間歇時間的無量綱輸砂強度 Φ_e 可表示為：

$$\Phi_e = 1/T_c\Phi_t \quad (9)$$

無量綱輸砂強度 Φ 可表示為：

$$\Phi = 1/T\Phi_t \quad (10)$$

聯立式 (8)～式 (10) 可得：

$$\Phi = \frac{T_c}{T}\Phi_e = \frac{T_c}{T_c+T_w}k\Theta^n \quad (11)$$

根據 Einstein 的泥砂起動概率定義 (錢寧等，1983)，起動概率可以表示為泥砂顆粒挾帶的時間分數 (Cheng，2020)，則式 (11) 可轉化為：

$$\Phi = kp\Theta^n \quad (12)$$

式中，p 為泥砂起動概率。式 (12) 為推移質輸砂率的理論計算模型，可適用於低、中及高強度的推移質輸砂率計算。

在輸砂強度較高時，泥砂起動概率 $p=1$，式 (12) 可變化為：

$$\Phi = k\Theta^n \quad (12a)$$

此時，式 (12a) 與式 (4) 等價，則式 (12) 中應取 k=10 和 n=1.7。式 (12)可表示為：

$$\Phi = 10p\Theta^{1.7} \quad (12b)$$

由式 (12b) 可得泥砂起動概率運算式：

$$p = \frac{\Phi}{k\Theta^n} = \frac{\Phi}{10\Theta^{1.7}} \quad (13)$$

式 (13) 為泥砂起動概率的理論計算模型。由於式 (12) 適用於低、中及高強度的推移質輸砂率計算，則式 (13) 同樣適用低、中及高強度的泥砂起動概率計算。

由式 (5) 和式 (13) 可得泥砂起動概率計算公式為：

$$p = \left[(5\times10^{22}/10)^{-0.2}\Theta^{-3.26}+1\right]^{-5} \quad (14)$$

式 (14) 為泥砂起動概率的計算公式。

4.1.2 泥砂起動概率公式的驗證

首先，選擇泥砂起動概率研究文獻中的實測數據對本文公式進行驗證，其實測數據的獲取方法主要可

JOURNAL OF TAIWAN AGRICULTURAL ENGINEERING
VOL. 68, NO. 4, DECEMBER 2022
DOI - 10.29974/JTAE.202212_68(4).0003

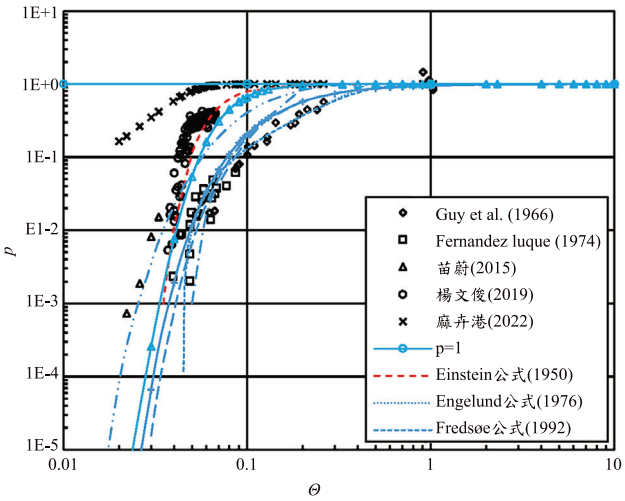

圖 4　起動概率公式的驗證與對比

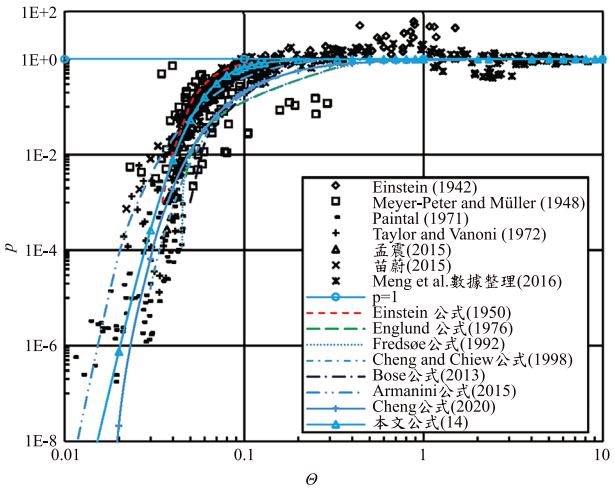

圖 5　水槽起動概率數據的驗證與對比

分為直接測量方法和間接測量方法，如苗蔚等 (2015) 和麻卉港等 (2022)採用直接測量方法獲取泥砂起動概率實測數據；Engelund (1976) (依據柯林斯堡 (駐波和砂丘) 和羅格的推移質輸砂率資料，通過反算計算獲得泥砂起動概率) 和楊文俊等 (2019) 採用間接測量方法獲取泥砂起動概率實測數據；選擇 Einstein 公式 (1950)、Engelund 公式 (1976)、Fredsøe 公式 (楊文俊等，2019)、Cheng and Chiew 公式 (1998)、Bose 公式 (2013)、Armanini 公式 (2015) 和 Cheng 公式 (2020) 與本文公式進行對比，見圖 4。由圖 4 可見，因各文獻的數據獲取方法不盡相同，起動概率數據和各家計算公式均較為離散，但各公式預測曲線仍在數據帶寬之內；本文公式與實測數據整體符合良好，其他公式均存在不同程度的偏離。

對於直接測量方法，由於起動概率概念定義的差異和試驗數據獲取的困難性(楊文俊等，2019)，使各文獻數據的可靠性和合理性扔需進一步探討；對於間接測量方法，由於推移質輸砂率模型中各物理參數的確定存在差異，例如推移質運動速度、推移質運動厚度，造成公式中的起動概率不再具有其原本的物理意義，而本文式 (13) 避免了推移質輸砂率模型中各物理參數確定時存在差異的問題。其次，以水槽實測輸砂率資料和野外實測輸砂率資料為基礎 (數據來源：2.1 冪率函數模型的驗證)，採用式 (13) 計算泥砂起動概率 p 的實測數據，以此數據對本文公式進行了驗證，並與各家泥砂起動概率公式進行了比較，見圖 5 和圖 6。

由圖 5 和圖 6 可見，本文公式與實測數據整體符合良好。在 $\Theta < 0.03$ 時，本文公式與 Cheng 公式基本重合，且較其他公式預測結果略佔優勢。在 $0.03 < \Theta < 0.33$ 時，本文公式與實測數據符合最好，其他公式均存

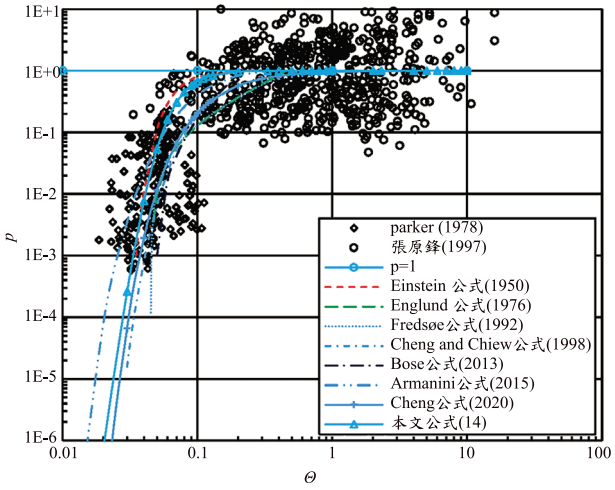

圖 6　野外起動概率數據的驗證與對比

在不同程度偏離。在 $\Theta > 0.33$ 時，各家起動概率 p 趨近於 1，表明泥砂運動由單層運動轉化為層移運動，此時泥砂起動由隨機性事件轉化為必然事件 (孟震，2015)。床面泥砂何時進入層移質運動，目前還存在較大爭議 (Gao，2008)，不同學者取值不同，基本介於 0.3 ~ 1 之間，如 Hill *et al.* (1969) 取 $\Theta_t = 0.56$，Wang *et al.* (1993) 取 $\Theta_t = 0.4$，Sumer *et al.* (1996) 取 $\Theta_t = 0.6$，Nnadi *et al.* (1995) 取 $\Theta_t \approx 1$，周雙等 (2020) 取 $\Theta_t = 0.3$。由圖 5 和圖 6 的起動概率實測數據可見 $\Theta_t \approx 0.33$，這與周雙等和 Wang *et al.*取值相近，同時與本文公式 (14) 的計算結果相符。

4.1.3 泥砂起動概率公式的精度分析

公式精度量化指標和實測資料排除標準與“冪率

表 2　泥砂起動概率公式的精度量化參數

公式	精度量化參數		
	平均 E (%)	*RMSRE*	排除率指標(%)
Einstein 公式 (1950)	93.2	1.67	13.1
Engelund 公式 (1976)	82.9	1.03	37.4
Fredsøe 公式 (1992)	76.3	0.98	23.8
Cheng and Chiew 公式 (1998)	85.9	1.37	18.2
Bose 公式 (2013)	82.1	1.10	54.6
Armanini 公式 (2015)	61.6	1.33	12.0
Cheng 公式 (2020)	80.0	1.20	12.4
本文公式 (14)	55.3	1.15	11.0

函數模型的精度分析”部分相一致。為便於泥砂起動概率公式的精度分析，選用經典水槽泥砂起動概率實測數據對上述公式進行對比，各公式的精度分析結果見表 2。需要注意的是：當泥砂起動概率計算值 $p<0$ 和 $p>1$ 時，泥砂起動概率計算公式將不再適用。

由表 2 可見，Fredsøe 公式、Engelund 公式和 Bose 公式的資料排除率分別為 23.8%、37.4%和 54.6%，與其他公式相比排除率較高，公式適用性存在一定限制；本文公式資料排除率為 11.0%，與其他公式相比最低，公式適用性較寬。在用於低、中和高強度的泥砂起動概率計算中，本文公式的相對誤差絕對值 E = 55.3%，與其他公式相比最低；均方根相對誤差 *RMSRE* = 1.15，與 Fredsøe 公式、Engelund 公式和 Bose 公式的 *RMSRE* = 0.98、1.03 和 1.10 較為接近，與其他公式相比最低，表明本文公式在整體實測資料範圍內計算精度最高，適用性更強。

在泥砂起動概率公式應用時，學者們同樣習慣對推移質輸砂的強弱進行劃分。泥砂的連續起動形成了推移質泥砂的輸移，因此在定義泥砂起動概率的低、中及高強度的計算時，與推移質泥砂輸移的強弱劃分具有相似性。作者認為可通過以下兩點進行劃分：(1)以剩餘切應力來表示的推移質輸砂率公式認為存在泥砂起動條件 Θ_c，那麼意味著 $\Theta<\Theta_c$ 時 $p=0$，起動概率將無法進行計算，因此可定義 Θ_c 為低和中強度泥砂起動概率的分界點；(2)對於中、高強度起動概率的分界點，當水流強度較大時 $p=1$，如 $\Theta>\Theta_t$，因此可採用推移質泥砂輸移的強度劃分標準 Θ_t 來作為中和高強度泥砂起動概率的分界點。同樣，鑒於本文泥砂起動概率公式在整體上均具有較高的計算精度，在公式應用時不必對低、中及高強度的推移質輸砂進行劃分，可直接採用式 (14) 進行泥砂起動概率計算。

4.2　陡坡河道推移質輸砂率公式

4.2.1 陡坡河道推移質輸砂率公式的建立

陡坡河道相對於緩坡河道，存在坡度效應，此時泥砂重力分量對推移質泥砂輸移的影響已不可忽略 (Prancevic *et al.*，2014)。此外，由於陡坡河道坡度較大，河道的斷面平均流速分佈與緩坡河道存在差異，此時應該考慮泥砂顆粒淹沒度對泥砂輸移的影響 (Armanini *et al.*，2005；Cheng *et al.*，2018)。因此有必要建立考慮坡度效應的陡坡推移質輸砂率公式。本文公式 (5) 適用於緩坡河道的推移質輸砂率計算，在應用於陡坡河道推移質輸砂率計算時，需對本文公式 (5) 進行修正。修正方法一般分為泥砂起動條件 Θ_c 的修正 (Fernandez *et al.*，1976)、無量綱輸砂強度 Φ 的修正 (Smart，1984) 和水流強度 Θ 與無量綱輸砂強度 Φ 的修正 (Cheng *et al.*，2014)。本文選擇 Cheng (2014) 的修正參數，水流強度 Θ 與無量綱輸砂強度 Φ 可修正為：

$$\Theta_s=\frac{\Theta}{\eta} \quad \text{.....(15)}$$

$$\Phi_s=\frac{\Phi}{\sqrt{\eta}} \quad \text{.....(16)}$$

式中，Θ_s 為修正之後的陡坡水流強度；Φ_s 為修正之後的陡坡無量綱輸砂強度；η 為修正參數，$\eta=\cos\beta\tan\theta-\sin\beta$；$\beta$ 為床面坡度；θ 為泥砂休止角。

式 (15)~式 (16) 帶入式 (3)、(4) 和 (5) 可得：

$$\Phi_{s0}=5\times10^{22}\Theta_s^{18} \quad \text{.....(17)}$$

$$\Phi_{s+\infty}=10\Theta_s^{1.7} \quad \text{.....(18)}$$

$$\Phi_s=\left[(5\times10^{22}\Theta_s^{18})^{-0.2}+(10\Theta_s^{1.7})^{-0.2}\right]^{-1/0.2} \quad \text{.....(19)}$$

式 (17) 和式 (18) 分別為 $\Phi_s\to0$ 和 $\Phi_s\to+\infty$ 時推移質輸砂率曲線的漸近線；式 (19) 為陡坡河道推移質輸砂率公式。

4.2.2 陡坡河道推移質輸砂率公式的驗證

採用 Fernandez *et al.* (1976)、Smart (1984)、楊勝發等 (2006) 和 Recking *et al.* (2008) 的陡坡河道推移質輸砂率實測值對本文公式 (19) 進行驗證。Fernandez *et al.*推移質輸砂率為有壓管道實測資料，

DOI - 10.29974/JTAE.202212_68(4).0003

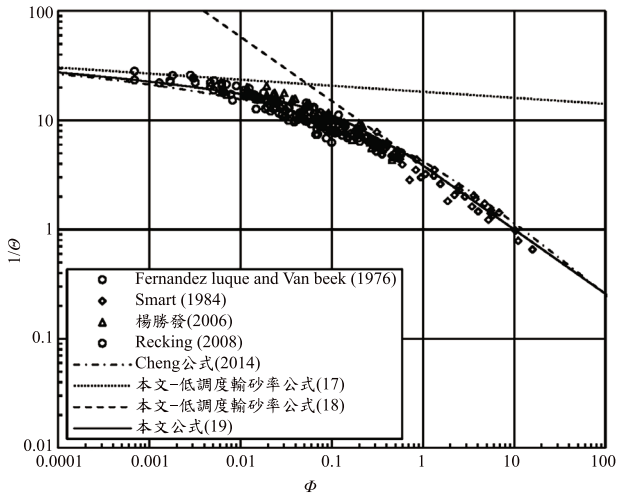

圖 7　陡坡河道推移質輸砂率公式的驗證與對比

Smart、楊勝發等和 Recking *et al*.推移質輸砂率為明渠實測資料，推移質輸砂率實測資料坡度範圍分別為 0%～40.4%、3%～25%、1%～1.8%和 0%～9%。同時，選擇計算精度較高的 Cheng 公式 (2014) 進行對比，見圖 7。由圖 7 可見，本文公式與實測數據整體符合良好。在 $\Phi<0.01$ 時，本文公式與實測數據符合最好；在 $0.01<\Phi<1$ 時，本文公式偏大，Cheng 公式偏小，但仍具有較高的計算精度；在 $\Phi>1$ 時，本文公式與實測數據符合最好，Cheng 公式計算值整體偏大。

4.2.3 陡坡河道推移質輸砂率公式的精度分析

公式精度量化指標和實測資料排除標準與“冪率函數模型的精度分析”部分相一致。為更好的評價陡坡河道推移質輸砂率公式的計算精度，將陡坡推移質輸砂率實測資料劃分為 $\Phi<0.01$、$0.01<\Phi<1$ 和 $\Phi>1$ 三部分。各公式的精度分析結果見表 3。

由表 3 可見，本文公式排除率指標 0.4%低於 Cheng 公式 2.7%，表明本文公式適用性較寬。當 $\Phi<0.01$ 時，本文公式 $E=60.2\%$較 Cheng 公式的 $E=67.3\%$ 更低，$RMSRE=0.72$ 與 Cheng 公式的 $RMSRE=0.71$ 基本一致，表明本文公式計算精度較 Cheng 公式略佔優勢。當 $0.01<\Phi<1$ 時，Cheng 公式 $E=56.5\%$和 $RMSRE=0.72$ 較本文公式的 $E=77.5\%$和 $RMSRE=1.06$ 更低，顯示出更好的計算精度，但本文公式同樣具有較高的計算精度。當 $\Phi>1$ 時，本文公式 $E=21.3\%$ 和 $RMSRE=0.29$ 較 Cheng 公式的 $E=53.8\%$和 $RMSRE=0.54$ 更低，表明本文公式計算精度更高和適用性更強。

在陡坡河道推移質輸砂率公式 (19) 的應用時，需對公式的適用範圍進行初步分析。對於緩坡和陡坡的定義，學者間存在不同的見解，如 Meyer-Peter and Müller (1948) 的實驗水槽存在 0.04%～2%的坡度，但是大多數學者以此經典資料作為緩坡推移質輸砂率的驗證資料；Smart (1984) 認為坡度大於 3%時，床面坡度的影響已不可忽視；Cheng (2014) 認為水流條件和床面坡度共同影響床面泥砂顆粒的輸移，因此緩坡到陡坡的過度坡度應隨水流條件的變化而變化。但可以確定的是，緩坡推移質輸砂率公式在陡坡條件下是不適用的。在公式使用過程中，對於緩坡河道或近水準河道，可採用本文式 (5) 進行推移質輸砂率計算；對於陡坡河道，如山區河流，可採用本文式 (19) 進行推移質輸砂率計算。對於緩坡和陡坡的清晰定義仍需學者們的進一步探討。

表 3　陡坡河道推移質輸砂率公式的精度量化參數

公式	實測資料範圍	精度量化參數		
		平均 E (%)	$RMSRE$	排除率指標(%)
Cheng 公式 (2014)	$\Phi<0.01$	67.3	0.71	2.7
	$0.01<\Phi<1$	56.5	0.72	
	$\Phi>1$	53.8	0.54	
本文公式(19)	$\Phi<0.01$	60.2	0.72	0.4
	$0.01<\Phi<1$	77.5	1.06	
	$\Phi>1$	21.3	0.29	

五、結論

基於無量綱輸砂強度 Φ 和無量綱水流強度 Θ 的冪率函數關係，建立了低、高輸砂強度的推移質輸砂率漸近線；採用漸近線輔助擬合法，構建了能夠反映指數 n 變化的推移質輸砂率冪率函數模型。以推移質輸砂率的冪率函數模型為基礎，構建了泥砂起動概率公式和陡坡推移質輸砂率公式。通過與實測資料和各經典公式的對比表明，該模型兼顧了低、中和高輸砂強度的推移質輸砂率計算，且整體上計算精度較高；泥砂起動概率公式和陡坡推移質輸砂率公式具有結構簡單和計算精度高的特點。本文所提公式可為工程實際應用提供可靠參考。

致謝

感謝中國國家自然科學基金委員會 (National Natural Science Foundation of China, NO.51879227) 提供科研經費，使本研究得以順利完成。

參考文獻

1. Abrahams, A.D., Peng, G., "A bed-load transport model for rough turbulent open-channel flows on plane beds," *Earth Surface Processes & Landforms*, Vol.31, No.7, pp.910-928, 2006.
2. Armanini, A., Cavedon, V., Righetti, M., "A Probabilistic/Deterministic Approach for the Prediction of the Sediment Transport Rate," *Advances in Water Resources*, Vol.81, pp.10-18, 2015.
3. Armanini, A., and Gregoretti, C., "Incipient Sediment Motion at High Slopes in Uniform Flow Condition," *Water Resources Research*, Vol.41, W12431, 2005.
4. Buffington, J.M., "The Legend of A. F. Shields," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.125, No.4, pp.376-387, 1999.
5. Bose, S.K., Dey, S., "Sediment Entrainment Probability and Threshold of Sediment Suspension: Exponential-Based Approach," *Journal of Hydraulic Engineering Asce*, Vol.139, No.10, pp.1099-1106, 2013.
6. Cheng, N.S., "Exponential Formula for Bed-Load Transport," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.128, No.10, pp.942-946, 2002.
7. Camenen, B., Larson, M., "A General Formula for Non-Cohesive Bed Load Sediment Transport," *Estuarine Coastal & Shelf Science*, Vol.63, No.1/2, pp.249-260, 2005.
8. Cheng, N.S., Lu, Y., Wei, M., "Simple Formulation of Bedload Sediment Transport Rate Based on Novel Definition of Pickup Probability," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.146, No.9, 06020012, 2020.
9. Ceballos, R.P., "Bed-Load Coefficients," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.118, No.10, pp.1436-1442, 1992.
10. Cheng, N.S., Chiew, Y.M., "Pickup Probability for Sediment Entrainment," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.125, No.7, pp.789-789, 1998.
11. Cheng, N.S., Chen, X., "Slope Correction for Calculation of Bedload Sediment Transport Rates in Steep Channels," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.140, No.6, pp.298-307,2014.
12. Cheng, N.S., Tang, H., Yan, J., "Low-Submergence Effect on Incipient Sediment Motion," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.144, No.12, 04018111, 2018.
13. Einstein, H.A., "The Bed-Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flows," pp.32-40, Washington D C:United States Dept of Agriculture, Technical Bulletins, No:1026, 1950.
14. Engelund, F., Fredsøe, J., "A Sediment Transport Model for Straight Alluvial Channels," *Nordic Hydrology*, Vol.7, pp.293-306, 1976.
15. Fernandez, L,R., Van, B.R., "Erosion and Transport of Bed-Load Sediment," *Journal of Hydraulic Research*, Vol.14, No.2, pp.127-144,1976.
16. Gao, P., "Transition Between Two Bed-Load Transport Regimes: Saltation and Sheet Flow," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.134, No.3, pp.340-349, 2008.
17. Hill, H.M., Srinivasan, V.S., "Unny T E. Instability of Flat Bed in Alluvial Channels," *American Society of Civil Engineers*, Vol.95, No.3, pp.1545-1558, 1969.
18. Lee, H.Y., "Investigations of Continuous Bed Load Saltating Process," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.136, No.9, pp.691-700, 2000.
19. Lavelle, J.W., Mofjeld, H.O., "Do Critical Stresses for Incipient Motion and Erosion Really Exist?," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.113, No.3, pp.370-385, 1987.
20. Meyer-peter, E., Müller, R., "Formulas for Bed Load Transport," Proceedings of the 2nd Meeting of the International Association for Hydraulic Structures Research, Stockholm, pp.39-64, 1948.
21. Mcewan, I., Sorensen, M., Heald, J., Tait, S., Cunningham, G., Goring, D., Willetts, B., "Probabilistic Modeling of Bed-Load Composition," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.130, No.2, pp.129-139, 2004.
22. Meng, Z., Li, D.X., Wang, X.K., "Modification of the Engelund Bed-Load Formula," *International Journal of Sediment Research*, Vol.31, No.3, pp.251-256, 2016.
23. Nnadi, F.N., Wilson, K.C., "Bed-Load Motion at High Shear Stress: Dune Washout and Plane-Bed Flow," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.121, No.3, pp.267-273,1995.
24. Parker, G., "Self-Formed Straight Rivers with Equilibrium Banks and Mobile Bed: Part2. The Gravel River," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.89, No.1, pp.127-146, 1978.
25. Paintal,A.S., "Concept of Critical Shear Stress in Loose Boundary Open Channels," *Journal of Hydraulic Research*, Vol.9, No.1, pp.91-113, 1971.
26. Papanicolaou, A.N., Diplas, P., Evaggelopoulos, N., Fotopoulos, S., "Stochastic Incipient Motion Criterion for Spheres Under Various Bed Packing Conditions," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.128, No.4, pp.369-380, 2002.

27. Prancevic, J.P., Lamb, M.P., Fuller, B.M., "Incipient Sediment Motion Across the River to Debris-Flow Transition," *Geology*, Vol.42, No.3, pp.191-194, 2014.
28. Recking, A., "Simple Method for Calculating Reach-Averaged Bed-Load Transport," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.139, No.1, pp.70-75, 2013.
29. Recking, A., Frey, P., Paquier, A., Belleudy, P., Champagne, J.Y., "Bed-Load Transport Flume Experiments on Steep Slopes," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.134, No.9, pp.1302-1310, 2008.
30. Shih, W.R., Diplas, P., "A Unified Approach to Bedload Transport Description Over a Wide Range of Flow Conditions Via the Use of Conditional Data Treatment," *Water Resources Research*, Vol.54, No.5, pp.3490-3509, 2018.
31. Sumer, B.M., Kozakiewicz, A., Fredsøe, J., Deigaard, R., "Velocity and Concentration Profiles in Sheet-Flow Layer of Movable Bed," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.122, No.10, pp.549-558,1996.
32. Smart, G.M., "Sediment Transport Formula for Steep Channels," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.110, No.3, pp.267-276,1984.
33. Taylor, B.D., Vanoni, V.A., "Temperature Effects in Low-Transport, Flat-Bed Flows," *Journal of the Hydraulics Division*, Vol.98, No.8, pp.1427-1445, 1972.
34. Vatankhah, A.R., "Direct Solutions for Normal Depth in Parabolic and Rectangular Open Channels Using Asymptotic Matching Technique," *Flow Measurement & Instrumentation*, Vol.46, pp.66-71, 2015.
35. Wang, X.K., Zheng, J., Li, D.X., Qu, Z., "Modification of the Einstein Bed-Load Formula," *Journal of Hydraulics Engineering*, Vol.134, No.9, pp.1363-1369, 2008.
36. Wang, S., White, W.R., "Alluvial Resistance in Transition Regime," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.119, No.6, pp.725-741, 1993.
37. Xian, L., Yang, F., "On Uniform Formula for Bedload Transport Rate," International Conference on Remote Sensing, Environment and Transportation Engineering, Nanjing, China, pp.2288-2290, 2011.
38. Zhao, C., Fang, H., Liu, Y., Dey, S., He, G., "Impact of Particle Shape on Saltating Mode of Bedload Transport Sheared by Turbulent Flow," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.146, No.5, 04020034, 2020.
39. 張原鋒、龍毓騫:「Einstein 推移質公式的改進研究」，泥沙研究，第 4 期，pp.63-69，1997。
40. 周雙、張根廣、劉餘、王愉樂：「基於顆粒躍移運動的推移質輸沙率研究」，應用基礎與工程科學學報，第 29 卷第 4 期，pp.797-806，2021。
41. 孟震，「推移質運動基本規律研究」，清華大學水利水電工程系博士論文，2015。
42. 周雙、張根廣:「泥沙輸移過程的非線性動力學分析」，臺灣水利，第 67 卷第 3 期，pp.61-66，2019。
43. 金中武、盧金友、姚仕明：「長江上游推移質泥沙輸沙率公式的檢驗」，水利學報，第 40 卷第 11 期，pp.1299-1306，2009。
44. 苗蔚、陳啟剛、李丹勳、鐘強：「泥沙起動概率的高速攝影測量方法」，水科學進展，第 26 卷第 5 期，pp.698-706，2015。
45. 周雙、張根廣、劉餘、王愉樂：「基於床面泥沙位置特性的推移質輸移公式」，應用基礎與工程科學學報，第 28 卷第 5 期，pp.1045-1056，2020。
46. 郭俊克：「一個推移質輸沙率經驗公式的推導」，水利學報，第 4 期，pp.62-63，69，1989。
47. 高建恩：「推移質輸沙規律的再探討」，水利學報，第 4 期，pp.62-69，1993。
48. 許曉陽、張根廣、周雙、王愉樂、陳學彪、劉餘：「基於非線性理論的推移質輸沙率公式」，水力發電學報，第 38 卷第 11 期，pp.20-28，2019。
49. 麻卉港、張根廣、周雙、許曉陽：「均勻沙起動概率試驗研究」，泥沙研究，pp.1-7，2022。DOI: 10.16239/j.cnki. 0468-155x.2022.04.002.
50. 楊具瑞、方鐸、何文社、劉興年：「推移質輸沙率的非線性研究」，水科學進展，第 14 卷第 1 期，pp.36-40，2003。
51. 楊文俊、孟震、湯潔：「泥沙起動概率概念及其計算方法」，泥沙研究，第 44 卷第 5 期，pp.1-8，2019。
52. 楊勝發、周華君、王興奎：「大比降卵礫石河流輸沙率試驗研究」，水動力學研究與進展: A 輯，第 21 卷第 5 期，pp.672-678，2006。
53. 褚君達：「無粘性泥砂的起動條件[J]. 水科學進展」，第 1 期，pp.37-43，1993。
54. 錢寧、萬兆惠：「泥沙運動力學」，第九章，275-310 頁，科學出版社，北京，1983。
55. 韓其為：「推移質運動統計理論」，第一章，51-81 頁，科學出版社，北京，2021。

收稿日期：民國 111 年 07 月 27 日
修改日期：民國 111 年 08 月 19 日
接受日期：民國 111 年 09 月 20 日