

淺水流動條件下的泥沙起動規律研究

STUDY ON INCIPIENT MOTION OF SEDIMENT IN SHALLOW WATER

黃河水利委員會
黃河水利科學研究院
水利部黃河下游河道與
河口治理重點實驗室
黃河實驗室
工程師

許曉陽
Xiao-Yang Xu

黃河水利委員會
黃河水利科學研究院
水利部黃河下游河道與
河口治理重點實驗室
黃河實驗室
正高級工程師

王平
Ping Wang

黃河水利委員會
黃河水利科學研究院
水利部黃河下游河道與
河口治理重點實驗室
黃河實驗室
工程師

耿旭
Xu Geng

黃河水利委員會黃河水利科學研究院
水利部黃河下游河道與河口治理重點實驗室
黃河實驗室
助理工程師

張廣明
Guang-Ming Zhang

黃河水利委員會黃河水利科學研究院
水利部黃河下游河道與河口治理重點實驗室
黃河實驗室
高級工程師

胡恬*
Tian Hu

摘 要

泥沙起動規律對泥沙運動力學的理論發展及水利工程的實際應用具有重要意義。希爾茲曲線作為最為經典的泥沙起動判別式，廣泛應用於大水深河流，但在淺水流動條件下，希爾茲曲線無法合理解釋臨界希爾茲數隨相對粗糙度增大而增大的現象。鑒於此，本文建立了淺水流動條件下均勻沙的臨界希爾茲數公式。本文基於混合流速尺度的輸沙率模型，建立了臨界希爾茲數與無量綱輸沙率、床面阻力係數的統一關係式；在無量綱輸沙率和床面阻力係數研究的基礎上，建立了臨界無量綱輸沙率和臨界床面阻力係數的計算公式；通過對比深水、淺水流動條件下泥沙起動參數間的關係，建立了淺水流動條件下泥沙臨界希爾茲數的計算公式。經水槽實測資料、野外實測資料及其它經典泥沙起動參數公式的對比，表明本文公式具有良好的適用性。研究成果可為工程的實際應用提供理論支撐。

關鍵詞：明渠流、淺水流動、泥沙起動、臨界希爾茲數、卵礫石河流。

* 黃河水利委員會黃河水利科學研究院、水利部黃河下游河道與河口治理重點實驗室和黃河實驗室
高級工程師

450003 中國河南省鄭州市金水區順河路 45 號，32092571@qq.com

STUDY ON INCIPIENT MOTION OF SEDIMENT IN SHALLOW WATER

Xiao-Yang Xu

Yellow River Institute of
Hydraulic Research, Yellow
River Conservancy Commission
Key Laboratory of Lower Yellow
River Channel and
Estuary Regulation,
Ministry of Water Resources
Yellow River Laboratory

Ping Wang

Yellow River Institute of
Hydraulic Research, Yellow
River Conservancy Commission
Key Laboratory of Lower Yellow
River Channel and
Estuary Regulation,
Ministry of Water Resources
Yellow River Laboratory

Xu Geng

Yellow River Institute of
Hydraulic Research, Yellow
River Conservancy Commission
Key Laboratory of Lower Yellow
River Channel and
Estuary Regulation,
Ministry of Water Resources
Yellow River Laboratory

Guang-Ming Zhang

Yellow River Institute of Hydraulic Research,
Yellow River Conservancy Commission
Key Laboratory of Lower Yellow River Channel
and Estuary Regulation,
Ministry of Water Resources
Yellow River Laboratory

Tian Hu*

Yellow River Institute of Hydraulic Research,
Yellow River Conservancy Commission
Key Laboratory of Lower Yellow River Channel
and Estuary Regulation,
Ministry of Water Resources
Yellow River Laboratory

ABSTRACT

The study of sediment incipient motion is of great significance to the theoretical development of sediment transport mechanics and the practical application of water conservancy projects. Shields curve, as the most classical incipient motion discriminant, is widely used in deep rivers. However, under shallow flow conditions, Shields curve is unable to reasonably explain the phenomenon that the critical Shields number increases with the increase of relative roughness. Utilising the sediment transport rate model in the mixed velocity scale, a unified relationship is derived between the critical Shields number and the dimensionless sediment transport rate and the bed resistance coefficient. Subsequent to the study of the dimensionless sediment transport rate and bed resistance coefficient, the formulas for calculating the critical dimensionless sediment transport rate and critical bed resistance coefficient are established. By comparing the relationship between the incipient motion parameters of sediment under conditions of deep water and shallow water, a formula for calculating the critical Shields number of sediment under conditions of shallow water is established. A comparison of the observed data in the flume and field with other classical formulas of incipient motion parameters of sediment was undertaken, and it was demonstrated that the formula presented in this paper has good applicability. The findings of this study offer a robust theoretical foundation, providing a valuable framework for the practical implementation of the project.

Keywords: Open channel flow, Shallow flow, Incipient sediment motion, Critical Shields stress, Gravel bed.

Xu, X.Y., Wang, P., Geng, X., Zhang G.M., & Hu, T.* (2025). "Study on Incipient Motion of Sediment in Shallow Water." *Journal of Taiwan Agricultural Engineering*, 71(3), 75-84.

[https://doi.org/10.29974/JTAE.202509_71\(3\).0005](https://doi.org/10.29974/JTAE.202509_71(3).0005)

一、前言

淺水流動條件下的泥沙起動規律始終是國內外泥沙學者研究的熱點問題之一，如山區河流的泥沙起動規律研究。在泥沙起動研究中，通常採用相對粗糙度 k_s/h 來量化床面粗糙尺度 (k_s 為床面粗糙度， $k_s = D_{50}$ 或 D_{84} ，分別為累積頻率曲線上縱坐標取值 50%、84% 時對應的粒徑值； h 為平均水深)，其中淺水流動條件一般是指平均水深與床面粗糙度相當的明渠水流 (Cheng *et al.*, 2018)，如 $k_s/h > 0.1$ (Lu *et al.*, 2023)。希爾茲曲線作為最為經典的泥沙起動判別式，廣泛應用於大水深河流，如 $k_s/h < 0.1$ (Lu *et al.*, 2023)，但在淺水流動條件下，希爾茲曲線無法合理解釋臨界希爾茲數隨著相對粗糙度增大而增大的現象，此時希爾茲曲線的計算值與實測值存在較大偏差 (Armanini *et al.*, 2005; Gregoretti 2008)。從公式結構來看，希爾茲曲線為顆粒雷諾數的函數，在紊流粗糙區，臨界希爾茲數為一定值 (Shields 1936; Xu *et al.*, 2021)，而 Lau and Engel (1999) 通過量綱分析表明，淺水流動條件下臨界希爾茲數為顆粒雷諾數和相對粗糙度的函數，在紊流粗糙區，臨界希爾茲數隨相對粗糙度的變化而變化，因此，希爾茲曲線難以應用於淺水流動條件下的泥沙起動參數計算。從泥沙起動機理來看，臨界希爾茲數隨著相對粗糙度增大而增大的現象明顯有悖於常理，對此學者們提出了不同的見解，如 Recking (2008a) 認為床面相對粗糙度是造成二者差異的主要原因，Lamb (2008) 認為顆粒淹沒度、垂線流速分佈和湍流脈動強度是造成二者差異的主要原因，Lamb *et al.* (2017) 認為泥沙顆粒拖曳力係數和上舉力係數的變化是造成二者差異的主要原因，但目前尚未形成統一理論共識，這主要是由於影響淺水流動條件下泥沙起動的因素較多，如邊壁阻力、床面形態阻力、休止角、顆粒淹沒度、水流摻氣、阻力係數、垂線流速分佈和湍流脈動強度等 (Lamb, 2008)。目前，學者們主要通過經驗分析和理論推導，來建立淺水流動條件下的泥沙起動參數計算公式，以此來反映臨界希爾茲數隨著相對粗糙度增大而增大的現象，如 Mueller *et al.* (2005)、Lamb (2008)、Recking (2008a) 和 Recking (2009) 通過數據擬合方法，給出了淺水流動條件下泥沙起動參數的計算公式，Armanini *et al.* (2005)、Vollmer *et al.* (2006)、Gregoretti (2008)、Lamb (2008)、Recking (2009)、Prancevic *et al.* (2015)、Lamb *et al.* (2017)、Cheng *et al.* (2018) 和 Lu *et al.* (2023) 通過理論推導，建立了淺水流動條件下泥沙起動參數的計算公式，但公式中的諸

多假設限制了各計算公式的合理應用。此外，楊具瑞等 (2004)、何文社等 (2004)、吳岩等 (2012) 和李林林等 (2018) 採用大水深的水流條件，推導了泥沙起動條件計算公式，公式的實際應用條件為淺水流動條件，但各家公式在驗證時採用了不正確的實測資料，如採用陳奇伯等 (1996) 實測資料時存在水深引用錯誤，以及採用了有壓管道的實測資料，使公式出現了與實測資料符合良好的假像，實際上，各公式反映的泥沙起動規律與泥沙起動試驗結果相反，未能如實反映淺水流動條件下的泥沙起動規律。總的來說，由於淺水流動條件下的垂線平均流速分佈、泥沙顆粒拖曳力係數和泥沙顆粒上舉力係數等參數難以準確確定 (Lu *et al.*, 2023)，在一定程度上限制了泥沙起動條件的理論求解，因此，如何從其他理論角度推導泥沙起動條件是亟需解決的問題。

本文將建立新的淺水流動條件下泥沙起動參數計算公式。首先，在混合流速尺度輸沙率模型的基礎上，分別建立深水、淺水流動條件下的泥沙起動參數計算模型；其次，在輸沙率和床面阻力係數研究的基礎上，分別建立深水、淺水流動條件下的臨界無量綱輸沙率和臨界床面阻力係數計算公式；然後，在深水、淺水流動條件下泥沙起動參數計算模型的基礎上，建立淺水流動條件下的泥沙起動參數計算公式；最後，採用水槽實測數據和野外實測數據對本文公式進行驗證。

二、基於混合流速尺度的輸沙率模型

基於 Bagnold 的水流功率理論 (Bagnold, 1973)，Lu *et al.* (2023) 建立了維持泥沙顆粒運動 (躍移或懸浮) 的水流做功運算式：

$$W = (\rho_s - \rho)ghC_v w \dots\dots\dots(1)$$

式中， W 為維持泥沙顆粒運動的水流做功； ρ_s 為顆粒密度； ρ 為流體密度； g 為重力加速度； h 為平均水深； C_v 為以體積計的泥沙顆粒濃度； w 為泥沙顆粒沉速。

同時，Lu *et al.* (2023) 引入了以下參數或假設：

(1) 在單位面積單位時間內水流所提供的勢能為：

$$W' = \tau_b U = \rho u_*^2 U \dots\dots\dots(2)$$

式中， W' 為單位面積單位時間內水流所提供的勢能； τ_b 為床面切應力； U 為平均流速； u_* 為摩阻流速。

(2) Einstein 的無量綱輸沙率參數：

$$\Phi = \frac{g_b}{\sqrt{g'DD}} = \frac{hC_v u_s}{\sqrt{g'DD}} \dots\dots\dots(3)$$

式中， Φ 為無量綱輸沙率； g_b 為以體積計的推移質輸沙率； $g' = g(\rho_s - \rho)/\rho$ ； D 為泥沙顆粒粒徑； u_s 為泥沙顆粒的運動速度。

(3) 假定推移質泥沙顆粒運動受整個斷面水流的影響，泥沙顆粒運動速度可表示為：

$$u_s \propto U \quad \text{.....(4)}$$

式中，“ $\propto$ ”表示成比例。

式 (4) 適用於不同相對粗糙度條件下的泥沙顆粒運動速度計算。

(4) 當忽略黏滯力的影響時，泥沙顆粒沉降速度可表示為：

$$w \propto \sqrt{g'D} \quad \text{.....(5)}$$

在上述研究基礎上，Lu *et al.* (2023) 將式 (2)–式 (5) 帶入式 (1) 得到了基於混合流速尺度的輸沙率模型：

$$\Phi \propto \left(\frac{u_* U}{g'D} \right)^2 = \zeta^2 \quad \text{.....(6)}$$

式中， $\zeta = \frac{u_* U}{g'D}$ 為混合流速尺度參數。在下文理論推導過程中，未對式 (6) 的混合流速尺度參數的指數進行率定，這與 Lu *et al.* (2023) 的研究成果存在本質區別。

三、泥沙起動參數模型的推導

混合流速尺度參數可進一步表示為 (Lu *et al.*, 2023)：

$$\zeta = \theta \sqrt{\frac{8}{f}} \quad \text{.....(7)}$$

式中， θ 為希爾茲數， $\theta = \frac{u_*^2}{g'D}$ ； f 為達西-韋斯巴赫

阻力係數， $f = 8 \frac{u_*^2}{U^2}$ 。

將式 (7) 帶入式 (6) 可得：

$$\Phi \propto \Phi_c^{1/2} f^{1/2} \quad \text{.....(8)}$$

當泥沙顆粒處於起動狀態時，式 (8) 可轉化為：

$$\Phi_c \propto \Phi_c^{1/2} f_c^{1/2} \quad \text{.....(9)}$$

式中，下標“ c ”表示泥沙起動狀態時的參數。對於大水深條件，式 (9) 可轉化為：

$$\Theta_{h,c} \propto \Phi_{h,c}^{1/2} f_{h,c}^{1/2} \quad \text{.....(10)}$$

式中， $\Theta_{h,c}$ 為大水深條件下的臨界希爾茲數； $\Phi_{h,c}$ 為大水深條件下的臨界無量綱輸沙率； $f_{h,c}$ 為大水深條件下的臨界達西-韋斯巴赫阻力係數。

在淺水流動條件下，式 (9) 可轉化為：

$$\Theta_{s,c} \propto \Phi_{s,c}^{1/2} f_{s,c}^{1/2} \quad \text{.....(11)}$$

式中， $\Theta_{s,c}$ 為淺水條件下的臨界希爾茲數； $\Phi_{s,c}$ 為淺水條件下的臨界無量綱輸沙率； $f_{s,c}$ 為淺水條件下的臨界達西-韋斯巴赫阻力係數。

四、臨界無量綱輸沙率的確定

在泥沙起動研究中，泥沙起動定量標準主要可分為推移質輸沙率標準、起動概率標準、顆數計標準、推移質取樣標準等，本文採用 Parker *et al.* (1982) 提出的無量綱輸沙率標準：

$$W_* = \frac{\Phi}{\theta^{1.5}} \quad \text{.....(12)}$$

式中， W_* 為 Parker *et al.* (1982) 提出無量綱輸沙率參數。

根據 Shih and Diplas (2018)、Cheng *et al.* (2020) 和 Xu *et al.* (2022) 的研究成果，Einstein 的無量綱輸沙率可表示為：

$$\Phi = P\Phi_m = kP\theta^n \quad \text{.....(13)}$$

式中， P 為泥沙起動概率； Φ_m 為泥沙起動概率 $P=1$ 時的無量綱輸沙率； k 為常數係數； n 為水流強度指數。

在輸沙強度較高時，泥沙起動概率 $P=1$ ，式 (13) 可變化為：

$$\Phi = \Phi_m = k\theta^n \quad \text{.....(14)}$$

在大水深條件下，採用 Paintal (1971) 和 Taylor and Vanoni (1972) 的水槽實測資料，Wang *et al.* (2008) 整理的 Meyer-Peter and Muller (1948) 和 Einstein

(1942) 水槽資料, Meng *et al.* (2016) 整理的 Gilbert (1914)、Wilson (1966) 和 Roseberry *et al.* (2012) 等水槽資料, 以及孟震 (2015) 的水槽資料對式 (14) 進行率定, 見圖 1, 參數 $k = 13$, $n = 1.5$, 與 Wang *et al.* (2008)、Cheng *et al.* (2020) 和 Lu *et al.* (2023) 取值一致。上述實測資料為經典的大水深實測資料。

在淺水流動條件下, 採用 Smart (1984)、Aziz *et al.* (1989)、楊勝發等(2006)、Reking *et al.* (2008b) 和 Ali *et al.* (2012) 的水槽資料對式 (14) 進行率定, 見圖 2, 參數 $k = 5.5$, $n = 1.5$, 水流強度指數與大水深條件一致。上述實測資料為經典的淺水條件實測資料。

由圖 1 和圖 2 可知, Einstein 的無量綱輸沙率統一公式可表示為 (大水深和淺水條件):

$$\Phi = P\Phi_m = kP\Theta^{1.5} \dots\dots\dots(15)$$

將式 (15) 帶入式 (12), 可得泥沙起動標準的統一公式可表示為:

$$W_* = kP \dots\dots\dots(16)$$

當取同一泥沙起動概率時, Parker *et al.* (1982) 提出無量綱輸沙率參數可取為常數, 則臨界無量綱輸沙率的統一公式可表示為:

$$\Phi_c \propto \Theta_c^{1.5} \dots\dots\dots(17)$$

在大水深條件下, 臨界無量綱輸沙率可表示為:

$$\Phi_{h,c} \propto \Theta_{h,c}^{1.5} \dots\dots\dots(18)$$

在淺水流動條件下 臨界無量綱輸沙率可表示為:

$$\Phi_{s,c} \propto \Theta_{s,c}^{1.5} \dots\dots\dots(19)$$

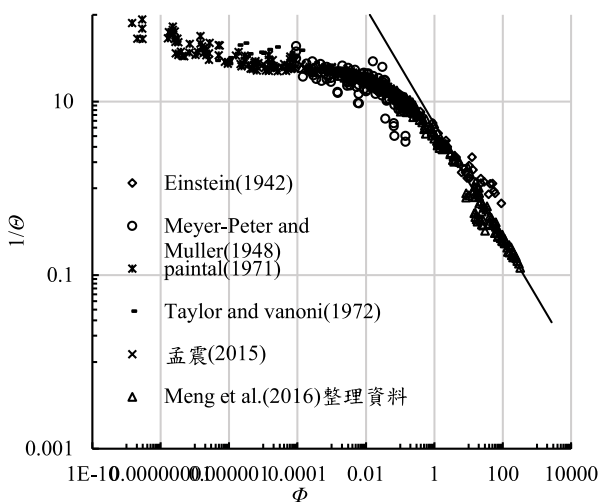


圖 1 大水深條件下式 (14) 的率定

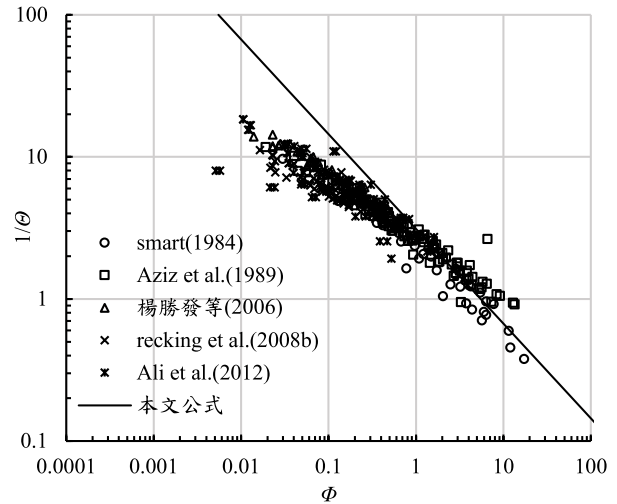


圖 2 淺水條件下式 (14) 的率定

五、臨界床面阻力係數的確定

在大水深條件下, 床面阻力係數可採用 Manning-Strickler 公式進行計算:

$$f_h = 8s_t^2 \left(\frac{k_s}{h} \right)^{1/3} \dots\dots\dots(20)$$

式中, f_h 為大水深條件下的達西-韋斯巴赫阻力係數; s_t 為斯特裏克勒係數, $s_t = 0.12$ 。

基於大粗糙尺度條件下的水流收縮特性, Cheng (2017) 給出了適用於大、中和小相對粗糙度條件下的床面阻力係數的計算公式:

$$f_s = f_h \left(1 + 0.75 \frac{k_s}{h} \right)^2 \dots\dots\dots(21)$$

式中, f_s 為淺水流動條件下的達西-韋斯巴赫阻力係數。實際上, 式 (21) 同時適用於淺水和大水深條件下的床面阻力係數計算。

在確定臨界床面阻力係數時, 可採用泥沙起動狀態時的式 (20) – 式 (21) 來計算。

六、淺水流動條件下泥沙起動參數公式的建立

將式 (18) – 式 (19) 分別帶入式 (10) – 式 (11), 可得:

$$\Theta_{h,c} \propto \Theta_{h,c}^{3/4} f_{h,c}^{1/2} \dots\dots\dots(22)$$

$$\Theta_{s,c} \propto \Theta_{s,c}^{3/4} f_{s,c}^{1/2} \dots\dots\dots(23)$$

式 (22) – 式 (23) 可進一步轉化為：

$$\Theta_{h,c} \propto f_{h,c} \dots\dots\dots(24)$$

$$\Theta_{s,c} \propto f_{s,c} \dots\dots\dots(25)$$

將泥沙起動時的式 (20) – 式 (21) 分別帶入式 (24) – 式 (25)，並由式 (24) – 式 (25) 可得：

$$\frac{\Theta_{s,c}}{\Theta_{h,c}} = \frac{f_{s,c}}{f_{h,c}} = \left(1 + 0.75 \frac{k_s}{h}\right)^2 \dots\dots\dots(26)$$

由式 (26) 的推導過程來看，式 (26) 無需採用淺水流動條件下的臨界希爾茲數進行率定。

鑒於各條件下臨界無量綱輸沙率的公式結構一致，且式 (21) 同時適用於淺水和大水深條件下的床面阻力係數計算，實際上式 (26) 可適用於不同相對粗糙度條件下泥沙起動參數的計算。

Chiew and Parker (1994) 和 Lau and Engel (1999) 採用滑動起動模式，得到：

$$\Theta_{h,c} = \Theta_c \frac{(\tan \phi \cos \psi - \sin \psi)}{\tan \phi} = \Theta_c \frac{\tan \phi - \tan \psi}{\tan \phi \sqrt{1 + (\tan \psi)^2}} \dots\dots\dots(27)$$

式中， Θ_c 為大水深臨界希爾茲數的特例，即緩坡臨界希爾茲數，由希爾茲曲線進行計算； ϕ 為休止角， 55° ； ψ 為床面坡度。

將式 (27) 帶入式 (26)，可得：

$$\Theta_{s,c} = \Theta_c \frac{\tan \phi - \tan \psi}{\tan \phi \sqrt{1 + (\tan \psi)^2}} \left(1 + 0.75 \frac{k_s}{h}\right)^2 \dots\dots\dots(28)$$

式 (28) 為淺水流動條件下泥沙起動參數計算公式，實際上式 (28) 可適用於不同相對粗糙度條件下泥沙起動參數的計算。由希爾茲參數可知：

$$\Theta_{s,c} = \frac{Jh}{aD} = \frac{Jh}{ak_s} \dots\dots\dots(29)$$

式中， $a = \rho_s/\rho - 1$ ； J 為水力坡度，均勻流時， $J = \tan \psi$ 。

當消去相對粗糙度時，採用式 (29)，可將式 (28) 可轉化為：

$$\Theta_{s,c} = \Theta_c \frac{\tan \phi - \tan \psi}{\tan \phi \sqrt{1 + (\tan \psi)^2}} \left(1 + 0.75 \frac{J}{a\Theta_{s,c}}\right)^2 \dots\dots\dots(30)$$

當消去床面坡度時，採用式 (29)，可將式 (28) 可轉化為：

$$\Theta_{s,c} = \Theta_c \frac{\tan \phi - \Theta_{s,c} a \frac{k_s}{h}}{\tan \phi \sqrt{1 + \left(\Theta_{s,c} a \frac{k_s}{h}\right)^2}} \left(1 + 0.75 \frac{k_s}{h}\right)^2 \dots\dots(31)$$

式 (30) – 式 (31) 可適用於不同相對粗糙度條件下泥沙起動參數的計算。

七、公式的驗證

採用水槽試驗數據 [Suszka (1991) 的實測資料，及其收集的 USWES (1935)、Ho (1939) 和 Cao (1985) 實測資料；Shvidchenk and Pender (2000a; 2000b) 的實測資料，及其收集的 Mizuyama (1977)、Bathurst *et al.* (1985) 和 Suszka (1987) 實測資料；Gregoretti (2008) 實測資料；Recking (2006; 2008a) 實測資料；Prancevic *et al.* (2014; 2015) 實測資料] 及野外實測數據 [Mueller (2005) 實測資料] 對式 (30) 進行了驗證。同時，繪製了 Θ_c 分別為 0.015、0.035 和 0.055 時，臨界希爾茲數 ($=\Theta_{s,c}$) 與坡度正切 ($=\tan \psi$) 的關係曲線 [式 (30)]，並與 Mueller 公式 (Mueller, 2005)、Lamb 公式 (Lamb, 2008)、Recking 公式 (Recking, 2008a; 2009) 進行了對比，見圖 3。

由圖 3 可知， Θ_c 為 0.035 時，式 (30) 與水槽試驗數據、野外試驗數據均符合良好，而其他公式與實測值均存在一定偏差； Θ_c 為 0.015 和 0.055 時，式 (30)

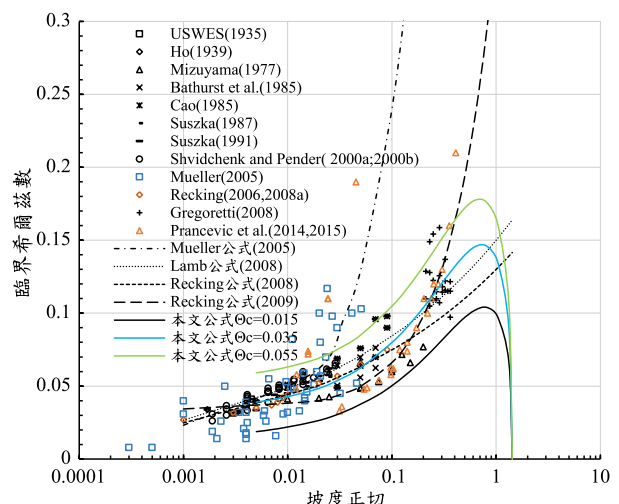


圖 3 泥沙起動條件公式 (30) 的驗證

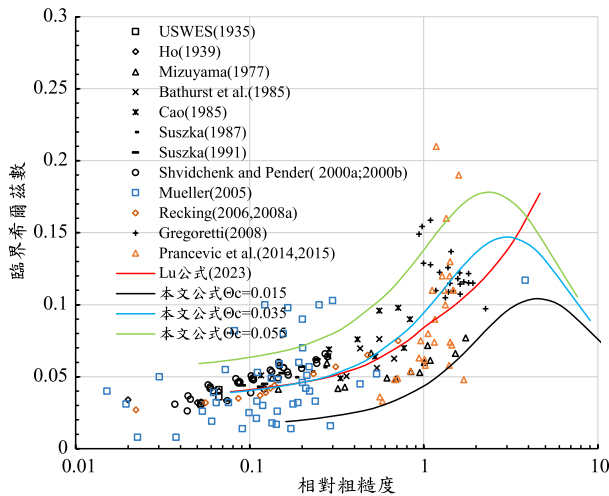


圖 4 泥沙起動條件公式 (31) 的驗證

為試驗數據的上下包絡線， θ_c 為 0.035 時，式 (30) 為試驗數據的平均曲線。在床面坡度趨近於平坡時，臨界希爾茲數趨近於定值，與紊流粗糙區的希爾茲曲線預測值相對應；隨著床面坡度的增大，臨界希爾茲數逐漸增大，在床面坡度趨近於休止角時，臨界希爾茲數趨近於 0，此時已無法形成穩定床面。整體而言，本文式 (30) 如實的反映了臨界希爾茲數隨床面坡度的變化規律。

為進一步驗證本文公式，繪製了 θ_c 分別為 0.015、0.035 和 0.055 時，臨界希爾茲數 ($=\theta_{s,c}$) 與相對粗糙度 ($=k_s/h$) 的關係曲線 [式 (31)]，並與 Lu 公式 (Lu *et al.*, 2023) 進行了對比，見圖 4。

由圖 4 可知， $\theta_c = 0.035$ 時，式 (31) 與水槽試驗數據、野外試驗數據均符合良好，而 Lu 公式在相對粗糙度較大時與實測值存在一定偏差； θ_c 為 0.015 和 0.055 時，式 (31) 為試驗數據的上下包絡線， θ_c 為 0.035 時，式 (31) 為試驗數據的平均曲線。隨著相對粗糙度的減小，臨界希爾茲數趨近於定值，同樣與紊流粗糙區希爾茲曲線的預測值相對應；隨著相對粗糙度的增大，臨界希爾茲數先逐漸增大後迅速減小，同樣此時已無法形成穩定床面。主要原因在於，相對粗糙度隨著床面坡度的增大而增大 (Cheng *et al.*, 2018)，二者的變化規律具有一致性，因此，臨界希爾茲數隨相對粗糙度或床面坡度的變化規律相一致。整體而言，本文式 (31) 如實的反映了臨界希爾茲數隨相對粗糙度的變化規律。

八、討論

上述理論推導均是針對均勻沙而言的，鑒於均勻

沙與非均勻沙的區別，如相較於均勻沙，非均勻沙細顆粒比均勻沙更難起動，非均勻沙粗顆粒比均勻沙更容易起動，在採用式 (28)、式 (30)、式 (31) 計算非均勻沙臨界希爾茲數時，需對公式進行一定的修正。本文的主要目的是建立均勻沙的臨界希爾茲數計算公式，顯然以嚴格的方法來建立非均勻沙的臨界希爾茲數計算公式超出了本文的研究範疇。因此，下文將簡單介紹在計算非均勻沙臨界希爾茲數時，本文公式將如何修正。

在建立非均勻沙臨界希爾茲數時，一般採用兩種方法，一是，直接進行理論推導，二是，在均勻沙研究的基礎上，採用參數進行修正。對於第一種方法，需確定較多參數，如泥沙顆粒拖曳力係數、泥沙顆粒上舉力係數和斷面垂線平均流速等，但限於目前研究水準，參數的準確確定存在一定的困難 (Lu *et al.*, 2023)，因此，目前非均勻沙臨界希爾茲數計算公式多採用第二種方法。對於本文公式的修正，下文將提供兩種方法，其一，是修正式 (30)、式 (31) 的泥沙顆粒休止角 (Lamb, 2008)，休止角運算式為：

$$\phi = \cos^{-1} \left[\frac{D/k_s + z_*}{D/k_s + 1} \right] \dots\dots\dots (32)$$

式中， z_* 為可移動泥沙顆粒的底部的平均高度，天然沙取 $z_* = -0.02$ (Lamb, 2008)；其他符號同上。在計算過程中，床面粗糙度 k_s 可取為 D_{50} ，顯然式 (32) 可反應非均沙的遮蔽作用，如休止角中參數 D/k_s 。其二，是修正式 (28)、式 (31) 的相對粗糙度 (Cheng *et al.*, 2018)，相對粗糙度運算式為：

$$k_s = \sigma_g^{2.33} D_{50} \dots\dots\dots (33)$$

式中， σ_g 為泥沙的非均勻係數，即非均勻沙的幾何標準偏差；其他符號同上。均勻沙與非均勻沙的區別主要由泥沙非均勻係數來反映。同時，在式 (33) 的基礎上，可同步修正大水深臨界希爾茲數 $\theta_{h,c}$ ，如採用 Wiberg and Smith (1987) 的臨界希爾茲數計算公式。上述主要提供了兩種修正思路，對於修正後公式的適用性，需進一步收集淺水流動條件下非均勻沙的臨界希爾茲數實測資料進行驗證，而這也是進一步需要開展的研究工作。

九、結論

淺水流動條件一般出現在山區河流，其具有大比降和大相對粗糙度的特徵，泥沙起動規律不同於緩坡

河道的大水深流動，致使經典的希爾茲曲線難以直接應用於淺水流動條件。本文建立了新的淺水流動條件下均勻沙起動臨界希爾茲參數計算公式，公式可同時適用於深水、淺水流動條件。本文公式的建立主要是基於混合流速尺度輸沙率模型、臨界無量綱輸沙率公式和臨界床面阻力係數公式，克服了以往研究需在受力平衡分析中引入垂線流速分佈、泥沙顆粒拖曳力係數和泥沙顆粒上舉力係數的難題。經水槽實測資料、野外實測資料及其它經典泥沙起動參數公式的對比表明，當 $\theta_c = 0.035$ 時，本文公式與水槽試驗數據、野外試驗數據均符合良好，而其他公式與實測值均存在一定偏差； θ_c 為 0.015、0.035 和 0.055 時，本文公式分別為試驗數據的下包絡線、平均曲線和上包絡線。

致謝

本論文承蒙以下基金計畫經費資助與技術支援：國家自然科學基金資助專案(National Natural Science Foundation of China, NO. U2243218)；河南省重大科技專項資助專案 (the Major Project of Science and Technology in Henan Province, NO. 231100320100)；中央級公益性科研院所基本科研業務費專項 (Special Fund for Basic Scientific Research by Central Public Interest Research Institutes, NO. HKY-JBYW-2023-18)。謹致謝忱。

參考文獻

1. Ali, M., Sterk, G., Seeger, M., Boersema, M., Peters, P., "Effect of Hydraulic Parameters on Sediment Transport Capacity in Overland Flow Over Erodible Beds," *Hydrology and Earth System Sciences*, Vol.16, No.2, pp.591-601, 2012.
2. Armanini, A., Gregoretti, C., "Incipient Sediment Motion at High Slopes in Uniform flow Condition," *Water Resources Research*, Vol.41, pp.W12431, 2005.
3. Aziz, N.M., Scott, D.E., "Experiments on Sediment Transport in Shallow Flows in High Gradient Channels," *Hydrological Sciences Journal*, Vol.34, No.4, pp.465-478, 1989.
4. Bagnold, R.A., "The Nature of Saltation and of Bed-load Transport in Water," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, Vol.332, No.1591, pp.473-504, 1973.
5. Bathurst, J.C., "Flow Resistance Estimation in Mountain Rivers," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.111, No.4, pp.625-643, 1985.
6. Cao, H.H., "Resistance Hydraulique d'un lit à Gravier Mobile à Pente Raide; étude Expérimentale," PhD Thesis, Lausanne: Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, 1985.
7. Cheng, N.S., Tang, H.W., Yan, J., "Low-submergence Effect on Incipient Sediment Motion," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.144, No.12, pp.04018111, 2018.
8. Cheng, N.S., Lu, Y.S., Wei, M.X., "Simple Formulation of Bedload Sediment Transport Rate Based on Novel Definition of Pickup Probability," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.146, No.9, pp.06020012, 2020.
9. Cheng, N.S., "Simple Modification of Manning-Strickler Formula for Large-scale Roughness," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.143, No.9, pp.04017031, 2017.
10. Chiew, Y.M., Parker, G., "Incipient Sediment Motion on Non-horizontal Slopes," *Journal of Hydraulic Research*, Vol.32, No.5, pp.649-660, 1994.
11. Einstein, H.A., "Formulas for the Transportation of Bed Load," *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, Vol.107, No.1, pp.561-577, 1942.
12. Gilbert, G.K., "The Transportation of Debris by Running Water," Washington, D.C.: Geological Survey (U.S.), 1914.
13. Gregoretti, C., "Inception Sediment Transport Relationships at High Slopes," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.134, No.11, pp.1620-1629, 2008.
14. Ho, P.Y., "Abhängigkeit der Geschiebebewegung von der Kornform und der Temperatur," [In German.] Berlin: Mitteilungen der Preussischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, 1939.
15. Lamb, M.P., "Is the Critical Shields Stress for Incipient Sediment Motion Dependent on Channel-bed Slope?," *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, Vol.113, pp.F02008, 2008.
16. Lamb, M.P., Brun, F., Fuller, B.M., "Direct Measurements of Lift and Drag on Shallowly Submerged Cobbles in Steep Streams: Implications for Flow Resistance and Sediment Transport," *Water Resources Research*, Vol.53, pp.WR020883, 2017.
17. Lau, Y.L., Engel, P., "Inception of Sediment Transport

- on Steep Slopes,” *Journal of Hydraulic Research*, Vol.125, pp.544-547, 1999.
18. Lu, C.X., Cheng, N.S., Lu, Y.S., “Prediction of Critical Shields Number for Incipient Sediment Motion in Shallow Flows,” *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.149, No.9, pp.04023061, 2023.
19. Meng, Z., Li, D.X., Wang, X.K., “Modification of the Engelund Bed-load Formula,” *International Journal of Sediment Research*, Vol.31., No.3, pp.251-256, 2016.
20. Meyer-Peter, E., Muller, R., “Formulas for Bed-load Transport,” *Stockholm: IAHR, Proceedings of the Second Meeting of International Association for Hydraulic Research*, Vol.3, pp.39-64, 1948.
21. Mizuyama, T., “Bedload Transport in Steep Channels,” Ph.D. thesis, Kyoto: Kyoto Univ, 1977.
22. Mueller, E.R., “Variation in the Reference Shields Stress for Bed Load Transport in Gravel-bed Streams and Rivers,” *Water Resources Research*, Vol.41, pp.W04006, 2005.
23. Paintal, A.S., “A Stochastic Model of Bed Load Transport,” *Journal of Hydraulic Research*, Vol.9, No.4, pp.527-554, 1971.
24. Parker, G., Klingeman, P.C., Mclean, D.L., “Bedload and Size Distribution in Paved Gravel-bed Streams,” *Journal of the Hydraulics Division*, Vol.108, No.4, pp.544-571, 1982.
25. Prancevic, J.P., Lamb, M.P., Fuller, B.M., “Incipient Sediment Motion Across the River to Debris-flow Transition,” *Geology*, Vol.42, No.3, pp.191-194, 2014.
26. Prancevic, J.P., Lamb, M.P., “Unraveling Bed Slope from Relative Roughness in Initial Sediment Motion,” *Journal of Geophysical Research Earth Surface*, Vol.120, No.3, pp.474-489, 2015.
27. Recking, A., “An Experimental Study of Grain Sorting Effects on Bedload”, the degree of Doctor in Sciences Speciality, Lyon: Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2006.
28. Recking, A., “Variation du Nombre de Shields Critique Avec la Pente,” *La Houille Blanche*, Vol.94, No.5, pp.59-63, 2008a.
29. Recking, A., Frey, P., Paquier, A., Belleudy, P., Champagne, J.Y., “Bed-load Transport Flume Experiments on Steep Slopes,” *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.134, No.9, pp.1302-1310, 2008b.
30. Recking, A., “Theoretical Development on the Effects of Changing Flow Hydraulics on Incipient Bed Load Motion,” *Water Resources Research*, Vol.45, pp.W04401, 2009.
31. Roseberry, J.C., Schmeeckle, M.W., Furbish, D.J., “A Probabilistic Description of the Bed-load Sediment Flux: 2. Particle Activity and Motions”, *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, Vol.117, pp.F03032, 2012.
32. Shields, A., “Anwendung Der Aenlichkeitsmechanik Und der Turbulenzforschung auf die Geschiebebewegung”, *Mitteilungen der Preussischen Versuchsanstalt fur Wasserbau und Schiffsbau No. 26*. Translated by W. P. Ott and J. C. van Uchelen. Pasadena, CA: California Institute of Technology, 1936.
33. Shih, W.R., Diplas, P., “A Unified Approach to Bedload Transport Description Over a Wide Range of Flow Conditions Via the Use of Conditional Data Treatment,” *Water Resources Research*, Vol.54, No.5, pp.3490-3509, 2018.
34. Shvidchenko, A.B., Pender, G., “Flume Study of the Effect of Relative Depth on the Incipient Motion of Coarse Uniform Sediments,” *Water Resources Research*, Vol.36, No.2, pp.619-628, 2000a.
35. Shvidchenko, A.B., Pender, G., “Initial Motion of Streambeds Composed of Coarse Uniform Sediments,” *Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Water and Maritime Engineering*, Vol.142, No.4, pp.217-227, 2000b.
36. Smart, G.M., “Sediment Transport Formula for Steep Channels,” *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.110, No.3, pp.267-276, 1984.
37. Suszka, L., “Modification of Transport Rate Formula for Steep Channels”, In: Armanini A and Silvio G D. *Fluvial hydraulics of mountain regions*. Berlin: Springer, 1991.
38. Taylor, B.D., Vanoni, V.A., “Temperature Effects In Low-transport, Flat-bed Flows,” *Journal of the Hydraulics Division*, Vol.98, No.8, pp.1427-1445, 1972.
39. USWES (US Waterways Experimental Station), “Study of River-bed Material and Their Use with Special Reference to the Lower Mississippi River,” Paper 17. Vicksburg, MS: USWES, 1935.
40. Vollmer, S., Kleinhans, M.G., “Predicting Incipient Motion, Including the Effect of Turbulent Pressure Fluctuations in the Bed,” *Water Resources Research*, Vol.43, pp. W05410, 2007.

41. Wang, X.K., Zheng, J., Li, D.X., Qu, Z.S., "Modification of the Einstein Bed-load Formula," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.134, No.9, pp.1363-1369, 2008.
42. Wiberg, P.L., Smith, J.D., "Calculations of the Critical Shear Stress for Motion of Uniform and Heterogeneous Sediments," *Water Resources Research*, Vol.23, No.8, pp.1471-1480, 1987.
43. Wilson, K.C., "Bed-load Transport at High Shear Stress," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.92, No.6, pp.49-59, 1966.
44. Xu, X.Y., Zhang, G.G., Zhou, S., "Incipient Motion Velocity of Sediment Based on the Vertical Distribution Characteristics of Bed Sediment Position," *Journal of Taiwan Agricultural Engineering*, Vol.67, No.4, pp.102-109, 2021.
45. Xu, X.Y., Zhang, G.G., Zhou, S., "Power Law Function Model of Bed Load Transport Rate and its Application," *Journal of Taiwan Agricultural Engineering*, Vol.68, No.4, pp.80-90, 2022.
46. 何文社、曹叔尤、袁傑、戴會超：「斜坡上非均勻沙起動條件初探」，水力發電學報，第4期，pp.78-81+87，2004。
47. 吳岩、韓其為、白玉川：「斜坡上非均勻沙分組起動流速」，天津大學學報，第45卷第3期，pp.209-214，2012。
48. 李林林、張根廣、王愉樂：「任意坡面上均勻沙起動概率及起動流速的計算公式」，泥沙研究，第43卷第3期，pp.38-43，2018。
49. 孟震：「推移質運動基本規律研究」，清華大學博士學位論文，2015。
50. 楊具瑞、曹叔尤、方鐸、盧振愛、劉興年、李桂芬：「坡面非均勻沙起動規律研究」，水力發電學報，第3期，pp.102-106，2004。
51. 楊勝發、周華君、王興奎：「大比降卵礫石河流輸沙率試驗研究」，水動力學研究與進展 (A 輯)，第5期，pp.672-678，2006。
52. 陳奇伯、解明曙、張洪江：「三峽壩區非粘性均勻花崗岩砂粒起動條件研究」，人民長江，第7期，pp.13-14+47，1996。

收稿日期：民國 114 年 01 月 06 日
修改日期：民國 114 年 04 月 23 日
接受日期：民國 114 年 05 月 19 日