

彈性波在飽和土壤中之傳波特性

Characteristics of Dilatational Wave Propagation and Attenuation through Fluid-saturated Soils

國立成功大學
水利及海洋工程學系
助理教授

羅偉誠

Wei-Cheng Lo

國立成功大學
水利及海洋工程學系
博士班研究生

葉昭龍

Chao-Lung Yeh

國立成功大學
水利及海洋工程學系特聘教授
兼防災研究中心主任

詹錢登*

Chyan-Deng Jan

摘 要

本文應用 Biot (1956a, b) 的孔彈性力學理論方程式分析彈性波在飽和含水土壤及空氣佔滿孔隙土壤中之傳波特性。首先探討飽和土壤中固體與孔隙流體之間的應力與應變關係式，其次應用 Biot 的理論方程式建立彈性波在飽和土壤中之傳波頻率方程式，然後整理三種不同土壤[砂土(sand)、粉土(silt)和黏土(clay)]之相關參數，最後應用傳波頻率方程式探討三種不同頻率(50、100 和 150 Hz)的 Biot 快速膨脹波(P1 波)及 Biot 慢速膨脹波(P2 波)在這些土壤中之傳波速度及傳波衰退係數。結果顯示，在本文所探討的三種不同頻率內，P1 波的傳波速度與傳波頻率無明顯之關係，但與土壤和孔隙流體特性有關；P1 波在各種飽和含水土壤中的傳波速度之差異不顯著，但在各種由空氣佔滿孔隙之土壤(全乾土壤)中其傳波速度之差異較明顯，而且在前者的速度遠高於在後者的速度；P1 波的傳波衰退係數約與傳波頻率兩次方成正比。P2 波的傳波速度遠小於 P1 波的傳波速度，但 P2 波的傳波衰退係數遠大於 P1 波的傳波衰退係數，而且前述兩者均與土壤材質有密切之關係；P2 波的傳波速度及衰退係數均約與傳波頻率的 1/2 次方成正比。

關鍵詞：彈性波，飽和，土壤特性，傳波速度，衰退係數。

ABSTRACT

The behaviors of dilatational wave propagation and attenuation through three different types of saturated soils (sand, silt, and clay) whose pore spaces are completely occupied either by water or by air were investigated in this study based on the celebrated

*通訊作者，國立成功大學水利及海洋工程學系教授，701 台南市東區大學路 1 號，cdjan@mail.ncku.edu.tw

Biot model equations of poroelasticity. The corresponding frequency equation was first derived and then solved numerically to determine the phase velocity and attenuation coefficient of the Biot fast (P1) and slow (P2) waves at the seismic frequency range of excitation (50, 100 and 150 Hz). The results show that the phase velocity of P1 wave is equal to the square root of the ratio of an effective bulk modulus to an effective density of the fluid-containing porous medium, regardless of excitation frequency and pore fluid. It is also found that the phase velocity of the P1 wave does not vary significantly in the water-saturated case whereas the variation is apparent in the air-saturated case. The attenuation coefficient of the P1 wave is approximately proportional to the square of the excitation frequency. In reference to the P2 wave, its attenuation is demonstrated to be greater than that of the P1 wave, but its phase velocity is less than that of the P1 wave. The magnitude of the phase velocity of attenuation coefficient of the P2 wave increases with the square root of the excitation frequency.

Keywords: Dilatational waves, Saturated, Soil characteristics, Wave velocity, Attenuation coefficient.

一、前言

這幾年彈性波在孔隙介質中傳遞的行為因具有工程應用價值已經引起科學界廣泛的研究興趣，例如：應用彈性波來探測地表下含水層的水文和應力參數(Schrefler and Zhan, 1991; Cosenza *et al.*, 2002)；利用低頻彈性波來提升原油開採的效率(Beresnev and Johnson, 1994)或增加地下水污染整治的效率(Lo *et al.*, 2005)；及使用高頻率彈性波來偵測骨骼和軟骨組織的特性和變異(Cowin, 1999; Hughes *et al.*, 2003)等等。在孔彈性力學理論分析方面，Biot (1956a, b)首先以 Lagrangian 架構下推導出描述彈性孔隙介質波傳行為的理論模式。Biot 的模式考慮了孔隙介質中固體及孔隙流體之間因運動所產生的互制行為。因為互制行為使得彈性波在孔隙介質傳遞過程中，會因為能量的損失而產生衰減的現象(Biot, 1956a, b; Stoll, 1974)。Biot (1956a, b)發現彈性波在飽和彈性孔隙介質中傳遞會有三個體波(body waves)存在：兩個膨脹波(dilatational waves)和一個旋轉波(剪力)(rotational wave)；當固體和液體作同向(in phase)變形運動時會產生一個傳遞速度較快的膨脹波，稱為 Biot 快速膨脹波(本文簡稱 P1 波)；當固體和液體作反向(out of

phase)變形運動時會產生另一個波速較慢的膨脹波，稱為 Biot 慢速膨脹波(本文簡稱 P2 波)。P1 波是類似於單一連體所觀察到之 P 波；P2 波擁有較低的波速與較高的衰退行為，因為其高衰退的傳波特性的，使其並不容易真正的被觀測到。所以一直到 1980 年 P2 波的存在才由 Berryman (1980)和 Plona (1980)在實驗室實驗證實。除了這些體波之外，接近交界面上亦可發現不同於體波型式的表面波，例如：雷利波(Rayleigh wave) (Tajuddin, 1984)及洛夫波(Love wave) (Deresiewicz, 1961; Chattopadhyay and De, 1983)。

近年來，已經有學者開始研究彈性波在含有兩個非混合流體的孔隙介質中的傳遞特性。Brutsaert (1964)首先發現彈性波在未飽和孔隙介質中傳遞會有第三個膨脹波存在，然而他所建立的非飽和孔隙介質孔彈性波傳理論中並未考慮流體和固體與流體和流體之間因相對加速度所造成之慣性互制阻力(inertial coupling)。Lo *et al.* (2005)使用多相連體力學(continuum mechanics of mixtures)及 Eulerian 分析方法，並考量慣性互制和毛細張力對彈性波的影響，建立描述彈性波在含有兩個非混合孔隙流體的彈性孔隙介質中傳遞之理論模式。Lo *et al.* (2005)的結果也預測了在包含兩個非混合流體的彈性孔隙介質應有三個

膨脹波的存在。儘管前人對於彈性波在孔隙介質中的傳遞已經有相當好的理論與數值研究成果，但是目前尚未有人深入探討應用前述理論來分析及比較不同土壤材質及其孔隙流體對彈性波傳遞影響。因此，本文將應用孔彈性力學理論探討彈性波在三種飽和土壤中膨脹波的波傳特性，而此三種土壤之孔隙由水或空氣完全飽和。

二、控制方程式

2.1 控制方程式

對於在飽和彈性孔隙介質中流體相與固體相之間位移變化的控制方程式，在低頻率(根據 Biot (1956a, b) 的定義，低頻率必須滿足 $\omega \leq \pi v_f / 4d^2$ 之條件， ω 是震盪頻率， v_f 是孔隙流體運動黏滯係數(kinematic viscosity)， d 是孔隙的平均直徑)的震盪下，假設流體流經的孔隙空間是 Poiseuille 流的型態。而且在 representative elementary volume (REV) 下，假設質點比彈性波的波長還要小，孔隙大小又比質點還小。因此，依據 Biot (1956a, b) 孔彈性力學理論，可以表示為：

$$\rho_f \phi \frac{\partial^2 \bar{u}_f}{\partial t^2} + b \left(\frac{\partial \bar{u}_f}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial t} \right) - \rho_{12} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}_s}{\partial t^2} \right) = \bar{\nabla} \cdot (-\phi p_f) \quad \dots\dots\dots(1a)$$

$$\rho_s \theta_s \frac{\partial^2 \bar{u}_s}{\partial t^2} - b \left(\frac{\partial \bar{u}_f}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial t} \right) + \rho_{12} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}_s}{\partial t^2} \right) = \bar{\nabla} \cdot \bar{t}_s \quad \dots\dots\dots(1b)$$

其中 \bar{u}_f 和 \bar{u}_s 分別為孔隙介質中流體相與固體相之位移向量； ρ_f 和 ρ_s 分別為流體相與固體相的密度； ϕ 為孔隙率； θ_s 為固體相體積分量，所以 $\theta_s = 1 - \phi$ ； p_f 表示孔隙流體壓力； \bar{t}_s 表示固體相所承受的應力張量； b 是流體與固體相之間的黏滯互制參數，當飽和孔隙介質在低頻率震盪時， b 可表示為 $b = \eta_f \phi^2 / k_s$ (Biot, 1956a; 1962)，此處 η_f 表示流體之動力黏滯係數， k_s 為滲透係數； ρ_{12} 為描述固體相與流體相之間慣性互制行

為之參數，可以表示為 $\rho_{12} = \rho_f \phi - m \phi^2$ (Biot, 1962)，其中參數 m 是流體密度和孔隙空間彎曲度因子 α_s (tortuosity) 的函數， m 可以表示為 $m = \alpha_s \rho_f / \phi$ (Stoll, 1974; Berryman, 1980; Johnson, 1986)；因此參數 ρ_{12} 可以進一步寫成：

$$\rho_{12} = \rho_f \phi (1 - \alpha_s), \quad \alpha_s \geq 1 \quad \dots\dots\dots(2)$$

此處 α_s 可由聲學的實際量測結果計算而得(Stoll, 1974; Berryman, 1980; Johnson, 1986)；假如孔隙介質是由圓球顆粒所形成，下列理論關係可以推導得出： $\alpha_s = 0.5(1 + \phi^{-1})$ (Berryman, 1983)。本文將使用此關係式推求 α_s 值，進而計算出 m 值及 ρ_{12} 值，或由 $\rho_{12} = 0.5 \rho_f (\phi - 1)$ 直接推求 ρ_{12} 值。

2.2 應力-應變關係式

雖然 Biot (1956a, b; 1957; 1962) 的孔彈性力學理論方程式(1)已經提供了分析彈性波在飽和的孔隙介質中傳遞和衰減現象的理論基礎，然而實際上要模擬孔隙介質中彈性波的波傳行為，仍須瞭解孔隙介質中固體和流體間的應力-應變關係。Biot (1962) 從兩個連體(continuum)的巨觀應變能量(macroscopic strain energy)方程式建立固體和流體間的應力-應變關係式(de la Cruz & Spanos, 1985; Pride *et al.*, 1992; Lo *et al.*, 2002)。對於均質孔隙介質，Biot (1956a) 的線性應力-應變關係式可寫成：

$$-\phi p_f \bar{\delta} = (Q \bar{\nabla} \cdot \bar{u}_s + R \bar{\nabla} \cdot \bar{u}_f) \bar{\delta} \quad \dots\dots\dots(3a)$$

$$\bar{t}_s = 2G \bar{e} + (A \bar{\nabla} \cdot \bar{u}_s + Q \bar{\nabla} \cdot \bar{u}_f) \bar{\delta} \quad \dots\dots\dots(3b)$$

此處 $\bar{e} = \frac{1}{2} (\bar{\nabla} \bar{u}_s + \bar{\nabla} \bar{u}_s^T)$ 代表固體相的應變張量，而上標 T 表示矩陣轉置； $\bar{\delta}$ 是單位張量； G 是孔隙介質的剪力模數；係數 A 、 Q 及 R 為彈性係數。根據 Biot and Willis (1957) 的研究，這些彈性係數與孔隙率 ϕ 、孔隙介質剪力模數(shear modulus) G 、孔隙介質統體模數(bulk modulus) K_b 、固體相統體模數 K_s 及流體相統體模數 K_f 等五參數之關係可以表示為：

三、波傳頻率方程式

為了得到膨脹波的頻率方程式，假設孔隙介質中固體相與流體相的體積應變量 e 及 ε 具有穩定正弦週期性波的方式且沿著 z 軸方向傳遞，即

$$e = \beta_s \exp i(kz - \omega t) \quad (7a)$$

$$\varepsilon = \beta_l \exp i(kz - \omega t) \quad (7b)$$

上式 β_s 及 β_l 分別表示固體相與流體相的膨脹波之振幅； $k = k_r + ik_i$ 是複數波數 (complex wave number)， $k_r = \text{Re}(k)$ 是傳統上定義的波數，而 $k_i = \text{Im}(k)$ 表示衰退係數 (Levy, 2001)。傳波速度 V 可由關係式 $V = \omega/k_r$ 推求。把方程式(7)帶入方程式(6)並重新整理後可以得到傳波頻率方程式：

$$\begin{aligned} & (-\omega^2 \rho_f \phi) \beta_l + b(-\omega i \beta_l + \omega i \beta_s) \\ & - \rho_{l2}(-\omega^2 \beta_l + \omega^2 \beta_s) \\ & = -Qk^2 \beta_s - Pk^2 \beta_l \quad (8a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (-\omega^2 \rho_s \theta_s) \beta_l - b(-\omega i \beta_l + \omega i \beta_s) \\ & + \rho_{l2}(-\omega^2 \beta_l + \omega^2 \beta_s) \\ & = -Pk^2 \beta_s - Qk^2 \beta_l \quad (8b) \end{aligned}$$

或表示成矩陣的形式：

$$\begin{aligned} & \left\{ -\omega^2 \begin{bmatrix} \rho_{l2} & \rho_f \phi - \rho_{l2} \\ \rho_s \theta_s - \rho_{l2} & \rho_{l2} \end{bmatrix} + k^2 \begin{bmatrix} Q & R \\ P & Q \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + i\omega \begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \beta_s \\ \beta_l \end{bmatrix} = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

重新安排上列方程式可得：

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -\rho_{l2} \omega^2 + i b \omega + Q k^2 & (-\rho_f \phi + \rho_{l2}) \omega^2 - i b \omega + R k^2 \\ (-\rho_s \theta_s + \rho_{l2}) \omega^2 - i b \omega + P k^2 & -\rho_{l2} \omega^2 + i b \omega + Q k^2 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \beta_s \\ \beta_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10) \end{aligned}$$

方程式(10)要有非零解的充分和必要條件是其係數矩陣的行列式值必須為零，如此可以推導出頻率方程式：

$$A \equiv \frac{(1-\phi)K_s(1-\phi-\frac{K_b}{K_s})+\phi(\frac{K_s}{K_f})K_b}{1-\phi-\frac{K_b}{K_s}+\phi\frac{K_s}{K_f}} - \frac{2}{3}G \quad (4a)$$

$$Q \equiv \frac{(1-\phi-\frac{K_b}{K_s})\phi K_s}{1-\phi-\frac{K_b}{K_s}+\phi\frac{K_s}{K_f}} \quad (4b)$$

$$R \equiv \frac{\phi^2 K_s}{1-\phi-\frac{K_b}{K_s}+\phi\frac{K_s}{K_f}} \quad (4c)$$

將上述參數及線性應力-應變關係式帶入方程式(1)可以得到：

$$\begin{aligned} & \rho_f \phi \frac{\partial^2 \bar{u}_f}{\partial t^2} + b \left(\frac{\partial \bar{u}_f}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial t} \right) - \rho_{l2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}_s}{\partial t^2} \right) \\ & = \bar{\nabla} \cdot (Qe + R\varepsilon) \quad (5a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho_s \theta_s \frac{\partial^2 \bar{u}_s}{\partial t^2} - b \left(\frac{\partial \bar{u}_f}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial t} \right) + \rho_{l2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}_s}{\partial t^2} \right) \\ & = G \nabla^2 \bar{u}_s + \bar{\nabla} \cdot [(A+G)e + Q\varepsilon] \quad (5b) \end{aligned}$$

此處 $e \equiv \bar{\nabla} \cdot \bar{u}_s$ 和 $\varepsilon \equiv \bar{\nabla} \cdot \bar{u}_f$ 分別表示固體相與流體相的體積應變量。然後，對上述方程式兩邊作散度(發散) (divergence) 運算，可推導出孔隙介質中固體相與流體相的體積應變量 (dilatation) 控制方程式：

$$\begin{aligned} & \rho_f \phi \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + b \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial e}{\partial t} \right) - \rho_{l2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \right) \\ & = \nabla^2 (Qe + R\varepsilon) \quad (6a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho_s \theta_s \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - b \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial e}{\partial t} \right) + \rho_{l2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \right) \\ & = \nabla^2 (Pe + Q\varepsilon) \quad (6b) \end{aligned}$$

其中參數 $P \equiv A + 2G$ (Biot, 1956a; Johnson, 1986)。運用上述孔隙介質中固體相與流體相的體積應變量控制方程式可以分析膨脹波在孔隙介質中的傳波特性的。

$$D_{11}\left(\frac{\omega^2}{k^2}\right) + D_{22}\left(\frac{\omega^2}{k^2}\right) + D_{33} = 0 \dots\dots\dots(11)$$

上式中 D_{11} 及 D_{12} 為具複數型式之係數； D_{33} 為實數係數，它們與孔隙介質相關參數之關係分別為：

$$D_{11} = -\rho_f \phi \rho_s \theta_s + \rho_f \phi \rho_{12} + \rho_s \theta_s \rho_{12} + \frac{i}{\omega} (-\rho_f \phi b - \rho_s \theta_s b) \dots\dots\dots(12a)$$

$$D_{22} = -2\rho_{12}Q - \rho_{12}R - \rho_{12}P + \rho_f \phi P + \rho_s \theta_s R + \frac{i}{\omega} (2bQ + bP + bR) \dots\dots\dots(12b)$$

$$D_{33} = Q^2 - RP \dots\dots\dots(12c)$$

方程式(11)是一個具複數型式的二次多項式；當給定一個固定的震盪頻率 ω ，理論上此方程式有四個複數波數解($k = k_r + ik_i$)，即

$$k = \pm \left(\frac{2\omega^2 D_{11}}{-D_{22} \pm \sqrt{D_{22}^2 - 4D_{11}D_{33}}} \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(13)$$

其中有兩個解的衰退係數(k_i)為正值，另外兩個解的衰退係數為負值。然而，在孔隙介質中彈性波的震幅，因為能量的消耗，將隨著距離而衰減；為了滿足此物理條件，衰退係數必須大於零，即 $k_i > 0$ (Tuncay and Corapcioglu, 1996, 1997; Lo *et al.*, 2005)；因此，當給定一個固定低傳波頻率 ω 時，由頻率方程式可以求解出兩個有意義複數波數($k = k_r + ik_i$)，這說明彈性波在單一孔隙流體的飽和孔隙介質中傳遞會存在兩個不同特性的膨脹波。

四、膨脹波在飽和土壤中的傳遞特性

4.1 土壤類別及相關參數

土壤是一種孔隙介質，要應用前述孔隙介質傳波頻率方程式(11)分析膨脹波在飽和土壤中的傳遞特性時，須先知道土壤之統體模數 K_b 、剪力模數 G 、孔隙率 ϕ 和滲透係數 k_s 。土壤的 k_b 和 G 與土壤楊氏係數 E 與柏松比 ν 之關係為 (Girsang, 2001)：

$$K_b = \frac{E}{3(1-2\nu)} \dots\dots\dots(14a)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \dots\dots\dots(14b)$$

因此如果能夠知道土壤的楊氏係數 E 及柏松比 ν ，就可以由上式推算出土壤的 K_b 和 G 值。本文將分析砂土(sand)、粉土(silt)與黏土(clay)三種土壤之傳波特性的。因此根據典型楊氏係數和柏松比在不同土壤的數值(Das, 1997)，分別將 Das 所列的數值平均即可得到砂土與黏土的楊氏係數和柏松比，然後使用方程式(14)，則可得到這兩種土壤之統體模數 K_b 與剪力模數 G ；同時參考 Girsang (2001)所得到的粉土之統體模數 K_b 與剪力模數 G 值。根據 Rawls *et al.* (1992)可得到砂土和黏土的孔隙率與水力傳導係數，由水力傳導係數即可推求滲透係數；此外並參考 Olowofela and Adegoke (2004)所列粉土之孔隙率與滲透係數。此三種土壤的孔隙率 ϕ 、楊氏係數 E 、柏松比 ν 、孔隙介質剪力模數 G 、孔隙介質統體模數 K_b 、水力傳導係數及滲透係數等參數列於表 1，其他相關參數亦列於表 1 (Tuncay and Corapcioglu, 1996; Das, 1997; Chen *et al.*, 1999)。一般情況，土壤內的孔隙可能完全充滿水、或部份含水部份含空氣、或完全充滿空氣(完全乾燥土壤)、或含有其他流體。本文僅分析土壤孔隙完全充滿單一液體情況下(土壤內的孔隙完全充滿水及土壤內的孔隙完全充滿空氣等兩種)之傳波特性的。

將前述這三種不同土壤的相關參數，如表 1 所列，帶入前述飽和孔隙介質頻率方程式，探討三種彈性波頻率($\omega = 50\text{Hz}$ 、 100Hz ，和 150Hz)條件下，並利用商用軟體 Matlab 程式可求解得兩組膨脹波的波數($k = k_r + ik_i$)，然後依據頻率及波數來探討兩種膨脹波在這些飽和土壤中的傳波速度 $V (= \omega/k_r)$ 及其衰退係數 k_i 。此兩種膨脹波分別為 P1 波及 P2 波。

4.2 P1 波在土壤中傳波特性的

依照上述表 1 所列之土體、流體(水及空氣)及孔隙介質等相關參數帶入頻率方程式後求解

表 1 三種土壤類別及相關參數

土壤類別	孔隙率	飽和水力 傳導係數 K (m/s)	楊氏係數 E (MPa)	柏松比 ν	統體模數 K_b (MPa)	剪力模數 G (MPa)	滲透係數 k_s (m^2)
砂土	0.437	5.83E-05	35.362	0.333	35.3	13.3	5.96E-12
粉土	0.450	-	-	-	12.4	3.7	1.0E-12
黏土	0.475	1.67E-07	6.123	0.275	4.5	2.4	1.7E-14

參考資料：Das, 1997; Girsang, 2001; Olowofela and Adegoke, 2004 及 Rawls *et al.*, 1992。

其他參數值(參考 Lo *et al.*, 2005)：

空氣之統體模數 $K_1 = 0.145$ MPa； 固體之統體模數 $K_s = 35$ GPa；

水之統體模數 $K_2 = 2.25$ GPa； 空氣之密度 $\rho_1 = 1.1$ kg/m³；

固體之密度 $\rho_s = 2650$ kg/m³； 水之密度 $\rho_2 = 997$ kg/m³；

空氣之黏滯係數 $\eta_1 = 18 \times 10^{-6}$ Ns/m²； 水之黏滯係數 $\eta_2 = 0.001$ Ns/m²。

表 2 P1 波在飽和含水及飽和空氣土壤中之傳波速度

土壤類別	在飽和含水土體		在飽和空氣土體		V_{1w}/V_{1a}
	波速 V_{1w} (m/s)	相對波速	波速 V_{1a} (m/s)	相對波速	
砂土	1577.85	1.024	189.09	2.493	8.34
粉土	1561.89	1.013	110.04	1.451	14.19
黏土	1541.15	1	75.84	1	20.32

得 Biot 快速膨脹波(P1 波)及 Biot 慢速膨脹波(P2 波)的傳波特性，結果如下：

(1) P1 波傳波速度 V

從數值分析結果我們獲知當土壤孔隙由水或空氣完全佔滿，P1 波之傳波速度 V 和土壤類別有關，但是和傳波頻率無關。當飽和孔隙介質受到低頻震盪的情況，這個結果可由方程式(6)並假設流體相與固體相的相對運動在 $e = \epsilon$ 之條件下所得出，即 Biot (1956a,b)推導 P1 波的波速可以近似簡化為：

$$V = \left(\frac{P + 2Q + R}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(15)$$

其中 $\rho = \rho_s \theta_s + \rho_f \phi$ 為土體的密度。本研究數值解所得到的 P1 波之傳波速度與方程式(15)所得到的解析值相同。由表 2 或圖 1 可知，當土壤孔隙只由水所填滿時，P1 波在前述三種不同土壤中的波速介於 1,541.1 m/s (黏土)至 1,577.85 m/s (砂土)之間，其間差異不大，最大差異僅有 2.4%；

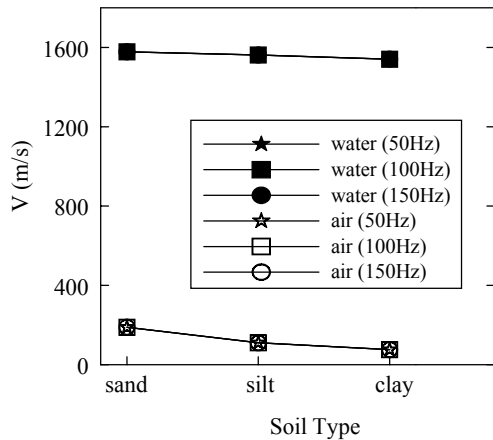


圖 1 P1 波在水或空氣佔滿孔隙之飽和土壤中傳波速度

反之，當土壤孔隙只有空氣時(全乾土壤)，P1 波傳波波速在不同的土壤中變化較大，在砂土中波速最大(189.09 m/s)，在黏土中波速最小(75.84 m/s)，其間最大差異約 149.3%，其間差異除了與土壤孔隙率有關之外，主要與土壤統體模數

表 3 不同頻率 P1 波在飽和含水及飽和空氣土壤中之衰退係數(1/m)

土壤類別	水佔滿孔隙之飽和土壤			空氣佔滿孔隙之飽和土壤		
	$\omega = 50 \text{ Hz}$	100 Hz	150 Hz	50 Hz	100 Hz	150 Hz
砂土	8.035E-05	3.214E-04	7.229E-04	3.868E-06	1.547E-05	3.481E-05
粉土	1.351E-05	5.403E-05	1.216E-04	1.111E-05	4.444E-05	1.000E-04
黏土	2.188E-07	8.754E-07	1.97E-06	1.195E-06	4.781E-06	1.076E-05

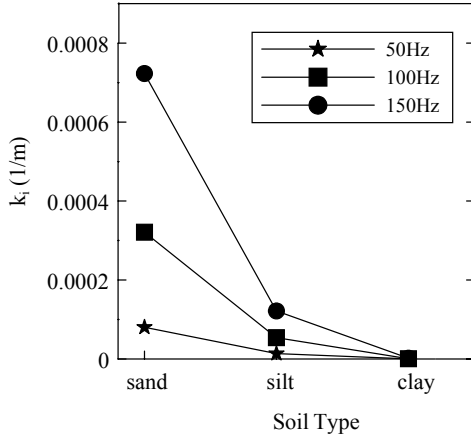


圖2 P1 波在水佔滿孔隙之之飽和土壤中衰退係數

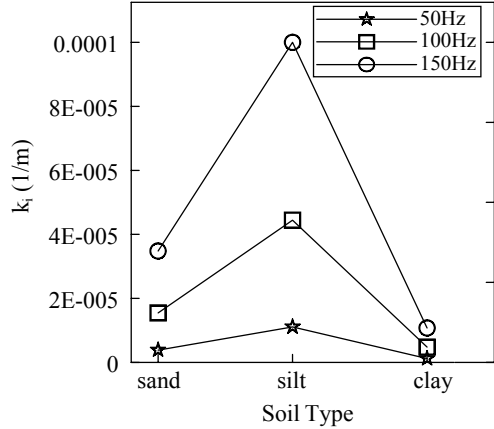


圖3 P1 波在空氣佔滿孔隙之之飽和土壤中衰退係數

和剪力模數的大小有關。很明顯的，P1 波在水佔滿孔隙之土壤中的傳波速度比在空氣佔滿孔隙之土壤中的傳波速度大，大約是 8.34 倍至 20.32 倍，這是因為水的統體模數比空氣之統體模數大很多。

(2) P1 波衰退係數 k_i

P1 波在水佔滿孔隙之土壤中和在空氣佔滿孔隙之土壤中之傳波衰退係數分別列於表 3 及點繪於圖 2 和圖 3。由圖表中可知傳波衰退係數與傳波頻率有很密切之關係；在相同土壤中傳波頻率較大者其衰退係數也較大，例如水佔滿孔隙之砂土在頻率 $\omega = 50\text{Hz}$ 及 150Hz 時所對應之衰退係數分別為 $8.035\text{E}-05$ 及 $7.229\text{E}-04$ ，後者之衰退係數約是前者的 9 倍。另外一方面，在相同頻率下，除了黏土外，P1 波在水佔滿孔隙之土壤中的衰退係數高於在空氣佔滿孔隙之土壤中之衰退係數，例如在頻率 $\omega = 100\text{Hz}$ 條件下，水佔滿孔隙之砂土及空氣佔滿孔隙之砂土所對應之衰退係數分別為 $3.214\text{E}-04$ 及 $1.547\text{E}-05$ ，

後者之衰退係數約是前者的 4.81% (相當於前者是後者的 20.78 倍)，其統體模數較大的土壤(砂土)在由水所佔滿比空氣所佔滿的彈性孔隙介質之 P1 波衰退係數大較多。在相同頻率下，水佔滿孔隙時，砂土的 P1 波衰退係數最大，黏土最小；空氣佔滿孔隙時，粉土的 P1 波衰退係數最大，黏土最小，表示空氣對 P1 波衰退係數之影響很大。

P1 波不管由水或空氣佔滿孔隙介質在頻率 100Hz 和 150Hz 所得到之衰退係數分別與 50Hz 所得到之衰退係數相除，其比值分別約為 4 和 9。很明顯的，P1 波在水佔滿孔隙或空氣佔滿孔隙之土壤中的衰退係數比與傳波頻率比的平方成正比，即 $k_i^{w1}/k_i^{w2} = (\omega_1/\omega_2)^2$ ， k_i^{w1} 及 k_i^{w2} 分別代表頻率為 ω_1 及 ω_2 條件下之 P1 波之衰退係數。

4.3 P2 波在土壤中傳波特性

(1) P2 波傳波速度 V

圖 4 和圖 5 (表 4) 分別為水和空氣佔滿孔隙

表 4 不同頻率 P2 波在飽和含水及飽和空氣土壤中之波速(m/s)

土壤類別	水佔滿孔隙之飽和土壤			空氣佔滿孔隙之飽和土壤		
	$\omega = 50 \text{ Hz}$	100 Hz	150 Hz	50 Hz	100 Hz	150 Hz
砂土	13.99	19.71	24.06	8.28	11.71	14.34
粉土	3.29	4.65	5.70	3.32	4.70	5.75
黏土	0.29	0.41	0.50	0.42	0.59	0.72

表 5 不同頻率 P2 波在飽和含水及飽和空氣土壤中之衰退係數(1/m)

土壤類別	水佔滿孔隙之飽和土壤			空氣佔滿孔隙之飽和土壤		
	$\omega = 50 \text{ Hz}$	100 Hz	150 Hz	50 Hz	100 Hz	150 Hz
砂土	22.31	31.44	38.38	37.91	53.60	65.63
粉土	95.29	134.68	164.86	94.54	133.69	163.73
黏土	1094.94	1548.47	1896.46	751.72	1063.10	1302.02

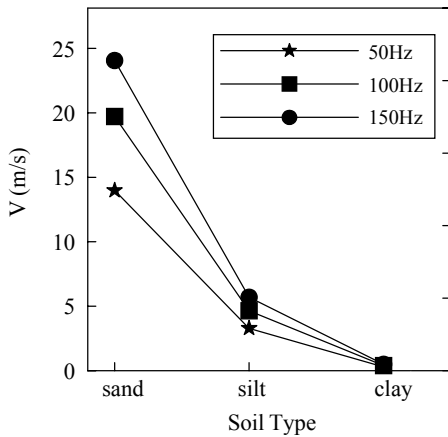


圖 4 P2 波在水佔滿孔隙下之飽和土壤中傳波速度

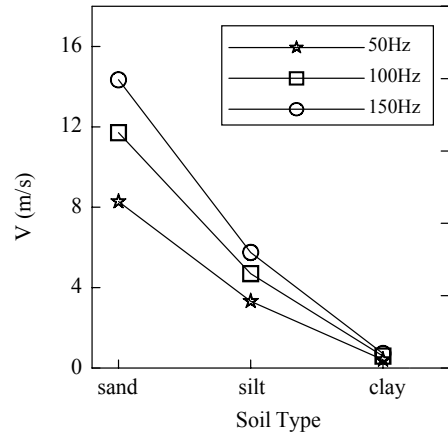


圖 5 P2 波在空氣佔滿孔隙之飽和土壤中傳波速度

時 P2 波之傳波速度。在單一飽和孔隙流體(水或空氣)的土壤中，頻率越大的 P2 波其傳波速度越大。不同土壤中，相同頻率下，除了砂土外，由水所佔滿的土壤其 P2 波傳波速度比空氣所佔滿的土壤之 P2 波傳波速度小，例如在頻率 $\omega = 50\text{Hz}$ 條件下，水佔滿孔隙之黏土及空氣佔滿孔隙之黏土所對應之波速分別為 0.29 及 0.42，後者之波速約是前者的 1.4 倍。不管水或空氣佔據孔隙，相同頻率下，P2 波波速在砂土中最大，在黏土中最小。不管在水或空氣佔滿孔隙之飽和土壤中，在頻率 100Hz 和 150Hz 下之波速與在頻率 50Hz 下之波速的比值分別約為 1.414 和 1.732，此顯示 P2 波在飽和土壤中之傳波速度約

與其頻率的開根號(1/2 次方)成正比。

(2) P2 波衰退係數 k_i

表 5 列出不同頻率 P2 波分別在水和空氣佔滿孔隙之土壤中之衰退係數。圖 6 和圖 7 顯示頻率越大之 P2 波在飽和土壤中的衰退係數越大；衰退係數約與傳波頻率的平方根成正比。除了砂土外，P2 波在空氣所佔滿孔隙的飽和土壤之衰退係數低於在水所佔滿孔隙的飽和土壤衰退係數。不管水或空氣佔據孔隙，相同頻率下，P2 波在砂土中的傳波衰退係數最小，在黏土中最大。P2 波的衰退係數與波速呈現反比的現象，波速越大衰退係數則越小。P2 波的衰退係數遠遠大於 P1 波的衰退係數。

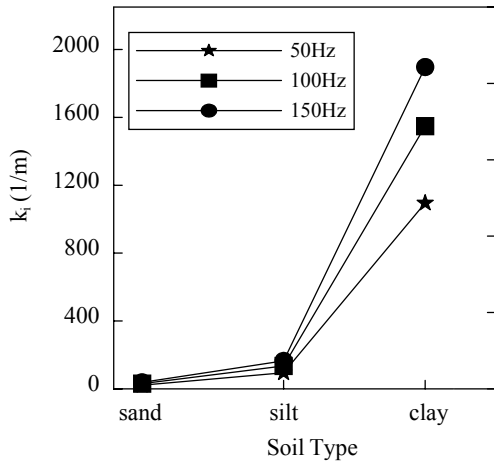


圖 6 P2 波在水佔滿孔隙之飽和土壤中衰退係數

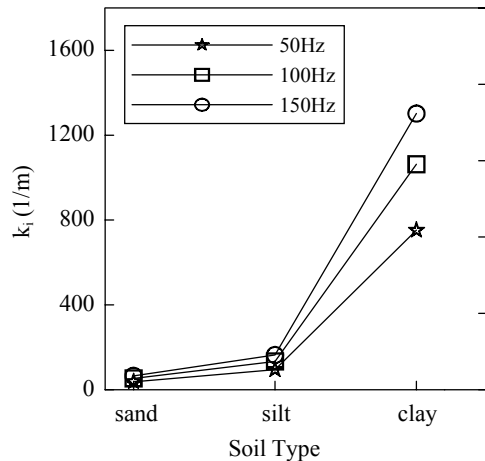


圖 7 P2 波在空氣佔滿孔隙之飽和土壤中衰退係數

五、結 論

本文應用 Biot (1956a, b) 的孔彈性力學理論分析彈性波在飽和含水土壤及空氣佔滿孔隙土壤中之傳波特性。首先探討飽和土壤中固體與孔隙流體之間的應力與應變關係式，其次應用 Biot 的理論方程式建立彈性波在飽和土壤中之傳波頻率方程式，然後整理三種不同土壤之相關參數，最後應用傳波頻率方程式探討三種不同頻率(50、100 和 150 Hz)的 Biot 快速膨脹波(P1 波)及 Biot 慢速膨脹波(P2 波)在此三種土壤中之傳波速度及傳波衰退係數。

結果顯示 P1 波在飽和含水土壤及空氣佔滿孔隙土壤(全乾土壤)中的傳波速度及衰退係數與土壤和孔隙流體特性有關，但是在本文探討的三種不同頻率內，傳波速度與傳波頻率無明顯之關係。P1 波在飽和含水土壤中的傳波速度介於 1,541 m/s (黏土)至 1,578 m/s (砂土)之間，其間速度差異約 2.4%；P1 波在空氣佔滿孔隙土壤(全乾土壤)中的傳波速度介於 76 m/s (黏土)至 189 m/s (砂土)之間，其間速度差異較為顯著(高達 149.09%)。P1 波在飽和含水土壤中之傳波速度約為在全乾土壤中之傳波速度的 8.34 至 20.32 倍，由此推知土壤含水量有利於 P1 波之傳波。P1 波的傳波衰退係數，除了與土壤特性有密切關係之外，約與傳波頻率兩次方成正比；以 100Hz

的 P1 波為例，水佔滿孔隙之砂土及空氣佔滿孔隙之砂土的傳波衰退係數分別為 $3.214\text{E-}04$ 及 $1.547\text{E-}05$ ，其由水佔滿孔隙之傳波衰退係數比由空氣佔滿之傳波衰退係數大。

P2 波的傳波速度及衰退係數均與土壤材質有密切之關係，而且兩者均大約與傳波頻率的 $1/2$ 次方成正比。P2 波的傳波速度遠小於 P1 波的傳波速度，但 P2 波的傳波衰退係數遠大於 P1 波的傳波衰退係數。在相同頻率下，P2 波在飽和(不管由水或空氣佔滿孔隙)砂土中的傳波速度最大，衰退係數最小；在飽和黏土中的傳波速度最小，衰退係數最大。

符號說明

- | | |
|------------------------------------|-----------------------|
| A | = Biot 彈性係數 |
| b | = 流體相與固體相之間的黏滯互制行為之參數 |
| E | = 楊氏係數 |
| $e = \bar{\nabla} \cdot \bar{u}_s$ | = 固體相的體積變量 |
| \bar{e} | = 固體相的應變張量 |
| G | = 孔隙介質的剪力模數 |
| K | = 飽和水力傳導係數 |
| K_1, K_2 | = 空氣及水之統體模數 |
| K_b | = 孔隙介質統體模數 |
| K_f, K_s | = 流體相及固體相之統體模數 |
| k_i, k_r | = 傳波之衰退係數及波數 |

k_s	= 滲透係數
m	= $\alpha_s \rho_f / \phi$
p_f	= 孔隙流體壓力
Q	= Biot 彈性係數
R	= Biot 彈性係數
\bar{t}_s	= 固體相所承受的應力張量
\bar{u}_f, \bar{u}_s	= 流體相及固體相之位移向量
V	= 傳波速度
α_s	= 彎曲度因子
$\underline{\beta}_1, \beta_s$	= 流體相及固體相的膨脹波之振幅
$\bar{\delta}$	= 單位張量
$\varepsilon = \bar{\nabla} \cdot \bar{u}_f$	= 流體相的體積變量
η_1, η_2	= 空氣及水之動力黏滯係數
η_f	= 流體相之動力黏滯係數
θ_s	= 固體相體積分量
ρ	= 飽和土體的總密度
ρ_1, ρ_2	= 空氣及水之密度
ρ_{12}	= 固體相與流體相之間慣性互制行為之參數
ρ_f, ρ_s	= 流體相及固體相之密度
ϕ	= 孔隙率
ν	= 柏松比
ν_f	= 流體相運動黏滯係數
ω	= 震盪頻率

參考文獻

1. Beresnev, I. A., P. A. Johnson, 1994, Elastic-wave stimulation of oil production: a review of methods and results, *Geophysics*, Vol. 59, no. 6, pp. 1000-1017.
2. Berryman, J. G., 1980, Confirmation of Biot's theory, *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 37, no. 4, pp. 382-384.
3. Berryman, J. G., 1983, Effective conductivity by fluid analogy for a porous insulator filled with a conductor, *Phys. Rev. B*, Vol. 27, no. 12, pp. 7789-7792.
4. Biot, M. A., 1956a, Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid, I. Low-frequency range, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 28, no. 2, pp. 168-178.
5. Biot, M. A., 1956b, Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid, II. Higher frequency range, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 28, no. 2, pp. 179-191.
6. Biot, M. A., D. G. Willis, 1957, The elastic coefficient of the theory of consolidation, *J. Appl. Mech.*, Vol. 24, pp. 594-601.
7. Biot, M. A., 1962, Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media, *J. Appl. Phys.*, Vol. 33, no. 4, pp. 1482-1498.
8. Brutsaert, W., 1964, The propagation of elastic waves in unconsolidated unsaturated granular mediums, *J. Geophys. Res.*, Vol. 69, no. 2, pp. 243-257.
9. Chattopadhyay, A., and R. K. De, 1983, Love wave types in a porous layer with irregular interface, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 21, pp. 1295-1303.
10. Chen, J., J. W. Hopmans, and M. E. Grismer, 1999, Parameter estimation of two-fluid capillary pressure-saturation and permeability functions, *Adv. Water Resour.*, Vol. 22, no. 5, pp. 479-493.
11. Cosenza, P., M. Ghoreychi, G. de Marsily, G. Vasseur, and S. Violette, 2002, Theoretical prediction of poroelastic properties of argillaceous rocks from in situ specific storage coefficient, *Water Resour. Res.*, Vol. 38(10), 1207, doi: 10.1029/2001 WR001201.
12. Cowin, S. C., 1999, Bone poroelasticity, *Journal of Biomechanics*, Vol. 32, pp. 217-238.
13. Das, B. M., 1997, *Advanced Soil Mechanics*, Taylor and Francis, Philadelphia, Pa.
14. de la Cruz, V., T. J. T. Spanos, 1985, Seismic wave propagation in a porous medium, *Geophysics*, Vol. 50, no. 10, pp. 1556-1565.
15. Deresiewicz, H., 1961, The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid, II, Love waves in a porous layer, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, Vol. 51, pp. 51-59.
16. Girsang, C. H., 2001, A numerical investigation

- of the seismic response of the aggregate pier foundation system, Master Thesis, Department of Civil Engineering, University of Virginia, Blacksburg.
17. Hughes, E. R., T. G. Leighton, G. W. Petley, P. R. White, R. Cm. Chivers, 2003, Estimation of critical and viscous frequencies for Biot theory in cancellous bone, *Ultrasonics*, Vol. 41, no. 5, pp. 365-368.
 18. Johnson, D. L., 1986, Recent developments in the acoustic properties of porous media, in *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi" Course XCIII, Frontiers in Physical Acoustics*, edited by D. Sette, pp. 255-290, Elsevier, New York.
 19. Levy, M., 2001, Elastic properties of solids: Theory, elements and compounds, novel materials, technological materials, alloys, and building materials, in *Handbook of Elastic properties of Solids, Liquids, and Gases*, vol. II, pp. 27-29, Elsevier, New York.
 20. Lo, W.-C., G. Sposito, and E. Majer, 2002, Immiscible two-phase flows in deformable porous media, *Advances in Water Resources*, Vol. 25 (8-12), pp. 1105-17.
 21. Lo, W.-C., G. Sposito, and E. Majer, 2005, Wave propagation through elastic porous media containing two immiscible fluids, *Water Resour. Res.*, Vol. 41, no. 2, pp. W02025.
 22. Olowofela, J. A., J. A., Adegoke, 2004, Modelling effective rheologies for viscoelastic porous media with application to silt, and medium and coarse sand, *J. Geophys. Eng.*, Vol. 1, no. 3, pp. 240-243.
 23. Plona, T. J., 1980, Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies, *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 36, no. 4, pp. 259-261.
 24. Pride, S. R., A. F. Gangi, and F. D. Morgan, 1992, Deriving the equations of motion for isotropic media, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 92, pp. 3278-3290.
 25. Rawls, W. J., J. R. Ahuja, and D. L. Brakensiek, 1992, Estimating soil hydraulic properties from soils data. Workshop on Indirect Methods for Estimating the Hydraulic Properties of Unsaturated Soils, Riverside, CA, Proceedings pp. 329-341.
 26. Schrefler, B. A., and X. Y. Zhan, 1991, A fully coupled model for water-flow and air-flow in deformable porous-media, *Water Resour. Res.*, Vol. 29, no. 1, pp. 155-167.
 27. Stoll, R. D., 1974, Acoustic waves in saturated sediments, *Physics of Sound in Marine Sediments*, edited by L. Hampton, pp. 19-39, Springer, New York.
 28. Tajuddin, M., 1984, Rayleigh waves in a poroelastic half-space, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 75, pp. 682-684.
 29. Tuncay, K., and M. Y. Corapcioglu, 1996, Body waves in poroelastic media saturated by two immiscible fluids, *J. Geophysical Research-Solid Earth*, Vol. 101, pp. 25149-25159.
 30. Tuncay, K., and M. Y. Corapcioglu, 1997, Wave propagation in poroelastic media saturated by two fluids, *J. Appl. Mech.*, Vol. 64, no. 2, pp. 313-320.

收稿日期：民國 96 年 1 月 15 日

修正日期：民國 96 年 5 月 8 日

接受日期：民國 96 年 5 月 10 日