

推導部分貫穿井於三維非等向含水層近似解析解之研究

SEMI-ANALYTICAL SOLUTION OF A PARTIALLY PENETRATING WELL IN A THREE-DIMENSIONAL ANISOTROPIC AQUIFER

國立臺灣大學土木工程學系
博士後研究

吳詩晴
Shih-Ching Wu

國立臺灣大學氣候天氣災害研究中心
專案計畫助理研究員

柯凱元*
Kai-Yuan Ke

台塑塑膠工業股份有限公司土水組
高工師

林賢宗
Hsien-Tsung Lin

台塑塑膠工業股份有限公司土水組
組長

莊見財
Chien-Tsai Chuang

摘要

含水層地質特性的調查是瞭解地下水流通特性的重要工作，先前專家學者主要針對完全貫穿井之二維均質、非等向(X-Y 軸水文參數)或三維均質、非等向性(X-Z 軸，將 K_{xx} 及 K_{yy} 以水平 K 水力傳導係數表示之)推求解析解，而本研究針對地下水三維拘限含水層中，水文地質假設均質、非等向性之部分貫穿井地下水方程式，利用高斯-拉建德數值積分計算 Hantush 井函數(廣義性不完全 Gamma 函數)，進行推導三維度不同時間抽水之地下水洩降變化近似解析解，提高解析解之精確性。結果顯示高斯點位越多情況，精確性較高，然而，綜合考量數值運算效率及精確度，高斯點位採取 32 點座標計算最為妥適，並據以推求不同 u 、 Xn/L 之對應 Hantush 函數值及 Hantush 函數解析解適用範圍。針對定量抽水探討拘限含水層內抽水井井篩不同深度在非等向、均質之水文地質條件下，洩降水位變化情形，結果顯示抽水井開篩中段洩降水位較大。

關鍵詞：Hantush 井函數、部分貫穿井、高斯-拉建德數值積分。

* 通訊作者，國立臺灣大學氣候天氣災害研究中心專案計畫助理研究員
台北市大安區舟山路 158 號，kent0115@gmail.com

SEMI-ANALYTICAL SOLUTION OF A PARTIALLY PENETRATING WELL IN A THREE-DIMENSIONAL ANISOTROPIC AQUIFER

Shih-Ching Wu

National Taiwan University
Department of Civil Engineering

Kai-Yuan Ke*

National Taiwan University
Center of Weather Climate and
Disaster Research

Hsien-Tsung Lin

Formosa Plastics Corporation
Soil/GW Management Group

Chien-Tsai Chuang

Formosa Plastics Corporation
Soil/GW Management Group

ABSTRACT

Investigation of hydrological property of the aquifer is a key work in groundwater modeling. Previous research focused on 2D or 3D fully penetrated wells in anisotropic confined aquifers to derive the analytical of horizontal hydraulic conductivity, *i.e.* K_{xx} and K_{yy} . This paper demonstrates a new semi-analytical solution for the pumping-drawdown response of the partially penetrating well, situated in the homogenous and anisotropic 3D confined aquifer via Gauss-Legendre Quadrature and Hantush well function (Generalized Incomplete Gamma Function) in order to increase the precision of the solution. The results show more Gauss points lead to higher precision. However, considering the modeling efficiency, 32 Gauss points is applied to assess what range is best for Hantush well function and associated analytical solution with different u and X_n/L . Finally, the pumping test of screen opening at different depth for the homogenous, anisotropic confined aquifer is investigated. Results show the drawdown is highest with opening in the middle section.

Keywords: Hantush well function, Partially penetrating well, Gauss-legendre quadrature.

一、前言

地下水為全世界許多國家重要飲用水資源之一，其中除維持人類生活，亦維持生態、氣候調節作用，因此許多專家學者針對地下水開發利用、環境保育議題進行研究。倘若掌握整體地下水水流分布、開發地下水量及污染傳輸情形，需掌握水文地質特性及參數，藉由相關參數提供地下水數學、數值模式中，可以提供分析者所需關切議題及未來趨勢。在自然現實情況中，水文地質皆為異質等特性，因此許多專家利用數學解析解進行水文參數推估或描述抽水時的地下水位洩降變化值，其中 Theis (1935) 依據熱流理論為基礎，地下水流可由達西定律(Darcy's law)(Henry Darcy, 1856)描述，假設在無限延伸之均質、等向性拘限含水層中，發展出泰斯公式(Theis' equation)，並與曲線法結合推估參數，做為描述含水層特性的依據。Papadopoulos (1965) 利用拉普拉斯 (Pierre-Simon marquis de Laplace) 轉換(Laplace Transform)與傅立葉 (Jean Baptiste Joseph Fourier) 轉換(Fourier Transform)對均質、非等向性以完全貫穿井之微分方程推導解析近似解，在抽水試驗分析時，利用三口觀測洩降-時間資料，並於傳統的直線法、曲線法與解析近似解即可用來估計非均質地層的有效流通係數與有效儲水係數；Week (2004)、Heilweil (2006) 利用 Papadopoulos (1965) 解析解推估煤炭層、斷層破碎帶之含水層特性；Jang *et al.* (2008) 依據相關 Papadopoulos (1965) 解析解推求 921 地震前後含水層特性是否產生改變，研究指出當發生地震後其有效流通係數與方向性均改變；Lin *et al.* [2010] 則利用類神經結合 Papadopoulos (1965) 解析解應用於水文參數推估，提早反向參數推估之精確性，上述利用 Papadopoulos (1965) 解析解主要假設二維拘限含水層中，抽水井及觀測井假設完全貫穿井進行抽水試驗，然現實情況中，抽水井及觀測井開闢情況不全然為完全貫井，因此求解或逆推估參數當中，將產生誤差值。另外，在均質、非等向性之部分貫穿井推導部分，Hantush (1961c) 主要針對 X-Z 軸方向，於拘限含水層之均質、非等向性進行理論推導，而 Mansur and Dietrich [1965] 則假設穩態情況下針對 X-Z 水力傳導係數進行推估，另外許多專家將三維拘限含水層水文地質特性假設為水平向 K (將 K_{xx} 及 K_{yy} 以水平 K 水力傳導係數代表之) 及垂直向 K_z 簡化方式進行推求解 [Hantush, 1966a Weeks, 1969; Way and McKee, 1982]，鮮少研究針對地下水三維空間、均質、非等向性(K_{xx} 、 K_{yy} 、 K_{xy} 及 K_{zz}) 之部分貫穿井於拘限含水層中進行推導解

析解及討論水文參數推估等資訊。

因此本研究主要針對地下水三維拘限含水層中，水文地質假設均質、非等向性(K_{xx} 、 K_{yy} 、 K_{xy} 及 K_{zz}) 之部分貫穿井地下水方程式，其中利用拉普拉斯正逆轉換、傅立葉正逆轉換及有限傅立葉轉換推求三維水位隨抽水量變化之洩降解析解，其中所推得解析解當中，Hantush 井函數(Hantush Well Function)稱為廣義性不完全 Gamma 函數，許多專家針對此部分進行研究分析 [Hantush and Jacob, 1955; Hunt, 1977、1978; Wilson and Miller 1978、1979; Prodanoff *et al.* 2006]，以提高 Hantush 井函數推估精確性，其中方法為級數展開 (series expansions)、漸進式展開 (asymptotic expansions)、Chebyshev 多項式 (Chebyshev polynomials)、遞迴關係式 (Recurrence relations)、數值積分 (numerical quadrature)。Tseng 與 Lee (1998) 及 Barry (2000) 指出上述方法中，數值積分係為便利、快速、可精確性推求廣義性不完全 Gamma 函數值，然此方法運算中不完全然皆可適用。因此本研究推求三維部分貫穿井、非等向性之解析解中，Hantush 井函數則利用高斯-拉建德 (Johann Karl Friedrich Gauß) 數值積分 (Gauss-Legendre Quadrature) 計算，探討數值方法適用範圍及精確性，並針對定量抽水探討三維拘限含水層內，抽水井井篩不同位置在非等向、均質之水文地質條件下，推估洩降水位變化情形。

二、數學理論推導

2.1 部分貫穿井解析解 (Partially-Penetrating Well Analytical)

在非穩態流 (transient state flow) 情況下，並且考量流入 (sink) 或流出 (source) 項，其三維均質、非等向性拘限含水層之部分貫穿井 (Partially-Penetrating Well) 地下水控制方程式、初始條件與邊界條件其表示如 (圖 1 所示)：

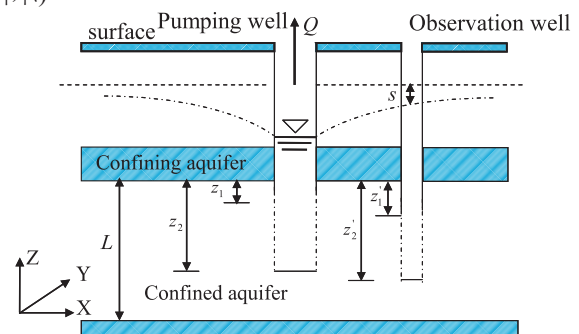


圖 1 部分貫穿井示意圖

地下水控制方程式

$$K_{xx} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} + 2K_{xy} \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} = S_s \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{Q}{(z_2 - z_1)} \delta(x) \delta(y) [u(z - z_2) - u(z - z_1)] \quad (1)$$

初始條件與邊界條件

$$\text{I.C. } s(x, y, 0) = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{B.C. } s(\pm\infty, y, t) = 0 \quad (2.2)$$

$$s(x, \pm\infty, t) = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial s(x, y, 0, t)}{\partial z} = \frac{\partial s(x, y, L, t)}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

其中, K_{xx} 、 K_{yy} 、 K_{xy} 表示非等向性水力傳導係數[L/T]及垂直方向水力傳導係數 K_{zz} [L/T], S_s 表示飽和含水層比儲水率(specific storage)[1/L], s 為洩降水位[L], δ 則是為 Dirac Delta 函數(1/L), 表示在點座標 x, y 當中, 設置井進行抽水, 其中井半徑忽略不計, Q 為流入與流出項(L^3/T), 是為體積的流出源頭強度(L^3/T)除以平均密度(M/L^3), 包括表示抽水量為正及補注量為負, u 為 Heaviside (Oliver Heaviside) step function, 表示濾水管開孔位置 z_2 至 z_1 、 L 表示為拘限含水層厚度。

本研究將均質、非等向性三維部分貫穿井地下水方程式如(1)式, 其中利用拉普拉斯正逆轉換、傅立葉正逆轉換及有限傅立葉轉換推求三維水位隨抽水量變化之洩降解析解。在時間領域部分, 時間表示為正值情況, 則利用拉普拉斯對時間領域如(3.1)-(3.2)式進行轉換為頻率領域, 其拉普拉斯正、逆轉定義如下:

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \quad (3.1)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) \cdot e^{pt} dt \quad (3.2)$$

其中 $p = \sigma + iw$ 為 Laplace 轉換之頻域函數, 而積分路徑是沿著 p 平面上的直線 $\text{Re}(p) = a$ 自下而上取的, 且 $a > a_0$, a_0 為 $f(t)$ 的拉氏變換之收斂座標。符號 $\mathcal{L}\{\}$ 表示的是拉氏轉換的積分運算, 而符號 $\mathcal{L}^{-1}\{\}$ 為反拉氏轉換 (inverse Laplace transform), 為拉氏轉換的逆運算。本研究將地下水方程式之時間項進行轉換如下式所示:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right] = p \cdot \bar{s}(x, y, z, p) - s(x, y, z, 0) \quad (4)$$

將(1)式代入(5)中推得下式

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial s}{\partial t}\right] = p \cdot \bar{s}(x, y, z, p) \quad (5)$$

同理, 將常數 Q 進行拉氏轉換推得下式:

$$\mathcal{L}[Q\delta(x)\delta(y)] = \frac{Q}{p} \delta(x)\delta(y) \quad (6)$$

(5)-(6)式經拉普拉斯(Laplace)正轉換代入方程式(1)與邊界條件, 推得下式:

$$K_{xx} \frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial z^2} + 2K_{xy} \frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial x \partial y} = Sp\bar{s} - \frac{Q}{p(z_2 - z_1)} \delta(x)\delta(y) \cdot [u(z-a) - u(z-b)] \dots\dots\dots(7.1)$$

$$\text{B.C. } \bar{s}(\pm\infty, y, z, p) = 0 \dots\dots\dots(7.2)$$

$$\bar{s}(x, \pm\infty, z, p) = 0 \dots\dots\dots(7.3)$$

$$\frac{\partial \bar{s}(x, y, 0, p)}{\partial z} = \frac{\partial \bar{s}(x, y, L, p)}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(7.4)$$

P 表示地下水方程式經拉普拉斯(Laplace method)正轉換之參數；在此研究中，抽水井濾管深度為 z_1 至 z_2 ，因此 z 軸為有限範圍(Finite Range)，本研究利用有限傅利葉 cosine (finite Fourier cosine)進行正轉換，其定理如下：

$$\text{定理： } F[s(z)] = \hat{s}(w) = \int_0^L \bar{h}(z) \cdot \cos(w \cdot z) dz \quad 0 \leq z \leq L, \quad w = \frac{n\pi}{L} \dots\dots\dots(8)$$

L 為拘限含水層厚度，在 z 軸方向，濾管開口深度介於 z_1 與 z_2 ，因此本研究將此方程式 $u(z-z_2) - u(z-z_1)$ 代入 (8) 式進行正轉換，如下式所示：

$$F[s(z)] = \hat{s}(w) = \int_0^L [u(z-z_2) - u(z-z_1)] \cdot \cos(w \cdot z) dz \quad 0 \leq z \leq L \dots\dots\dots(9)$$

重新整理並進行積分推得

$$F_c[\bar{s}(x, y, z, p)] = \hat{s}(x, y, w, p) = \int_{z_1}^{z_2} 1 \cdot \cos(w \cdot z) dz \dots\dots\dots(10)$$

方程式(7.1)之二次微分方程之有限傅利葉正轉轉換如下所示：

$$F\left[\frac{\partial^2 \bar{s}(z)}{\partial z^2}\right] = (-1)^n \frac{d\bar{s}(z)}{dz} \Big|_{z=L} - \frac{d\bar{s}(z)}{dz} \Big|_{z=0} - w^2 \hat{s}(w) \dots\dots\dots(11)$$

由方程式(7.4)得知，將邊界條件 $\frac{\partial \bar{s}(x, y, 0, p)}{\partial z} = \frac{\partial \bar{s}(x, y, L, p)}{\partial z} = 0$ 代入(11)式中，推得下式：

$$F\left[\frac{\partial^2 \bar{s}(z)}{\partial z^2}\right] = -w^2 \hat{s}(w) \dots\dots\dots(12)$$

將(10)與(12)式代入(7.1)式，推得

$$K_{xx} \frac{\partial^2 \hat{s}}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \hat{s}}{\partial y^2} + 2K_{xy} \frac{\partial^2 \hat{s}}{\partial x \partial y} = (Sp + K_{zz} w^2) \hat{s} - \frac{Q}{p(z_2 - z_1)} \delta(x)\delta(y) \cdot \int_{z_1}^{z_2} \cos(w \cdot z) dz \dots\dots\dots(13.1)$$

$$\text{B.C. } \hat{s}(\pm\infty, y, w, p) = 0 \dots\dots\dots(13.2)$$

$$\hat{s}(x, \pm\infty, w, p) = 0 \dots\dots\dots(13.3)$$

在抽水試驗進行抽水時，假設邊界條件不影響抽水情況下，定義邊界條件為 x 、 y 軸無窮遠邊界；其邊界假設為 Dirichlet 定水頭邊界，利用傅立葉轉換將空間域轉換為頻率域，其傅立葉正、逆轉定義如下：

$$F(\omega) = \mathfrak{F}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \cdot f(t) dt \quad (14.1)$$

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \cdot F(\omega) d\omega \quad (14.2)$$

其中 w 為頻域函數， $f(t)$ 為在 $(-\infty, \infty)$ 區域之函數，符號 $\mathfrak{F}\{\cdot\}$ 表示的是傅立葉轉換的積分運算，而符號 $\mathfrak{F}^{-1}\{\cdot\}$ 為反傅立葉轉換(inverse Fourier transform)，亦表示傅立葉轉換的逆運算。因此，將(13.1)式之 x 軸一階、二階偏微分方程與 Dirac delta 函數利用正向傅立葉定理進行轉換，推得(15.1)-(15.3)式：

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left[\frac{\partial \hat{s}(x, y, w, p)}{\partial x}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{i\alpha x} dx = f(x) e^{i\alpha x} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \\ &= i\alpha \tilde{s}(\alpha, y, w, p) \end{aligned} \quad (15.1)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left[\frac{\partial^2 \hat{s}(x, y, w, p)}{\partial x^2}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f''(x) e^{i\alpha x} dx = f'(x) e^{i\alpha x} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) i\alpha \cdot e^{i\alpha x} dx \\ &= (i\alpha)^2 \tilde{s}(\alpha, y, w, p) \end{aligned} \quad (15.2)$$

$$\mathfrak{F}[\delta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot e^{i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (15.3)$$

將(8)-(10)式代入(7.3)式，重新整理推得(16.1)式：

$$K_{xx}(i\alpha)^2 \tilde{s} + K_{yy} \frac{\partial^2 \tilde{s}}{\partial y^2} + 2K_{xy}(i\alpha) \frac{\partial \tilde{s}}{\partial y} = (Sp + K_{zz} w^2) \tilde{s} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{Q}{p(z_2 - z_1)} \delta(y) \cdot \int_{z_1}^{z_2} \cos(w \cdot z) dz \quad (16.1)$$

$$\text{B.C. } \tilde{s}(\alpha, \pm\infty, w, p) = 0 \quad (16.2)$$

同理，將(16.1)式之 y 軸一階、二階偏微分方程與 Dirac delta 函數利用正向傅立葉定理進行轉換，推得(17.1)-(17.3)式：

$$F\left[\frac{\partial^2 \tilde{s}(\alpha, y, w, p)}{\partial y^2}\right] = (i\beta)^2 \tilde{s}(\alpha, \beta, w, p) \quad (17.1)$$

$$F\left[\frac{\partial \tilde{s}(\alpha, y, w, p)}{\partial y}\right] = (i\beta) \tilde{s}(\alpha, \beta, w, p) \quad (17.2)$$

$$F[\delta(y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) e^{i\beta y} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (17.3)$$

將(17.1)-(17.3)式代入(16.1)式，重新整理推得(18)式：

$$\tilde{s} = \frac{1}{2\pi} \frac{Q}{p(z_2 - z_1)} \cdot \frac{\int_{z_1}^{z_2} \cos(w \cdot z) dz}{K_{xx} \alpha^2 + K_{yy} \beta^2 + 2K_{xy} \alpha \beta + Sp + K_{zz} w^2} \quad (18)$$

α 與 β 示為地下水流方程式經正向傅立葉定理轉換所得之參數，本研究利用反向拉普拉斯(inverse Laplace)與反向傅立葉(inverse Fourier)、反向有限傅立葉(finite Fourier)將(18)式逆轉推求解析解方程式。在(18)式中，利用反向傅立葉(inverse Fourier)將 β 逆轉 y 軸向，推得下式：

$$\bar{s}(\alpha, y, w, p) = \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}} \frac{Q \cdot \int_{z_1}^{z_2} \cos(w \cdot z) dz}{4 \cdot p\pi(z_2 - z_1)} \exp(i\alpha y \frac{K_{xy}}{K_{yy}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{(K_{yy}K_{xx}\alpha^2 - K_{xy}^2\alpha^2 + K_{yy}Sp + K_{zz}K_{yy}w^2)}} \cdot$$

$$\left[-2 \cdot \text{heaviside}(|y|) \cdot \sinh\left(\frac{\text{signum}(K_{yy})}{K_{yy}} \cdot |y| \sqrt{(K_{yy}K_{xx}\alpha^2 - K_{xy}^2\alpha^2 + K_{yy}Sp + K_{zz}K_{yy}w^2)}\right) \right.$$

$$+ \text{signum}\left(\sqrt{\frac{(K_{yy}K_{xx}\alpha^2 - K_{xy}^2\alpha^2 + K_{yy}Sp + K_{zz}K_{yy}w^2)}{T_{yy}^2}}\right) \cosh\left(\frac{\text{signum}(K_{yy})}{K_{yy}} \cdot |y| \sqrt{(K_{yy}K_{xx}\alpha^2 - K_{xy}^2\alpha^2 + K_{yy}Sp + K_{zz}K_{yy}w^2)}\right)$$

$$\left. + \sinh\left(\frac{\text{signum}(K_{yy})}{K_{yy}} \cdot |y| \sqrt{(K_{yy}K_{xx}\alpha^2 - K_{xy}^2\alpha^2 + K_{yy}Sp + K_{zz}K_{yy}w^2)}\right) \right] \dots\dots\dots(19)$$

在上式中，亥維賽步階函數(Heaviside step function)與 signum 函數中的絕對值 y 、 K_{yy} 與 $K_{yy}K_{xx}\alpha^2 - K_{xy}^2\alpha^2 + K_{yy}Sp + K_{zz}K_{yy}w^2$ 恆大於零，因此亥維賽步階函數與 signum 等於 1，上式重新整理推得下式：

$$\bar{s}(\alpha, y, w, p) = \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}} \frac{Q \cdot \int_{z_1}^{z_2} \cos(w \cdot z) dz}{4 \cdot p\pi(z_2 - z_1)} \exp(i\alpha y \frac{K_{xy}}{K_{yy}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{(K_{yy}K_{xx}\alpha^2 - K_{xy}^2\alpha^2 + K_{yy}Sp + K_{zz}K_{yy}w^2)}} \cdot$$

$$\left[\cosh\left(\frac{1}{K_{yy}} \cdot |y| \sqrt{(K_{yy}K_{xx}\alpha^2 - K_{xy}^2\alpha^2 + K_{yy}Sp + K_{zz}K_{yy}w^2)}\right) \right. \dots\dots\dots(20)$$

$$\left. - \sinh\left(\frac{1}{K_{yy}} \cdot |y| \sqrt{(K_{yy}K_{xx}\alpha^2 - K_{xy}^2\alpha^2 + K_{yy}Sp + K_{zz}K_{yy}w^2)}\right) \right]$$

在(20)式中，雙曲正弦(sinh)與雙曲餘弦(cosh)之公式如下式：

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \dots\dots\dots(21.1)$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \dots\dots\dots(21.2)$$

將(21.1)-(21.2)式代入(20)式中進行整理，推得下式：

$$\bar{s}(\alpha, y, w, p) = \frac{\int_{z_1}^{z_2} \cos(w \cdot z) dz}{2\sqrt{2\pi}} \frac{Q}{p(z_2 - z_1)} \frac{\exp(i\alpha y \frac{K_{xy}}{K_{yy}}) \cdot \frac{1}{K_{yy}} \cdot |y| \sqrt{(K_{yy}K_{xx}\alpha^2 - K_{xy}^2\alpha^2 + K_{yy}Sp + K_{zz}K_{yy}w^2)}}{\sqrt{(K_{yy}K_{xx}\alpha^2 - K_{xy}^2\alpha^2 + K_{yy}Sp + K_{zz}K_{yy}w^2)}} \dots\dots\dots(22)$$

本研究利用反向拉普拉斯(Inverse Laplace)及褶積定理(convolution theorem)將(22)式之頻域函數 p 轉換為時間項 t ，並對(22)式分解如下(23.1)式及(23.2)式，進行反向拉普拉斯轉換。

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\exp(-\frac{1}{K_{yy}} \cdot |y| \sqrt{(K_{yy}K_{xx}\alpha^2 - K_{xy}^2\alpha^2 + K_{yy}Sp + K_{zz}K_{yy}w^2)})}{\sqrt{(K_{yy}K_{xx}\alpha^2 - K_{xy}^2\alpha^2 + K_{yy}Sp + K_{zz}K_{yy}w^2)}}\right] \dots\dots\dots(23.1)$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(p)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\int_{z_1}^{z_2} \cos(w \cdot z) dz}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{Q}{p(z_2 - z_1)} \exp(i\alpha y \frac{K_{xy}}{K_{yy}})\right] \dots\dots\dots(23.2)$$

在(23.1)式中，反向拉普拉斯式查表得知將參數 p 轉換時間 t 如下方程式：

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\exp(-\sqrt{(p + \frac{a}{b})})}{\sqrt{(p + \frac{a}{b})}}\right] = \frac{\exp(-\frac{a}{b}t - \frac{1}{4}t)}{\sqrt{\pi \cdot t}} \dots\dots\dots(24)$$

在(23.1)式中，符合(24)之型式，令

$$G = \frac{y^2[(K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2)\alpha^2 + K_{zz}K_{yy}w^2]}{K_{yy}^2} \dots\dots\dots(25.1)$$

$$F = \frac{y^2 \cdot S}{K_{yy}} \dots\dots\dots(25.2)$$

$$C = \frac{y}{K_{yy}} \dots\dots\dots(25.3)$$

將(23.1)式代入(24)式，重新整理推得：

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \mathcal{L}^{-1}\left[C \frac{\exp(-\sqrt{(F \cdot p + G)})}{\sqrt{(F \cdot p + G)}}\right] \dots\dots\dots(26)$$

在(26)式中，利用反向拉普拉斯式(Inverse Laplace)進行轉換推求時間項 t ，在拉普拉斯式定理之第一平移定理做技巧性轉換如下：

第一平移定理(First Shifting Theorem)

$$\mathcal{L}\left[e^{\frac{b}{a}} f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{\frac{b}{a}} \cdot f\left(\frac{t}{a}\right) dt = a \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{\frac{b}{a}} \cdot f\left(\frac{t}{a}\right) d\left(\frac{t}{a}\right) = a \cdot F(as - b) \dots\dots\dots(27)$$

假設 b 等於零

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = a \cdot F(as) \Rightarrow F(as) = \frac{1}{a} \mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] \dots\dots\dots(28)$$

本研究利用第一平移定理及查表反向拉普拉斯式型式轉換將(24)式及(28)式，重新定義(26)式，推得

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \mathcal{L}^{-1}\left[C \frac{\exp(-\sqrt{(F \cdot p + G)})}{\sqrt{(F \cdot p + G)}}\right] = \frac{C}{\sqrt{F}} \frac{\exp(-G \frac{t}{F} - \frac{F}{4t})}{\sqrt{\pi t}} \dots\dots\dots(29)$$

將(25.1)-(25.3)式代入(29)式，推得：

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{S \cdot K_{yy}}} \frac{\exp(-\frac{(K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2)\alpha^2 + K_{zz}K_{yy}w^2}{S \cdot K_{yy}}t - \frac{y^2 S}{4 \cdot K_{yy} \cdot t})}{\sqrt{t}} \dots\dots\dots(30)$$

在(23.2)式中，利用反拉普拉斯定理推得：

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\int_{z_1}^{z_2} \cos(w \cdot z) dz}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{Q}{p(z_2 - z_1)} \exp(i\alpha y \frac{K_{xy}}{K_{yy}}) \right] = \frac{Q \cdot \int_{z_1}^{z_2} \cos(w \cdot z) dz}{2\sqrt{2\pi} \cdot (z_2 - z_1)} \exp(i\alpha y \frac{K_{xy}}{K_{yy}}) \dots (31)$$

將方程式(30)-(31)式代入褶積定理(convolution theorem)中，推得下式：

$$\hat{s}(\alpha, y, w, t) = g(t) * f(t) = \frac{Q \cdot \int_{z_1}^{z_2} \cos(w \cdot z) dz \cdot e^{i\alpha y \frac{K_{xy}}{K_{yy}}}}{(z_2 - z_1) \cdot 2\pi \sqrt{2SK_{yy}}} \int_0^t \exp \left[-\frac{y^2 S}{4 \cdot K_{yy} \cdot \tau} - \frac{(K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2)\alpha^2 + K_{zz}K_{yy}w^2}{S \cdot K_{yy}} \tau \right] \frac{d\tau}{\tau^{\frac{1}{2}}} \dots (32)$$

本研究再利用反向傅利葉(Inverse Fourier)將(32)式之 α 參數逆轉為 x 軸項，因此將(32)式代入(14.2)式中，整理為下式所示。

$$\tilde{s}(x, y, w, t) = \mathcal{F}_x^{-1}[\hat{s}(\alpha, y, w, t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q \cdot \int_{z_1}^{z_2} \cos(w \cdot z) dz \cdot e^{i\alpha y \frac{K_{xy}}{K_{yy}}}}{(z_2 - z_1) \cdot 2\pi \sqrt{2SK_{yy}}} \int_0^t \exp \left[-\frac{y^2 S}{4 \cdot K_{yy} \cdot \tau} - \frac{(K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2)\alpha^2 + K_{zz}K_{yy}w^2}{S \cdot K_{yy}} \tau \right] \frac{d\tau}{\tau^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-i\alpha x} d\alpha \dots (33)$$

52

將上式 α 參數重新整理，推得

$$\tilde{s}(x, y, w, t) = \mathcal{F}_x^{-1}[\hat{s}(\alpha, y, w, t)] = \frac{Q \cdot \int_{z_1}^{z_2} \cos(w \cdot z) dz}{(z_2 - z_1) \cdot \sqrt{2\pi} \sqrt{2SK_{yy}}} \int_0^t \exp \left[-\frac{y^2 S}{4 \cdot K_{yy} \cdot \tau} \right] \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha y \frac{K_{xy}}{K_{yy}}} \cdot e^{-i\alpha x} \cdot e^{-\frac{[(K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2)\alpha^2]}{S \cdot K_{yy}} \tau} d\alpha \cdot e^{-\frac{K_{zz}K_{yy}w^2 \tau}{S \cdot K_{yy}}} \frac{d\tau}{\tau^{\frac{1}{2}}} \dots (34)$$

在(34)式中虛線區域，利用反向傅利葉進行參數逆轉，重新整理如下式：

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha(x - y \frac{K_{xy}}{K_{yy}})} \cdot e^{-\frac{(K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2)\alpha^2 \tau}{S \cdot K_{yy}}} d\alpha \dots (35)$$

在反向傅利葉逆轉參數後，所得下列傅利葉逆轉之型式：

$$f(g) = \mathcal{F}_g^{-1}[F(\alpha)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha g} \cdot e^{-a\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{e^{-\frac{1}{4} \frac{g^2}{a}}}{\sqrt{\pi}} \dots (36)$$

令 $x - y \frac{K_{xy}}{K_{yy}} = g$ 、 $\frac{(K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2)\tau}{S \cdot K_{yy}} = a$ ，代入(36)式中，推得：

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{SK_{yy}}}{\sqrt{(K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2)\tau}} \cdot \exp \left[-\frac{SK_{yy}(y^2(\frac{K_{xy}}{K_{yy}})^2 - 2xy\frac{K_{xy}}{K_{yy}} + x^2)}{4((K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2)\tau)} \right] \dots (37)$$

將(37)式代入(34)式虛線區域內，整理推得：

$$\tilde{s}(x, y, w, t) = \mathfrak{I}_x^{-1}[\hat{s}(\alpha, y, w, t)] = \mathfrak{I}_\lambda^{-1}[F(\alpha)] = \frac{Q \int_{z_1}^{z_2} \cos(w \cdot z) dz}{4\pi(z_2 - z_1) \sqrt{(K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2)}} \dots\dots\dots(38)$$

$$\int_0^t \exp\left[-\frac{S}{4\tau} \left(\frac{K_{xx}y^2 - 2K_{xy}xy + K_{yy}x^2}{K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2}\right)\right] \cdot \exp\left(\frac{-K_{zz}\omega^2\tau}{S}\right) \frac{d\tau}{\tau}$$

在(38)式中，令

$$\mu = \frac{S}{4\tau} \left(\frac{K_{xx}y^2 - 2K_{xy}xy + K_{yy}x^2}{K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2}\right) \dots\dots\dots(39)$$

在(39)式，對 μ 進行微分，推得

$$d\tau = -\frac{S}{4\mu^2} \left(\frac{K_{xx}y^2 - 2K_{xy}xy + K_{yy}x^2}{K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2}\right) d\mu \dots\dots\dots(40)$$

將(39)-(40)式代入(38)式，整理推得

$$\tilde{s}(x, y, w, t) = \mathfrak{I}_x^{-1}[\hat{s}(\alpha, y, w, t)] = \frac{Q \int_{z_1}^{z_2} \cos(w \cdot z) dz}{4\pi(z_2 - z_1) \sqrt{(K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2)}} \dots\dots\dots(41)$$

$$\int_0^t \frac{e^{-\mu}}{\mu} \cdot \exp(-K_{zz}w^2 \frac{1}{4\mu} \left(\frac{K_{xx}y^2 - 2K_{xy}xy + K_{yy}x^2}{K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2}\right)) d\mu$$

本研究進行時間 t 轉換，在(39)式中，當

$$\tau = 0 \Rightarrow \mu \approx \infty \dots\dots\dots(42.1)$$

$$\tau = t \Rightarrow \mu \approx \frac{S}{4t} \left(\frac{K_{xx}y^2 - 2K_{xy}xy + K_{yy}x^2}{K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2}\right) \dots\dots\dots(42.2)$$

將(42.1)-(42.2)式代入(41)式中，得

$$\tilde{s}(x, y, w, t) = \mathfrak{I}_x^{-1}[\hat{s}(\alpha, y, w, t)] = \frac{Q \int_{z_1}^{z_2} \cos(w \cdot z) dz}{4\pi(z_2 - z_1) \sqrt{(K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2)}} \dots\dots\dots(43)$$

$$\int_{\infty}^{\frac{S}{4t} \left(\frac{K_{xx}y^2 - 2K_{xy}xy + K_{yy}x^2}{K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2}\right)} \frac{e^{-\mu}}{\mu} \cdot \exp(-K_{zz}\omega^2 \frac{1}{4\mu} \left(\frac{K_{xx}y^2 - 2K_{xy}xy + K_{yy}x^2}{K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2}\right)) d\mu$$

$$\text{令 } \frac{S}{4t} \left(\frac{K_{xx}y^2 - 2K_{xy}xy + K_{yy}x^2}{K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2}\right) = u, \quad \frac{K_{zz}(K_{xx}y^2 - 2K_{xy}xy + K_{yy}x^2)}{K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2} = \zeta \text{ 將(43)式重新整理如下式所示：}$$

$$\tilde{s}(x, y, w, t) = \mathfrak{I}_x^{-1}[\hat{s}(\alpha, y, w, t)] = \frac{Q \int_{z_1}^{z_2} \cos\left(\frac{n\pi}{L} \cdot z\right) dz}{4\pi(z_2 - z_1) \sqrt{(K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2)}} \int_u^{\infty} \frac{e^{-\mu}}{\mu} \cdot e^{-\frac{\zeta \cdot (\frac{n\pi}{L})^2}{4\mu}} d\mu \dots\dots\dots(44)$$

在有限邊界情況下，本研究利用有限傅利葉 cosine (finite Fourier cosine) 進行逆轉換，其定理($n = 0$ 與 $n > 0$)如下所示：

$$s = \left(\frac{1}{L}\right) \cdot \bar{s}(n=0) + \left(\frac{2}{L}\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \bar{s}(n>0) \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \dots\dots\dots(45)$$

將(44)式代入(45)，推得：

$$\begin{aligned} s = & \left(\frac{1}{L}\right) \cdot \frac{Q \int_{z_1}^{z_2} \cos\left(\frac{0 \cdot \pi}{L} \cdot z\right) dz}{4\pi(z_2 - z_1) \sqrt{(K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2)}} \int_u^{\infty} \frac{e^{-\mu}}{\mu} \cdot e^{-\frac{\zeta \cdot \left(\frac{0 \cdot \pi}{L}\right)^2}{4\mu}} d\mu \\ & + \left(\frac{2}{L}\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q \int_{z_1}^{z_2} \cos\left(\frac{n\pi}{L} \cdot z\right) dz}{4\pi(z_2 - z_1) \sqrt{(K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2)}} \int_u^{\infty} \frac{e^{-\mu}}{\mu} \cdot e^{-\frac{\zeta \cdot \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}{4\mu}} d\mu \cdot \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \end{aligned} \dots\dots\dots(46)$$

重新整理其解析解如下所示：

$$s = \frac{Q}{4\pi \cdot L \sqrt{(K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2)}} [W(u) + f] \dots\dots\dots(47.1)$$

$$W(u) = \int_u^{\infty} \frac{e^{-\mu}}{\mu} d\mu \dots\dots\dots(47.2)$$

$$f = \frac{2 \cdot L}{(z_2 - z_1)n\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot z_2\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot z_1\right) \right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cdot W\left(u, \frac{x_n}{L}\right) \dots\dots\dots(47.3)$$

$$W\left(u, \frac{x_n}{L}\right) = \int_u^{\infty} \frac{e^{-\mu - \frac{x_n^2}{4L^2\mu}}}{\mu} d\mu \dots\dots\dots(47.4)$$

$$\frac{x_n^2}{L^2} = \frac{K_{zz}(K_{xx}y^2 - 2K_{xy}xy + K_{yy}x^2)}{K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2} \cdot \frac{(n\pi)^2}{L^2} \dots\dots\dots(47.5)$$

$$u = \frac{S}{4t} \left(\frac{K_{xx}y^2 - 2K_{xy}xy + K_{yy}x^2}{K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2} \right) \dots\dots\dots(47.6)$$

其中 s 為洩降水位[L]， $W(u)$ 為部分貫穿井之井函數(well function)， S 為拘限含水層之比儲水率[1/L]， t 為時間項[T]， x 與 y 為觀測井對抽水井之相對座標。假設觀測井濾水管開孔深度為 z_1' 至 z_2' 公尺，在(47.3)式中，進行對 z 軸積分，此積分後推得觀測井之平均洩降水位，如下式所示：

$$s = \frac{Q}{4\pi \cdot L \sqrt{(K_{yy}K_{xx} - K_{xy}^2)}} \left[W(u) + \frac{2L}{\pi(z_2 - z_1)} \sum_{n=1}^{\infty} R_n' \cdot W\left(u, \frac{x_n}{L}\right) \right] \dots\dots\dots(48.1)$$

$$R_n' = \frac{L}{(z_2' - z_1')n^2\pi} \left\{ \sin\left(\frac{n\pi z_2}{L}\right) - \sin\left(\frac{n\pi z_1}{L}\right) \right\} \cdot \left\{ \sin\left(\frac{n\pi z_2'}{L}\right) - \sin\left(\frac{n\pi z_1'}{L}\right) \right\} \dots\dots\dots(48.2)$$

2.2 Hantush 井函數(Hantush well funtion)推導

依據 2.1 節推導方程式中，(47.1)-(47.6)式表示三維非等向性、均質之水文地質情況中，井體內定量抽水之洩降水位解析解表示式，而(48.1)-(48.2)式表示為不同距離觀測井觀測之洩降水位解析解表示式。在(47.4)-(47.6)

式中型式與 Hantush-Jacob 井函數 [Hantush and Jacob, 1955; Hantush, 1956] 為相同，皆為非線性方程式如下式所示 [Hantush, 1955]：

$$W(u, \frac{x_n}{L}) = \int_u^\infty \mu^{-1} \cdot \exp(-\mu - \frac{x_n^2}{4L^2\mu}) d\mu \dots\dots\dots (49.1)$$

$$W(u, \frac{x_n}{L}) = 2K_0(\frac{x_n}{L}) - \int_{(\frac{x_n}{L})^2/4u}^\infty \mu^{-1} \cdot \exp(-\mu - \frac{x_n^2}{4L^2\mu}) d\mu \dots\dots\dots (49.2)$$

式中 K_0 第二類修正貝索函數(modified Bessel function of the second kind)，其中針對上述(49.1)-(49.2)式重新定義，作為後續解析解洩降水位計算，(49.1)式亦可表示如下式：

$$W(u, \frac{x_n}{L}) = \int_0^\infty \mu^{-1} \cdot \exp(-\mu - \frac{x_n^2}{4L^2\mu}) d\mu - \int_0^u \mu^{-1} \cdot \exp(-\mu - \frac{x_n^2}{4L^2\mu}) d\mu \dots\dots\dots (50.1)$$

$$= 2K_0(\frac{x_n}{L}) - \int_0^u \mu^{-1} \cdot \exp(-\mu - \frac{x_n^2}{4L^2\mu}) d\mu \dots\dots\dots (50.2)$$

在(36)式中，亦可表示如下式：

$$W(u, \frac{x_n}{L}) = \int_0^\infty -\mu^{-1} \cdot \exp(-\mu - \frac{x_n^2}{4L^2\mu}) d\mu - \int_{(\frac{x_n}{L})^2/4u}^\infty \mu^{-1} \cdot \exp(-\mu - \frac{x_n^2}{4L^2\mu}) d\mu \dots\dots\dots (51.1)$$

$$W(u, \frac{x_n}{L}) = \int_0^{(\frac{x_n}{L})^2/4u} \mu^{-1} \cdot \exp(-\mu - \frac{x_n^2}{4L^2\mu}) d\mu \dots\dots\dots (51.2)$$

三、研究分析與討論

上述理論針對均質、非等向性三維拘限含水層之部分貫穿井地下水方程式進行推導解析解，針對不同抽水流量計算出對應洩降水位如(46)-(47.6)式，其中解析解之 Hantush 井函數係屬廣義性不完全 Gamma 函數 (Generalized Incomplete Gamma Function)，因此本研究針對 Hantush 井函數(50.2)-(51.2)式利用高斯-拉建德數值積分(Gauss-Legendre Quadrature)推估，建立 Hantush 井函數之推估之適用範圍。另外針對在三維均質、非等向性之拘限含水層中，依據抽水井不同開篩情況下，探討洩降水位之變化情形，詳細討論如后說明。

3.1 Hantush 井函數推估適用範圍

本研究針對 Hantush 井函數(50.2)、(51.2)式利用高斯-拉建德數值積分(Gauss-Legendre Quadrature)推估逼近真實函數值，其中主要推估函數中的空間領域[a,b]轉換為[-1,1]領域中，轉換後表示式如下所示：

$$W(u, \frac{x_n}{L}) = 2K_0(\frac{x_n}{L}) - \frac{u}{2} \sum_{i=1}^k \frac{2(1-x_i^2)}{\{k \cdot P_{k-1}(x_i)\}^2} \left[\left(\frac{ux_i + u}{2} \right)^{-1} \exp(-\frac{ux_i + u}{2}) - \frac{x_n^2}{2L^2(ux_i + u)} \right] \dots\dots\dots (52.1)$$

$$W(u, \frac{x_n}{L}) = \frac{((\frac{x_n}{L})^2/4u)}{2} \sum_{i=1}^k \frac{2(1-x_i^2)}{\{k \cdot P_{k-1}(x_i)\}^2} \left\{ \left(\frac{((\frac{x_n}{L})^2/4u)x_i + ((\frac{x_n}{L})^2/4u)}{2} \right)^{-1} \cdot \exp[-\left(\frac{((\frac{x_n}{L})^2/4u)x_i + ((\frac{x_n}{L})^2/4u)}{2} \right)] - \frac{x_n^2}{2L^2((\frac{x_n}{L})^2/4u)x_i + ((\frac{x_n}{L})^2/4u)} \right\} \dots\dots\dots (52.2)$$

Hantush 井函數係屬廣義性不完全 Gamma 函數，依據(50.2)、(51.2)式中利用高斯-拉建德數值積分離散結果如(52.1)-(52.2)式以計算， $W(u, \frac{x_n}{L})$ 假設如表 1 所示，當中 $\frac{x_n}{L}$ 假設為 0.001， u 假設為 0.0001、0.01、1、10，其中針對不同高斯點位(4,8,16,32,64,128,256)進行探討誤差性。由結果顯示當高斯點位為 256 點時，其數值積分估算值與真實解誤差最小，考量數值運算情形，假設誤差小於 $1.00E-5$ ，作為 Hantush 井函數估算之方案，故本研究高斯點位以 32 點座標計算。

另外本研究針對參數 $u, \frac{x_n}{L}$ 所對應代入井函數值

進行推估與解析解(以 MAPLE 數學軟體計算)比較以

評估(50.2)、(51.2)式之適用範圍值，當中 u 及 $\frac{x_n}{L}$

參數值分別假設為 [0.000001, 0.000005, 0.00001, 0.00005, 0.0001, 0.0005, 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]。經計算結果如圖 2 所示，以四個斷面 A-A'($x_n/L=0.002$)、B-B'($x_n/L=0.01$)、C-C'($x_n/L=0.1$)、D-D'($x_n/L=1$)所計算數值解與解析解比較，以在(50.2)式中(如圖 2(A))，當 x_n/L 在任何值情況，當 u 值大於 0.0007 時所計算誤差微小約 $0 \sim 10E-8$ ；而 u 值小於 0.0007 時，數值解呈現誤差較大，其中以 $x_n/L=1$ 之誤差最大，約為 1.2。以(51.2)式中(如圖 2(B))，當 x_n/L 大於 0.2 時， u 任何值計算誤差微小

表 1 高斯-拉建德數值積分以不同高斯點位計算與解析解比較表

高斯點數	W(u, Xn/L)			
	W(0.0001,0.001)	W(0.01,0.001)	W(1,0.001)	W(10,0.001)
4	1.19E-01	2.39E-01	5.06E-05	1.16E-11
8	2.39E-02	1.91E-02	1.55E-07	3.00E-14
16	2.88E-04	1.12E-03	2.10E-11	3.00E-14
32	1.72E-06	3.56E-06	5.00E-14	3.00E-14
64	4.74E-09	2.61E-07	5.00E-14	3.00E-14
128	4.99E-13	1.07E-09	5.00E-14	3.00E-14
256	1.93E-14	2.93E-14	5.00E-14	3.00E-14

表 2 Hantush 井函數推估值表

u	Xn/L=0.001	Xn/L=0.01	Xn/L=0.1	Xn/L=1	Xn/L=10
0.000001	13.00309548441099	9.44248946032165	4.85413804940403	0.84204887648142	0.00003556012463
0.000005	11.57948325178160	9.44134116971325	4.85413804940403	0.84204887648142	0.00003556012463
0.00001	10.91087816685729	9.41757474042814	4.85413804940403	0.84204887648142	0.00003556012463
0.00005	9.32133065413766	8.88273219746214	4.85413804940403	0.84204887648142	0.00003556012463
0.0001	8.63072604691240	8.39825859726752	4.85413804940350	0.84204887648142	0.00003556012463
0.0005	7.02292025828790	6.97500483220385	4.85299025193757	0.84204887648142	0.00003556012463
0.001	6.33139602006806	6.30687771614010	4.82924292109232	0.84204887648142	0.00003556012463
0.005	4.72604694698711	4.72124478704481	4.29599490732409	0.84204887648142	0.00003556012463
0.01	4.03790583599624	4.03555693252102	3.81501652068086	0.84204887648089	0.00003556012463
0.05	2.46789434934316	2.46748462811834	2.42706902470202	0.84094932322113	0.00003556012463
0.1	1.82292215205813	1.82274333517220	1.80498967818279	0.81903450043612	0.00003556012463
0.5	0.55977343145426	0.55975726286005	0.55814314207994	0.42102443824071	0.00003556012463
1	0.21938389727165	0.21938022204213	0.21901303819197	0.18547481057184	0.00003556012443
2	0.04890050601628	0.04890004153214	0.04885361641435	0.04443621182763	0.00003551701831
3	0.01304838020737	0.01304829241180	0.01303951592347	0.01219183715749	0.00003380815734
4	0.00377935220996	0.00377933242097	0.00377735405580	0.00358475911170	0.00002712752158
5	0.00114829554145	0.00114829060894	0.00114779746646	0.00109955326029	0.00001778006232
6	0.00036008243890	0.00036008112609	0.00035994986959	0.00034706570651	0.00000993994788
7	0.00011548172791	0.00011548136193	0.00011544476978	0.0001184403807	0.00000496745964
8	0.00003766562178	0.00003766551616	0.00003765495635	0.00003661390161	0.00000229595728
9	0.00001244735386	0.00001244732256	0.00001244419247	0.00001213515086	0.00000100415312
10	0.00000415696883	0.00000415695935	0.00000415601148	0.00000406231335	0.00000042197595

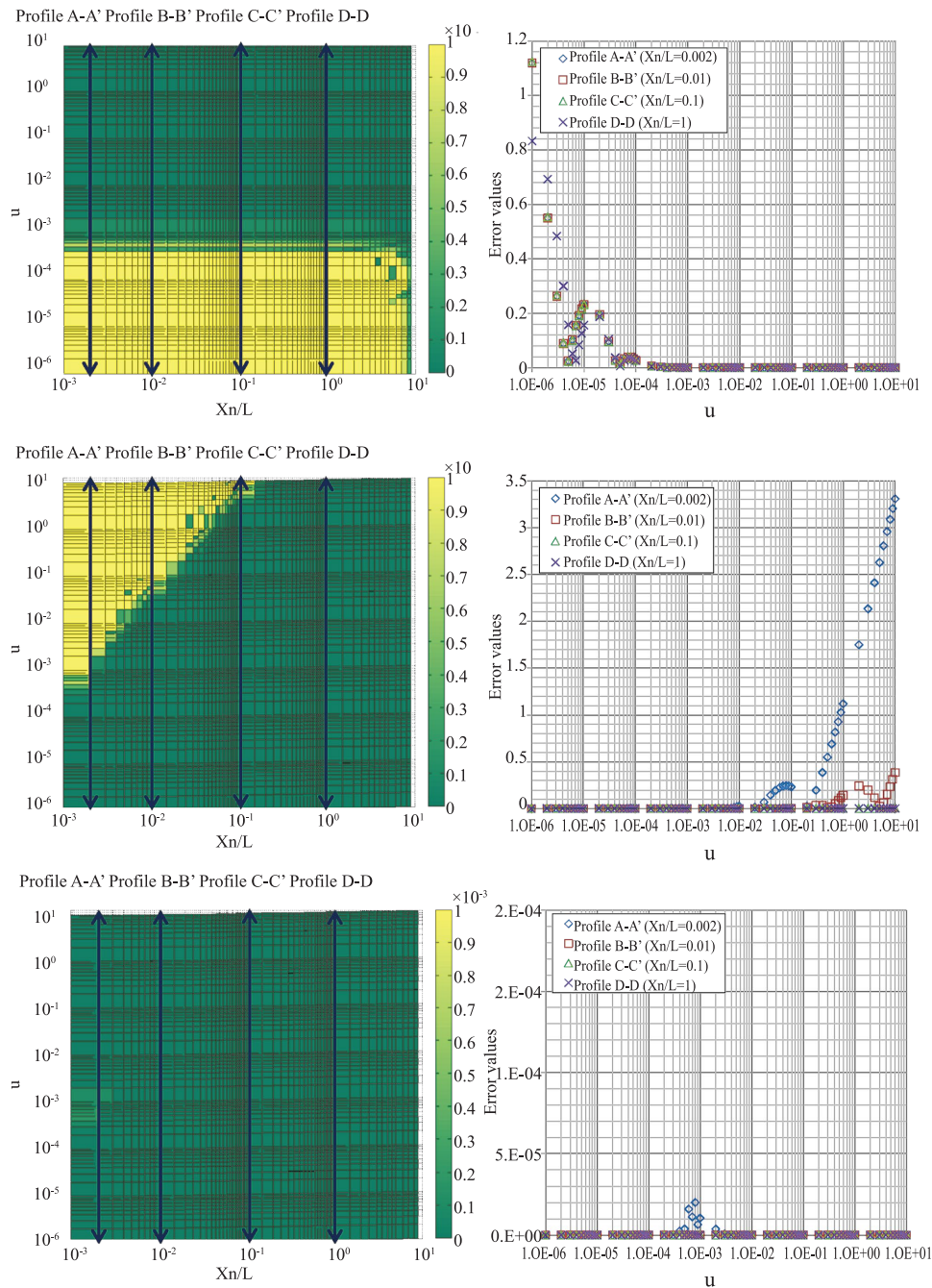


圖 2 利用高斯-拉建德數值積分推估 Hantush 井函數數值解與解析解比較圖

約 $0 \sim 10E-10$ ；當 x_n/L 小於 0.2，且 u 值大於 0.03 時，數值解呈現誤差較大，其中以 x_n/L (0.002) 之誤差最大，約為 3.3。依據上述數值計算結果與解析解比較後，誤差可接受範圍如(50.2)式適用範圍為 x_n/L 在任何情況下， u 值大於 0.0007；(51.2)式適用範圍為 x_n/L 在任何情況下， u 值小於 0.0007。依據(50.2)及(51.2)式所上述所界定範圍，重新推算與解析解誤差值，結果詳如圖 2(C)，最大誤差值約為 $2.01E-05$ ，Hantush 井函數推估值如表 2 所示。

3.2 三維部分貫穿井於非等向、均質拘限含水層之洩降水位推估

依據上述針對部分貫穿井於三維拘限含水層進行理論推導，水文地質條件假設為均質、非等向性，抽水井洩降解析解推得結果如(46)-(47.6)式所示，觀測井洩降水位表示如(48.1)-(48.2)式。本研究依據上述解析解方程式，以定量抽水探討拘限含水層內抽水井井篩不同(開篩 0-10m、10-20m、20-30m 及全開篩 0-30m)位置

在非等向、均質之水文地質條件下，計算洩降水位變化情形(如部分貫穿井於拘限含水層抽水示意圖如圖 3 所示)，參數假設均質 K_{xx} 、 K_{xy} 、 K_{yy} 及 K_{zz} 分別為 $8.3E-03$ m/min、 $1.33E-05$ m/min、 $3.33E-03$ m/min 及 $6.67E-04$ m/min，而儲水係數 S 假設均質為 0.000003 1/m、含水層厚度為 30 m，抽水量假設為 -1.5 m³/min 進行抽水試驗模擬，其中以 Z 剖面(XY45°- Z 剖面)及 XY 剖面之洩降水位進行討論，詳如圖 3 所示。圖 4、圖 5 為 XY45°- Z 剖面及 XY 剖面(20m)之洩降水位變化圖，其中洩降水位變化差異以開篩位置 10-20m 洩降水位最為顯著，洩降水位約 -0.18 m，另於開篩位置 0-10m 及 20-30m 洩降水位變化最小，洩降水位約 -0.14 m。若距離抽水井越遠情況下，不同開篩的抽水導致洩降水位則為一致如圖 5 之 XY 剖面(20m)所示。圖 6 表示為抽水井點位不

同時間之洩降水位值，由結果顯示假設抽水井開篩位於鄰近阻水層(0-10m、20-30m)時，洩降水位比開篩位於中間段(10-20m)小。

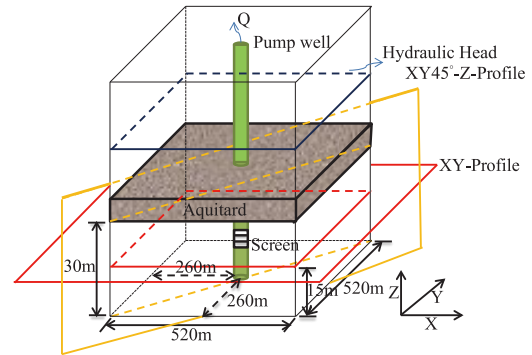


圖 3 部分貫穿井於拘限含水層中之示意圖

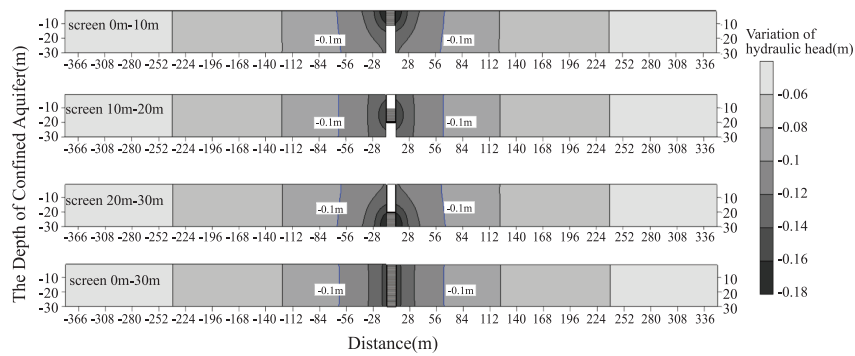


圖 4 拘限含水層 Z 剖面(XY45°- Z 剖面)洩降水位變化圖

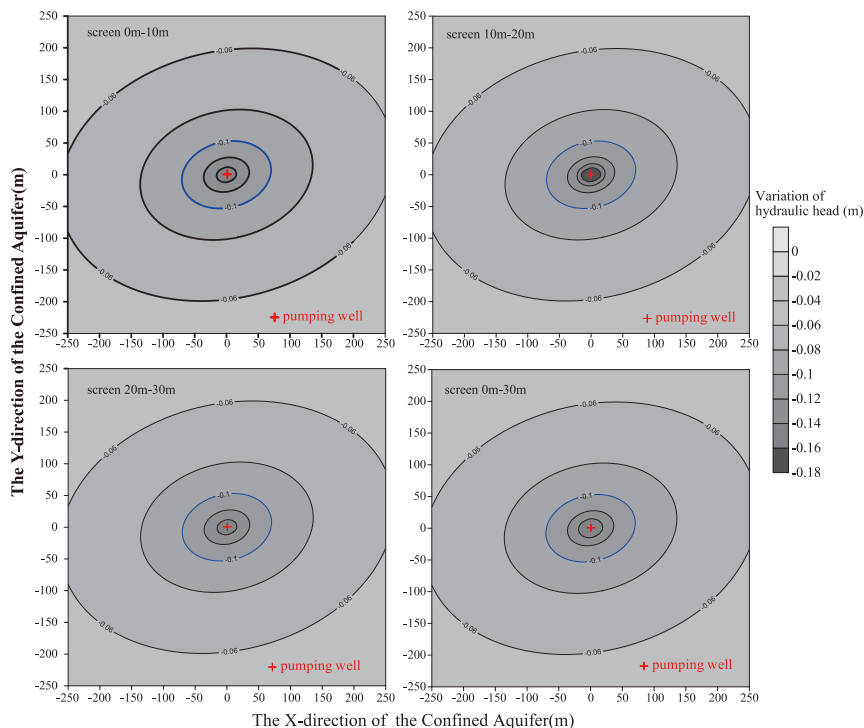


圖 5 拘限含水層 XY 剖面(20m)洩降水位變化圖

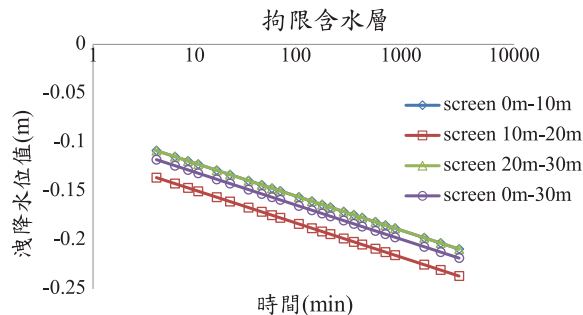


圖 6 於拘限含水層中抽水井不同開篩推估洩降水位變化圖

四、結論及建議

以往探討均質、非等向性之水文參數中，進行抽水描述洩降水位空間分布情況中，多採用 Papadopoulos (1965)理論探討完全貫穿井(full- penetrating well)在於二維拘限含水層中進行參數推估或模擬抽水時所影響洩降水位，鮮少討論部分貫穿井於上述水文地質條件中描述抽水隨時間變化洩降水位行為。因此本研究針對部分貫穿井(part- penetrating well)於三維拘限含水層中進行理論推導求出近似解析解，其中解析解之 Hantush 井函數在數學理論稱為廣義性不完全 Gamma 函數，擬需高精度或數列級數方法求解，降低誤差性，因此針對此函數利用高斯-拉建德數值積分數值方式求解，其中針對 Hantush 井函數進行推導適用方程式 (50.2、51.2)進行推估與解析解比較，由結果顯示上述方程式皆有適合使用區域範圍[(50.2)式適用範圍為 x_n/L 在任何情況下， u 值大於 0.0007；(51.2)式適用範圍為 x_n/L 在任何情況下， u 值小於 0.0007]，精確值誤差約為小於 $2.01E-05$ 。因此藉由部分貫穿井於三維拘限含水層進行理論推導及 Hantush 井函數推估適用範圍，評析定量抽水探討拘限含水層內抽水井井篩位置在非等向、均質之水文地質條件下，洩降水位變化情形，由結果顯示抽水井不同開篩情況下，於抽水井鄰近空間洩降水位為不一致。

因此本研究推導三維拘限含水層、均質、非等向中，抽水井及觀測井假設部分貫穿井之解析解，後續可依據現地設井不同開篩(抽水井及觀測井)部位，進行分級試水及抽水試驗，進行逆推估不同觀測井開篩部位水文地質微觀特性，反映現地真實之水文參數等應用。

參考文獻

1. Barry, D.A., and Parlange, J.-Y., "Approximation for the

hantush M function". Journal of hydrology. 227:287-291, 1999.

2. Darcy, H., Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon, Dalmont, Paris, 1856.

3. Hunt, B., "Dispersive Sources in Uniform Ground-Water Flow". J. Hydr. Div., ASCE, 104:75-85, 1978.

4. Hantush, M.S., Jacob, C.E., "Non-Steady Radial Flow in an Infinite Leaky Aquifer Trans. Am". Geophys. Union, 36:95-100, 1955.

5. Hantush, M.S., Jacob, C.E., "Non-Steady Radial Flow in an Infinite Leaky Aquifer". Trans. Am. Geophys. Union, 36:95-100, 1955.

6. Hantush, M.S., "Analysis of Data From Pumping Tests in Leaky Aquifer". Trans. Am. Geophys. Union, 37:702-714, 1956.

7. Hantush, M.S., "Drawdown around a partially penetrating well. Journal of the Hydraulic Division", American Society of Civil Engineers 87(4):83-98., 1961c.

8. Hantush, M.S., "Well in homogeneous anisotropic aquifer". Water Resources Research. 2(2):273-279, 1966a.

9. Heilweil, V.M., Hsieh, P.A., "Determining Anisotropic Transmissivity Using a Simplified Papadopoulos Method". Ground Water, 44, 749-753, 2006.

10. Hunt, B., "Calculation of The Leaky Aquifer Function". Journal of hydrology, 33:179-183, 1977.

11. Jang, C.S., Liu, C.W., Chia, Y., Cheng, Y.H. and Chen, Y.C., "Changes in hydrogeological properties in the Choushui River alluvial fan due to the 1999 Chi-Chi earthquake, Taiwan". Hydrogeology Journal, 16, 389-397, 2008.

12. Lin, H.T., K.Y. Ke, C.H. Chen, Y.C. Tan, and S.H. Wu., "Estimating anisotropic aquifer parameters by artificial neural networks". Hydrological Processes. 24:3237-3250, 2010.

13. Papadopoulos, I., "Nonsteady flow to a well in an infinite anisotropic aquifer, in Proceedings of Dubrovnik Symposium on the Hydrology of Fractured Rocks", edited, pp. 21-31, International Association of Scientific Hydrology, Dubrovnik, Yugoslavia, 1965.

14. Prodanoff, J.H.A., Mansur, W.J., Mascarenhas, F.C.B., "Numerical evaluation of Theis and Hantush-Jacob well functions". Journal of hydrology 318:173-183, 2006.

15. Theis, C.V., "The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using ground-water storage". Trans. Amer.

- Geophysical Union, 16 :519-524, 1935.
16. Tseng, P.H., and Lee, T.C., "Numerical evolution of exponential integral: Theis well function approximation". Journal of hydrology 205:38-51, 1998.
17. Way, S., and McKee, C.R., "In-situ determination of three- dimensional aquifer parameters". Ground Water 20, 5: 594-603, 1982.
18. Weeks, A.P., "Determining the ratio of horizontal to vertical permeability by aquifer-test analysis". Water Resources Research. 5(1):196-214, 1969.
19. Weeks, E.P., "Hydrologic properties of coal-beds in the Powder River Basin, Montana. II. Aquifer test analysis". Journal of Hydrology, 308:242-257, 2004.
20. Wilson, J., Miller, P.J., "Two-Dimensional Plume in Uniform Ground- Water Flow". J. Hydr. Div., ASCE, 104:503-514, 1978.
21. Wilson, J., Miller, P.J., "Two-Dimensional Plume in Uniform Ground-Water Flow". Closure. J. Hydr. Div., ASCE, 104:1567-1570, 1979.
- 收稿日期：民國 108 年 06 月 18 日
修正日期：民國 108 年 08 月 27 日
接受日期：民國 109 年 02 月 07 日