

擬譜法分析孔隙介質二相流之最佳震動控制

PSEUDOSPECTRAL METHOD FOR SOLVING SEISMIC FORCE OPTIMAL CONTROL PROBLEM OF POROUS MEDIA
TWO-PHASE FLOW

國立臺灣大學
生物環境系統工程學系
碩士

蔡 昊 宸
Hao-Cheng Tsai

國立臺灣大學
生物環境系統工程學系
副教授

胡 明 哲*
Ming-Che Hu

國立臺灣大學
生物環境系統工程學系
副教授

許 少 瑜
Shao-Yiu Hsu

摘 要

本研究建構擬譜法以處理最佳化控制問題，擬譜法的分析過程先離散化最佳化函數及其限制條件，並選取適當之節點逼近，便能使原問題轉變為離散之最佳化問題，再利用非線性最佳化演算法求解，便能得到此最佳控制問題之最佳控制解。本研究利用孔隙介質二相流之最佳震動控制問題進行案例分析，在多孔隙介質內的油滴因為毛細作用的抗力而被困在毛細管中不能輕易被抽出，因此在抽取過程中會額外施加一振動頻率，使油滴產生共振抵抗毛細作用的抗力，以提升油滴抽取的效率。本研究的最佳控制問題之控制變數為調整額外施加之振動頻率與外力，限制式為使油滴達到可抽出之最小距離，再以抽取過程中最低能量消耗為目標函數，本控制問題之最佳解將可提供油滴的最佳震動抽取控制。

關鍵詞：擬譜法、最佳控制、孔隙介質二相流

* 通訊作者 · 國立臺灣大學生物環境系統工程學系副教授
106 台北市大安區羅斯福路四段 1 號 · mchu@ntu.edu.tw

PSEUDOSPECTRAL METHOD FOR SOLVING SEISMIC FORCE OPTIMAL CONTROL PROBLEM OF POROUS MEDIA TWO-PHASE FLOW

Hao-Cheng Tsai

National Taiwan University
Department of
Bioenvironmental Systems
Engineering

Ming-Che Hu*

National Taiwan University
Department of
Bioenvironmental Systems
Engineering

Shao-Yiu Hsu

National Taiwan University
Department of
Bioenvironmental Systems
Engineering

ABSTRACT

This research aims to establish pseudospectral method to solve optimal control problems. Pseudospectral method converts optimal control problems into a nonlinear programming models, and then the optimal solutions of the models can be determined. The case study of this research constructs an seismic force optimal control problem of porous media two-phase flow. In the process of oil extraction, some oil might be remained in the crust because of the capillary tension and resistance of the in the porous media. To eliminate the trapped oil in the porous media, a excitation frequency is applied and causes oil blobs resonance. Because of the resonance, oil blobs can easily cancel out the resistance of capillarity and tension force. The seismic force optimal control model minimizes the energy consumption by adjusting the excitation frequency and extracting force.

Keywords: Pseudospectral method, Optimal control, Two-phase flow in porous media.

一、前言

本研究的目的是建構最佳控制(optimal control)問題的擬譜法(pseudospectral method)，應用於孔隙介質二相流(two-phase flow in porous media)，進行最佳震動控制問題[1-3]作為案例分析。擬譜法可用來解決最佳控制問題，其方法結合最佳化與數值方法，步驟先利用內插多項式離散化原函數，再選擇節點以逼近原函數特性，其後再用已知的內插多項式與節點導出微分矩陣與積分權重解決離散化中微分及積分的問題，最後再加入可容許誤差滿足此方法的存在性與收斂性[3]。

孔隙介質二相流模式有相當多的應用，許多能源均蘊藏於地下土壤中，為了分析能源開採的過程，例如：地熱能源隨著地下水在土壤移動、地下石油或頁岩油開採等議題，模擬液體或氣態在地下土壤運動過程的孔隙介質二相流模式，是非常重要的分析工具。另外，二氧化碳封存，經由高壓與高溫的處理，二氧化碳將轉換為超臨界流體，灌注並封存於地下土壤中，也可用孔隙介質二相流模式進行模擬及分析[4-6]。

為解決孔隙介質二相流的油滴被困在孔洞中之問題，在抽取油滴的過程中會額外施加一振動頻率使油滴產生共振抵抗毛細作用的抗力，此類的問題也可以被用在清除多孔隙介質中的汙染物或是去除水體裡的氣泡，本研究的案例分析是最佳震動控制問題，是以抽取者的立場考量如何以最小的能量消耗控制所施的外力以及振動頻率以滿足油滴的抽出條件。孔隙介質二相流的最佳震動控制問題之分析及結果可應用於能源開採、二氧化碳封存、及污染傳輸等多孔隙介質傳輸分析[4-6]。

二、研究方法

最佳控制是一個考慮連續時間觀念、針對控制環境進行最佳化的數學模式，最佳控制常被應用於航太、物理、電機、經濟的領域，分析系統之連續時間最佳控制。以下首先界定，研究問題的系統範圍[1-3]，接著建立此系統的最佳控制問題的數學模式，定義 $x(t)=[x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_m(t)]$ 為隨時間 t 變動的狀態變數、 $u(t)$ 為控制變數的向量，方程式(1.1)的 z 為最佳控制問題的總目標函數，為不同時間的目標函數 e 對時間之積分，限制式包含方程式(1.2)的微分方程式 f_i ，方程式(1.3)與(1.4)分別為一般的非動態之等式限制式 g 與不等式限制式 h 。首先界定所分析系統狀態的相互關係，並量化

的不同控制下的狀態間關係，接著建立一般的最佳控制數學模式(1.1)-(1.4)，本最佳控制問題尋求目標函數(1)的最大化，方程式(1.2)-(1.4)描述系統間的動態及非動態關係。

Maximize

$$z = \int e(x(t), u(t), t) dt \dots \dots \dots (1.1)$$

Subject to

$$\begin{aligned} d(x_i(t))/dt &= f_i(x(t), u(t), t) \\ \forall i &= 1, 2, 3, \dots, m \dots \dots \dots (1.2) \end{aligned}$$

$$g(x(t), u(t), t) = 0 \dots \dots \dots (1.3)$$

$$h(x(t), u(t), t) \leq 0 \dots \dots \dots (1.4)$$

以下建構最佳控制問題的擬譜法分析，擬譜法首先利用 Lagrange 內差多項式(interpolating polynomial)處理最佳控制問題，此 Lagrange 內差多項式是一個通過 n 個點的多項式(見方程式(2.1))，Lagrange 內差多項式包含 n 個 $(n-1)$ 次多項式，第一個多項式通過第一個點，其餘點為零，第二個多項式通過第二個點，其餘點為零，以此類推，到第 n 個多項式通過第 n 個點，其餘點為零。故所有時變(time dependent)的狀態變數及控制變數，均可轉化為 Lagrange 內差多項式的疊加，如方程式(2.2)及(2.3)所示。

$$L_{N,k}(t) = [(t-t_0) \dots (t-t_{k-1}) \dots (t-t_{k+1}) \dots (t-t_N)] / [(t_k-t_0) \dots (t_k-t_{k-1}) \dots (t_k-t_{k+1}) \dots (t_k-t_N)] \dots \dots \dots (2.1)$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^N [(L_{N,k}(t)) * (y_k)] \dots \dots \dots (2.2)$$

$$u(t) = \sum_{k=0}^N [(L_{N,k}(t)) * (v_k)] \dots \dots \dots (2.3)$$

Lagrange 內差多項式可以用來處理微分方程及積分方程式，首先將方程式(2.2)對時間進行微分，則此函數的微分即等於右端 n 個 $(n-1)$ 次多項式的微分總和(方程式(3.1)-(3.3))，另外再將方程式對時間進行積分，則此函數的微分即等於右端 n 個 $(n-1)$ 次多項式的積分總和，見方程式(3.4)-(3.6)。

$$d[x_N(t_i)]/dt = \sum_{k=0}^N [(d[(L_{N,k}(t_i))]/dt) * (y_k)] \dots \dots \dots (3.1)$$

$$d[x_N(t_i)]/dt = \sum_{k=0}^N [(D_{i,k}) * (y_k)] \dots \dots \dots (3.2)$$

$$D_{i,k} = d[(L_{N,k}(t_k))]/dt \dots \dots \dots (3.3)$$

$$g_N(y_k, v_k, t) = \sum_{k=0}^N [(L_{N,k}(t)) * (h_k(y_k, v_k))] \dots \dots \dots (3.4)$$

$$\begin{aligned} \int [g_N(y_k, v_k, t)] dt &= \sum_{k=0}^N [(\int_{-1}^1 [L_{N,k}(t)] dt) * (h_k(y_k, v_k))] \\ &= \sum_{k=0}^N [(w_k) * (h_k(y_k, v_k))] \dots \dots \dots (3.5) \end{aligned}$$

$$\text{where } w_k = \int_{-1}^1 [L_{N,k}(t)] dt. \text{ This is the weight for LGL quadrature integration } \dots \dots \dots (3.6)$$

以下舉一個通過已知三點的 Lagrange 內差多項式為例解釋其原理，假設此 Lagrange 內差多項式通過 (t_0, y_0) , (t_1, y_1) , (t_2, y_2) ，此 Lagrange 內差多項式將由以下三個多項式疊加而成，見方程式(4.1)。將 t_0, t_1, t_2 分別帶入第一個多項式，則可發現第一個多項式在第一個點通過 1，其餘點則通過 0，以此類推，第二個多項式在第二個點通過 1，其餘點則通過 0，第三個多項式在第三個點通過 1，其餘點則通過 0，見方程式(4.2)-(4.4)。故將上述三個多項式分別乘上 t_0, t_1, t_2 三點的高度 y_0, y_1, y_2 ，再作疊加後，即可得到通過已知三點的 Lagrange 內差多項式，此方程式將可通過 t_0, t_1, t_2 三點的高度 y_0, y_1, y_2 ，如方程式(4.5)-(4.8)。

$$l_0(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)}, l_1(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)}, \text{ and } l_2(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)} \quad (4.1)$$

$$l_0(t_0) = 1, l_1(t_0) = 0, l_2(t_0) = 0, \dots \quad (4.2)$$

$$l_0(t_1) = 0, l_1(t_1) = 1, l_2(t_1) = 0, \dots \quad (4.3)$$

$$l_0(t_2) = 0, l_1(t_2) = 0, l_2(t_2) = 1, \dots \quad (4.4)$$

$$P(t) = f(t_0) \cdot l_0(t) + f(t_1) \cdot l_1(t) + f(t_2) \cdot l_2(t) \quad (4.5)$$

$$P(t_0) = f(t_0) \cdot l_0(t_0) + f(t_1) \cdot l_1(t_0) + f(t_2) \cdot l_2(t_0) = f(t_0) = y_0 \quad (4.6)$$

$$P(t_1) = f(t_0) \cdot l_0(t_1) + f(t_1) \cdot l_1(t_1) + f(t_2) \cdot l_2(t_1) = f(t_1) = y_1 \quad (4.7)$$

$$P(t_2) = f(t_0) \cdot l_0(t_2) + f(t_1) \cdot l_1(t_2) + f(t_2) \cdot l_2(t_2) = f(t_2) = y_2 \quad (4.8)$$

故方程式(5.1)-(5.4)為 Lagrange 內差多項式的一般式，包含 n 個 $(n-1)$ 次多項式，第 i 個多項式在第 i 個點通過高度 1，其餘點則通過高度 0。

$$l_k(t) = \frac{(t-t_0) \cdots (t-t_{k-1})(t-t_{k+1}) \cdots (t-t_n)}{(t_k-t_0) \cdots (t_k-t_{k-1})(t_k-t_{k+1}) \cdots (t_k-t_n)} \quad (5.1)$$

$$l_i(t_j) = \delta_{ij}, \text{ where } \begin{cases} \delta_{ij} = 1 \text{ if } j = i \\ \delta_{ij} = 0 \text{ if } j \neq i \end{cases} \quad (5.2)$$

$$f(t_i) \times l_i(t_j) = f(t_i) \times \delta_{ij}, \text{ where } \begin{cases} f(t_i) \times \delta_{ij} = f(t_i) & \text{if } i = j \\ f(t_i) \times \delta_{ij} = 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (5.3)$$

$$P(t) = \sum_{k=0}^n f(t_k) l_k(t) \quad (5.4)$$

接著討論最佳內差點之選取，針對 Legendre 最佳內差點，不同的內差點選取將造成不同的估計誤差，相同的 Lagrange 內差多項式，配合不同的內差點選取，分別造成高誤差的左圖與低誤差的右圖，本研究採用 Legendre 最佳內差點，配合 Lagrange 內差多項式，此 Legendre 最佳內差點將可以最小化其估計誤差，則前述的微分與積分方程式可以用方程式(6.1)-(6.4)取代。以上所推導的類頻譜法，將用於求解孔隙管徑之最佳震動控制問題。

$$w_k = \int_{-1}^1 l_k(t) dt = \frac{2}{n(n+1)} \frac{1}{[L_n(t_k)]^2}, i = 0, 1, \dots, n. \quad (6.1)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} l_k(t) \right]_{t=t_i} = \frac{1}{n(n+1)L_n(t_k)} \left[\frac{n(n+1)L_n(t_i)}{t_i - t_k} - \frac{(t_i^2 - 1)L_n'(t_i)}{(t_i - t_k)^2} \right] \quad (6.2)$$

$$l_k(t)_{t=t_i} = \frac{L_n(t_i)}{L_n(t_k)} \frac{1}{t_i - t_k} \quad (6.3)$$

$$D_{ik} = \begin{cases} \frac{L_n(t_i)}{L_n(t_k)} \frac{1}{t_i - t_k} & i \neq k \\ -\frac{(n+1)}{4} & i = k = 0 \\ \frac{n(n+1)}{4} & i = k = n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6.4)$$

三、最佳震動控制問題

本研究的初步成果，已建立孔隙介質二相流之最佳震動控制問題，此模式是以微觀的角度來討論小尺度下一個油滴(或其他液體)在多孔隙的土壤中，因為壓力及震動力(seismic wave force)，所造成這個油滴的移動[4-6]。以下假設均勻的孔隙管徑及漸變的孔隙管徑的二種案例，分別討論孔隙介質二相流的最佳震動控制。

此最佳震動控制問題的目標函數為震動所需提供的能量，而震動能量等於油滴重量與震動加速度乘積，

再對移動位移進行積分，限制式包含油滴的位移對時間之常微分方程式，及油滴的初始條件及邊界條件(如下方程式)，本震動最佳控制問題在符合限制條件下，求解最小的震動能量，在均勻管徑及漸縮管徑的最佳震動控制問題中， $\bar{x}$ 為油滴可抽出之移動距離， t_N 表示最終時刻， a_f 為介質可承受之最大外力(加速度)，均勻的孔隙管徑之最佳震動控制問題可建構於方程式(7.1)-(7.6)。

Minimize

$$\int_0^{\bar{x}} \rho_n \pi R^2 L_n a_e(t) dx(t) = \int_0^{t_N} \rho_n \pi R^2 L_n a_e(t) \frac{dx(t)}{dt} dt \quad (7.1)$$

Subject to

$$-a_e(t) = -a_0 \cos(\omega t) - \frac{p_w(L, t) - p_w(0, t)}{\rho_n L_n} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \sqrt{2w_0 w_c} \frac{dx(t)}{dt} + w_0^2 x(t) \quad (7.2)$$

$$x(0) = 0 \quad (\text{初始條件}) \quad (7.3)$$

$$\frac{dx(0)}{dt} = 0 \quad (\text{初始條件}) \quad (7.4)$$

$$x(t_N) = \bar{x} \quad (\text{邊界條件}) \quad (7.5)$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \leq a_f \quad (\text{路徑控制}) \quad (7.6)$$

本研究利用類頻譜法求解上述的孔隙管徑之最佳震動控制問題，最佳控制問題包含目標函數及限制式，目標函數為積分方程式，限制式包含微分方程式及其他相關限制式，本研究先利用 Pseudospectral method 離散此最佳控制問題，則此最佳控制問題即可利用一般的最佳化方法求解。

首先假設固定所施加之外力與振動頻率並忽略一次微分項不考慮摩擦力所造成之影響，進行最佳化求得油滴振動的振動位置與時間的關係並以一施加外力更大之參數與原來的軌跡做比較，圖 1 顯示在振動頻率不變的條件下，油滴振動的軌跡且在施力較大的狀態下振幅亦會增加，且不影響油滴的振動趨勢，因此可預期在施力較大的條件下，油滴有更能被抽取出的趨勢。另外，確定限制式的正確性後，即可以所施外力與振動頻率為控制變數，以消耗能量最小為目標函數，並加入管壁對油滴造成摩擦力之能量損耗，選取 51 個節點模擬此運動過程如圖 2、圖 3 所示。圖 1-3 的結果可

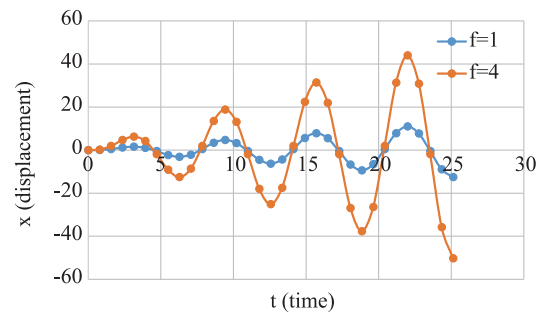


圖 1 不同外力下油滴之振動軌跡

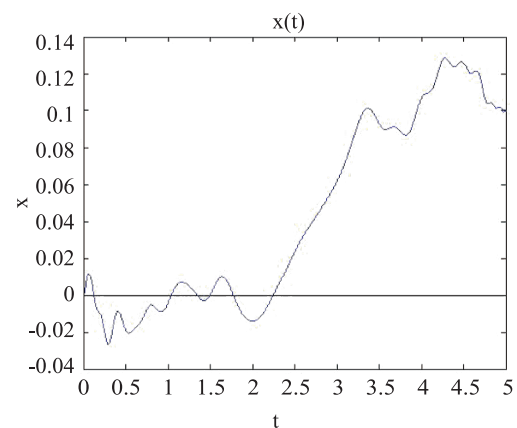


圖 2 在 5 秒內通過油滴可被抽出之最小位置之軌跡

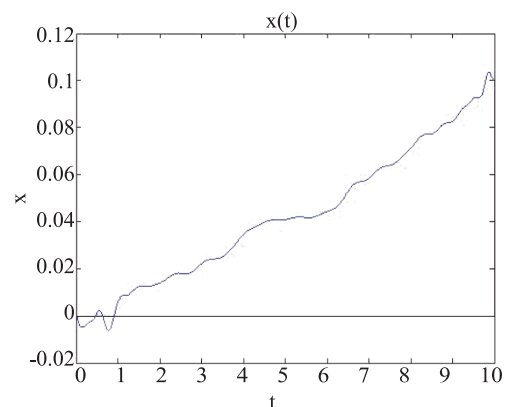


圖 3 在 10 秒內通過油滴可被抽出之最小位置之軌跡

應用於非飽和土壤、振動頻率不變的條件，最佳油滴震動頻率分析，對於時變的震動頻率控制、不同的飽和度、土壤質地之情況，只需輸入不同係數，本研究之分析架構與結果皆可應用與推廣。

四、結論

本研究介紹擬譜法以處理最佳化控制問題，步驟

包含原函數的離散化，及適當節點之選取，便可將最佳控制問題轉化為非線性最佳化問題進行求解。本研究再以孔隙介質二相流之最佳震動控制問題做為案例，最佳震動控制模型考慮油滴位移與施加外力及振動頻率之常微分方程關係式，並引入能量的概念，控制力與頻率的大小，求得最小的能量消耗。

在使用擬譜法離散原函數的過程中，假使選取的節點不足，便會在兩端端點附近產生振盪現象因此較容易產生誤差，而在模擬一運動過程為振動的情況下，此誤差更容易被隱藏在所模擬之運動過程中而錯估了實際運動的位置，因此往後所選之原函數期望以趨勢較為穩定之函數較為合適，又或者在訂定區間時選擇尺度較小的間隔，才較能反映原函數的走向。

實際狀況的振動方向會從不同方向與角度影響油滴運動，本研究模擬之油滴在毛細管之運動過程只考慮一維的移動，未來研究包含二、三維模型的推廣及其不確定分析。

符號定義

參數

i	狀態變數之參數， $i = 1, 2, 3, \dots, m$
n, k	Language 多項式之端點參數， $n, k = 0, 1, 2, 3, \dots, N$
t	時間參數
變數	
$L_{n,k}$	Language 多項式之端點
$D_{i,k}$	不同端點之 Language 多項式值
$u(t)$	控制變數
v_k	控制變數之 Language 多項式端點值
$x(t)$	狀態變數
y_k	狀態變數之 Language 多項式端點值
e, g, h	目標函數與限制式方程式
z	目標函數
a_f	介質可承受之最大外力(加速度)

t_N	最終時刻
$\bar{x}$	油滴可抽出之移動距離
$\bar{R}(t)$	平均半徑

參考文獻

1. Gong, Q., Kang, W., Ross, I.M., "A Pseudospectral Method for the Optimal Control of Constrained Feedback Linearizable Systems," IEEE Transactions On Automatic Control, Vol. 51, Issue 7, pp. 1115-1129, 2006.
2. Kang, W., Gong, Q., Ross, I.M., "On the convergence of nonlinear optimal control using pseudospectral methods for feedback linearizable systems," International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 17, Issue 14, pp. 1251-1277, 2007.
3. Ross, I.M., Karpenko, M., "A Review of Pseudospectral Optimal Control: From Theory to Flight," Annual Reviews in Control, Vol. 36, pp. 182-197, 2012.
4. Hilpert, M., "Capillary-induced resonance of blobs in porous media: Analytical solutions, Lattice-Boltzmann modeling, and blob mobilization," Journal of Colloid and Interface Science, Vol. 309, Issue 2, pp. 493-504, 2007.
5. Hilpert, M., Jirka, G.H., Plate, E.J., "Capillarity-induced resonance of oil blobs in capillary tubes and porous media," Geophysics, Vol.65, Issue 3, 2000.
6. Hsu, S.Y., Katz J., Hilpert, M., "Theoretical and experimental study of resonance of blobs in porous media," Geophysics, Vol. 77, Issue 5, 2012.

收稿日期：民國 108 年 06 月 18 日

修正日期：民國 109 年 02 月 11 日

接受日期：民國 109 年 02 月 16 日