

飽和土壤沉陷受重力影響下之孔彈性理論

Poroelastic Theory of Consolidation for Saturated Soil Incorporating Gravitational Body Forces

國立成功大學
水利及海洋工程學系
博士

趙南傑

Nan-Chieh Chao

國立成功大學
水利及海洋工程學系
博士班研究生

鄧教弘

Jiao-Hong Deng

國立成功大學
水利及海洋工程學系
碩士班研究生

程士豪

Shih-Hao Cheng

國立成功大學
水利及海洋工程學系
博士班研究生

王常勉

Chang-Mien Wang

國立成功大學
水利及海洋工程學系
特聘教授

羅偉誠*

Wei-Cheng Lo

摘要

土壤壓密沉陷是一種由土壤受外力因素影響導致孔隙介質及內含流體產生形變進而造成土壤體積減少的現象；本研究將以 Lo *et al.* (2005) 所推導出的多孔隙介質中含有兩相非混和、可壓縮且具有黏滯性流體之孔彈性理論方程式為基礎，並考慮密度及孔隙率的微小變化量重新推導出具重力影響之質量守恒及動量守恒方程式，並使兩方程式耦合推導出三維具重力影響之孔彈性土壤壓密沉陷理論；本研究將利用顯式有限差分法求解一維垂直方向下考慮雙邊排水的飽和土壤受固定載重影響所產生壓密沉陷情形，之後將其結果與前人所提出之一維飽和或受固定載重壓密沉陷理論之解析解結果進行比較驗證，發展一維孔彈性土壤壓密沉陷數值模式，根據研究結果發現在不考慮重力影響下的超額孔隙水壓結果中，壓力分布呈上下對稱之形式，而在考慮重力影響後，超額孔隙水壓呈不對稱分布，由上述本研究之成果可證明重力影響在壓密沉陷中是不可忽視的重要因素。

關鍵詞：孔彈性理論，飽和土壤壓密，重力。

*通訊作者，國立成功大學水利及海洋工程學系特聘教授，70101 台南市東區大學路 1 號，lowc@mail.ncku.edu.tw

ABSTRACT

Soil consolidation is a transient process by which soil volume is decreased due to the coupling between deformation of a porous medium and interstitial fluid flows. The effect of body force has been conventionally ignored in the consolidation theory of poroelasticity for saturated soils. The objective of this research is to develop the consolidation theory of poroelasticity for saturated soil which incorporates provided with gravitational body forces. In this research, based on the poroelastic theory of consolidation developed by Lo *et al.* (2005), the gravity effect is well taken into account in the diffusion equation that feature the excess pore water pressure as dependent variables, thus leading to additional first-order time-derivative terms. Considering a one-dimensional condition with external loads, numerical methods will be used to solve those equations with consolidation problem. The comparisons of the results with body forces and without body forces reveal that variations in the excess pore water pressure due to the existence of body forces increase with soil depth and more total settlement is induced when body forces is considered.

Keywords: Poroelasticity, Consolidation for Saturated soil, Gravitational body forces.

一、前言

地層下陷泛指地面向下沉陷的垂直地表變形，其發生的原因很多，可分為人為因素與自然因素，人為因素如超抽地下水、深基礎開挖及興建高樓大廈使土壤承受過重負載等；自然因素如地殼板塊運動、火山活動及地震等，其中造成地層下陷的原因多為人為因素，而地層下陷的發生常伴隨許多的災害，如地下水資源涵蓄能力降低、海水倒灌、土壤鹽化、防洪效益降低等，這些災害將會對流域水土資源造成相當大的損失。在土壤壓密理論的研究中，重力對於土壤壓密所造成的影響往往是被忽略的，僅有部分的相關文獻指出，當土壤受外力產生壓密沉陷時，土壤在較軟或厚度較厚的情況重力的影響較為顯著，在實際的土壤分層可由地質鑽探資料得知其分布與厚度，由資料顯示土體的厚度可由數十公尺甚至更厚，因此若能將重力對土壤壓密的影響也考量進去，應更能符合土壤壓密實際的情況，進而使其物理機制更為完善。

探討土壤壓密理論的研究主要是以 Terzaghi

(1925)及 Biot (1941)的理論為主要依據，其中 Terzaghi 理論的基本假設為土壤為均質且飽和、土壤顆粒及孔隙中的水均為不可壓縮、土壤的壓縮及排水僅能單向度、水的流動適用於達西定律；Biot 則認為飽和土壤在受到加載作用後所造成的土壤沉陷，其物理機制等同於孔彈性介質中的流體被擠壓排出，透過這樣的想法，建立飽和孔隙介質應力與應變關係式，同時考慮了土壤固體與孔隙間流體之間的交互作用，因此其壓密理論為一組互制的偏微分方程式，並將土壤壓密理論推展至三維，其理論的基本假設為土壤為均質且等向、應力與應變呈一線性關係、水的流動適用於達西定律、孔隙中的水可含有氣泡之情況及土壤的變形極小，且外部載重可隨時間改變。

前人對於土壤壓密及相關應用已經有相當好的理論與數值研究的探討，但在重力對於在孔隙介質的壓密研究中往往一直被忽略，Gibson *et al.* (1981)利用建立在 Lagrangian 架構中的非線性有限應變理論來解釋重力對一維飽和黏土壓密的影響，在與傳統壓密理論的結果相比，發現重力影響時所產生的超額孔隙水壓消散可能較慢，

由結果顯示傳統壓密理論有可能嚴重低估軟弱土層中的超額孔隙水壓，因此如果使用有效應力分析，估計的土壤抗剪強度將會被高估；Mei (1985)擴展了 Biot 的模式，允許土體本身的質量也可視為為外部荷載的一部份，並設置相對應的邊界值問題利用拉普拉斯轉換來進行求解，發現在一維土壤壓密理論下，重力的影響在質地較軟或厚度較厚的土體會較為顯著；Tuncay *et al.* (1998)利用建立於 Eulerian 架構中具重力相的擴散方程式，推導出重力對於較軟多孔隙介質的一維壓密理論；Tsai *et al.* (2006)利用孔彈性理論，研究當抽取地下水時所引起的水位下降，重力對砂岩地層的影響，其結果表明，重力的效應可以用 Lamé 常數，孔隙率以及土層厚度所構成的係數來表示，當土壤質地較軟或厚時，忽略重力的影響將低估土壤的沉陷量和增加的有效應力；Tseng *et al.* (2008)採用了孔彈性理論來評估黏土阻水層的壓密問題，該阻水層夾在兩個含水層之間，除了阻水層自身的重量之外，其沉陷也是由從頂部和底部含水層抽取地下水所導致；Lo *et al.* (2017)將流體和固體的密度和體積分量的變化作為相關應變量，用於定量研究重力對非飽和多孔隙介質壓密的影響，其研究結果表明，由於重力的存在而引起的超額孔隙水壓力的變化隨著土壤深度而增加，但是如果土層深度不夠大，這些變化不顯著。

本研究以 Lo *et al.* (2005)所推導出的孔隙介質中含有兩相非混合、可壓縮且具有黏滯性流體的孔彈性理論模式為基礎，當考慮孔隙介質內僅存在且充滿單一流體的情況下，可將控制方程式進行簡化，並考慮各相材料密度及孔隙率的微小變化量，將重力項導入控制方程式當中，進而推導出飽和土壤具重力影響之孔彈性理論模式；在求解控制方程式部分，本研究利用顯示有限差分法對控制方程式進行時間域及空間域的離散，並使用 Fortran 編譯數值模式，模擬飽和土壤在表面及底部分別與大氣及透水層接觸，受固定載重作用下產生壓密沉陷的情形，並比較考慮重力及不考慮重力的結果，探討重力對壓密沉陷過程中超額孔隙水壓及壓密沉陷量的影響。

二、研究理論

2.1 動量平衡方程式

本研究應用 Lo *et al.* (2005)提出連續體混合理論所推導出的孔隙介質中含有兩相非混合、可壓縮且具有黏滯性流體之孔彈性理論模式為基礎，在考慮孔隙介質內僅存在且充滿單一流體的情況下，對控制方程式進行簡化，其方程式可表示如下：

$$-R_{ff} \left(\frac{\partial \bar{u}_f}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial t} \right) = -\phi \bar{\nabla} p_f + \rho_f \phi \bar{g} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\sigma} = -[\rho_f \phi \bar{g} + \rho_s (1 - \phi) \bar{g}] \quad \dots\dots\dots (2)$$

其中下標 ζ ($= s, f$) 分別代表固體相與流體相， p_f 表示流體相的超額孔隙壓力； $\bar{u}_f$ 為流體相之位移向量； $\bar{u}_s$ 為固體相之位移向量； ϕ 為孔隙率； ρ_ζ 為 ζ 相之密度； R_{ff} ($\equiv -\phi^2 / b_f$) 表示流體相與固體相之間的黏滯耦合阻力參數， b_f ($\equiv k_s / \eta_f$) 為流體的相對運動參數， η_f 為流體相的動力黏滯係數， k_s 為孔隙介質的滲透係數； $\bar{\sigma}$ 為孔隙介質的總應力張量。

在壓密沉陷理論 (Biot, 1941; Terzaghi, 1943; Wang, 2000) 中，假設孔隙介質受應力所產生變形為微小形變，因此各相密度及孔隙率可拆解為初始量 (ρ_ζ^0 與 ϕ^0) 及微小變化量 ($\Delta \rho_\zeta$ 與 $\Delta \phi$) 兩部份，其表示如下：

$$\rho_\zeta = \rho_\zeta^0 + \Delta \rho_\zeta \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\phi = \phi^0 + \Delta \phi \quad \dots\dots\dots (4)$$

將(3)式及(4)式代入(1)式及(2)式後，並根據小變形理論忽略二次項僅保留一次項便可得：

$$-R_{ff} \left(\frac{\partial \bar{u}_f}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial t} \right) = -\phi^0 \bar{\nabla} p_f + \Delta \rho_f \phi^0 \bar{g} + \Delta \phi \rho_f^0 \bar{g} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\sigma} = -[\Delta \rho_f \phi^0 \bar{g} + \Delta \phi \rho_f^0 \bar{g} + \Delta \rho_s (1 - \phi^0) \bar{g} + \Delta \phi \rho_s^0 \bar{g}] \quad \dots\dots\dots (6)$$

(5)式及(6)式即為孔彈性理論中飽和土壤具重力之動量平衡方程式。

2.2 質量平衡方程式

根據 Lo *et al.* (2005)所提出兩相非混合流體在孔隙介質中的質量平衡方程式，當考慮均質的孔隙介質僅存在單一流體時可將方程式簡化如下：

$$\frac{\partial(\rho_\alpha \phi)}{\partial t} + \rho_\alpha \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_\alpha = 0 \quad (\alpha = s, f) \quad (7)$$

對等號兩邊對時間積分後，將將(3)式及(4)式代入(7)式後可得到下列各式：

$$\rho_s^0 \Delta \phi + (1 - \phi^0) \Delta \rho_s = -\rho_s^0 (1 - \phi^0) e \quad (8)$$

$$\rho_f^0 \Delta \phi + \phi^0 \Delta \rho_f = -\rho_f^0 \phi^0 \varepsilon \quad (9)$$

其中 $e (= \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s)$ 為固體相的體積應變量； $\varepsilon (= \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_f)$ 表示流體的體積應變量；(8)式及(9)式即為孔彈性理論中具重力之質量平衡方程式。

2.3 應力-應變關係式

Biot (1956)所提出孔隙介質含有單一流體之線性應力-應變關係如下所示：

$$\bar{\bar{t}}_s = 2G\bar{\bar{e}} + (Ae + Q\varepsilon)\bar{\bar{\delta}} \quad (10)$$

$$-\phi p_f = Qe + R\varepsilon \quad (11)$$

其中 $\bar{\bar{e}} (= (\vec{\nabla} \vec{u}_s + \vec{\nabla} \vec{u}_s^T) / 2)$ 表示為固體相的應變張量，上標 T 代表轉置；係數 A 、 Q 及 R 為彈性模數，其關係式表示如下：

$$A \equiv \frac{(1 - \phi)K_s(1 - \phi - \frac{K_b}{K_s}) + \phi(\frac{K_s}{K_f})K_b}{1 - \phi - \frac{K_b}{K_s} + \phi \frac{K_s}{K_f}} - \frac{2}{3}G \quad (12)$$

$$Q \equiv \frac{(1 - \phi - \frac{K_b}{K_s})\phi K_s}{1 - \phi - \frac{K_b}{K_s} + \phi \frac{K_s}{K_f}} \quad (13)$$

$$R \equiv \frac{\phi^2 K_s}{1 - \phi - \frac{K_b}{K_s} + \phi \frac{K_s}{K_f}} \quad (14)$$

其中 G 為孔隙介質的剪力模數、 K_b 為孔隙介質統體模數、 K_s 為固體相統體模數及 K_f 為流體相統體

模數；根據 Biot (1962)的理論，總應力張量可以定義為固體相與流體相之應力張量之合，其表示如下：

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{t}}_s - \phi p_f \bar{\bar{\delta}} \quad (15)$$

其中 $\bar{\bar{t}}_s$ 為固體相之應力張量； $\bar{\bar{\delta}}$ 為單位張量； p_f 為超額孔隙流體壓力。

將(10)式及(11)式代入(15)式中，可將總應力張量改寫成下列形式：

$$\bar{\bar{\sigma}} = 2G\bar{\bar{e}} + [(A + Q)e + (Q + R)\varepsilon]\bar{\bar{\delta}} \quad (16)$$

將(11)式重新整理後， ε 將可由 p_f 及 e 的表示：

$$\varepsilon = -q_1 p_f - q_2 e \quad (17)$$

上式中係數 q_1 及 q_2 表示如下：

$$q_1 = \frac{\phi}{R} = \frac{1}{\phi M} \quad (18)$$

$$q_2 = \frac{Q}{R} = \frac{\alpha}{\phi} - 1 \quad (19)$$

其中 $\alpha (= 1 - K_b / K_s)$ 表示為 Biot-Willis 係數 (Biot and Willis, 1957)， $M (= Q / \phi (\alpha - \phi))$ 為 Biot 彈性模數 (Biot, 1962)。

將(17)式代入(16)式，總應力張量可改寫成下列形式：

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}} &= 2G\bar{\bar{e}} + [(A - q_2 Q)e + (-q_1 Q - q_1 R)p_f]\bar{\bar{\delta}} \\ &= 2G\bar{\bar{e}} + [(K_b - \frac{2}{3}G)e - \alpha p_f]\bar{\bar{\delta}} \end{aligned} \quad (20)$$

(20)式即為飽和土壤的線性應力-應變關係式。

2.4 控制方程式

對(5)式等號兩邊做散度運算可得：

$$-R_{ff} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial e}{\partial t} \right) = -\phi^0 \vec{\nabla}^2 p_f - \phi^0 g \frac{\partial \Delta \rho_f}{\partial z} - \rho_f^0 g \frac{\partial \Delta \phi}{\partial z} \quad (21)$$

將(17)式代入(9)式可得：

$$\rho_f^0 \Delta \phi + \phi^0 \Delta \rho_f = \rho_f^0 \phi^0 (q_1 p_f + q_2 e) \dots\dots\dots (22)$$

之後將(22)式代入(21)式後整理可得：

$$\frac{1}{M} \frac{\partial p_f}{\partial t} + \alpha \frac{\partial e}{\partial t} - b_f \rho_f^0 g (q_1 \frac{\partial p_f}{\partial z} + q_2 \frac{\partial e}{\partial z}) = b_f \bar{\nabla}^2 p_f \dots\dots\dots (23)$$

將(22)式代入(6)式後可得：

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\sigma} + (\Theta_s e + \Theta_f p_f) \bar{k} = 0 \dots\dots\dots (24)$$

其中 Θ_s 和 Θ_f 為飽和土壤壓密中受重力影響之參數，其定義如下：

$$\Theta_s = [\rho_s^0 (1 - \phi^0) - \rho_f^0 \phi^0 q_2] g \dots\dots\dots (25)$$

$$\Theta_f = -\rho_f^0 \phi^0 q_1 g \dots\dots\dots (26)$$

將(20)式代入(24)式並對等號兩邊作散度運算可得：

$$(K_b + \frac{4}{3} G) \bar{\nabla}^2 e - \alpha \bar{\nabla}^2 p_f + \Theta_s \frac{\partial e}{\partial z} + \Theta_f \frac{\partial p_f}{\partial z} = 0 \dots\dots (27)$$

(23)式及(27)式即為以 e 和 p_f 為變數的具重力影響三維飽和土壤壓密沉陷之耦合偏微分方程組，相較於 Biot 壓密沉陷理論(Biot, 1941)，本研究增加了具有 Θ_s 和 Θ_f 的重力項，當忽略重力影響時 Θ_s 和 Θ_f 等於 0，經化簡後的方程組與 Biot 壓密沉陷理論相同，因此此方程組可視為在考慮重力影響下 Biot 壓密沉陷理論的延伸。

在考慮一維情況下，土壤受垂直 z 方向應力進行壓密沉陷(即 $e_{xx} = e_{yy} = 0$ ， $e = e_{zz} = \partial w / \partial z$)，其中 w 為土體沿垂直 z 方向的位移量，故可將(23)式及(27)式改寫為下列形式：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{M} \frac{\partial p_f}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ & - b_f \rho_f^0 g [q_1 \frac{\partial p_f}{\partial z} + q_2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)] \dots\dots\dots (28) \\ & = b_f \frac{\partial^2 p_f}{\partial z^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (K_b + \frac{4}{3} G) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) - \alpha \frac{\partial^2 p_f}{\partial z^2} \\ & + \Theta_s \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + \Theta_f \frac{\partial p_f}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

(28)式及(29)式即為考慮重力情況下飽和土壤受垂直固定載重之一維壓密理論控制方程式，而本研究基於小變形理論，假設孔彈性介質承受外部載重後僅產生微小形變量，因此所有相關物理參數(R_{ff} 、 α 、 K_b 、 G 、 M 及 b_f)皆不隨外部載重改變且視為定值(Biot,1941; Terzaghi,1943; Wang,2000)。

2.5 初始條件與邊界條件

本研究中定義 $z = h$ 為土體頂部， $z = 0$ 為土體底部，當土體頂部受到外部垂直載重 $-p^*$ 作用的瞬間(負號表示方向向下)，根據 Biot (1941)的假設，加載瞬間($t = 0$)土壤為不排水狀態，此時土體內流體含量不發生改變($e = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$)，因此可將(17)式及(20)式改寫為下列形式：

$$p_f(z, 0) = -\frac{(1 + q_2)}{q_1} \frac{\partial w}{\partial z} = -\alpha M \frac{\partial w}{\partial z} \dots\dots\dots (30)$$

$$\sigma_{zz}(z, 0) = -p^* = K_v^{(u)} \frac{\partial w}{\partial z} \dots\dots\dots (31)$$

其中 $K_v^{(u)} (= K_b + \frac{4}{3} G + \alpha^2 M)$ 為不排水條件下垂直方向土壤統體模數，將(30)式及(31)式代入(24)式可得：

$$\begin{aligned} & K_v^{(u)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \Big|_{(z, 0)} + [\Theta_s - \alpha M \Theta_f] \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \Big|_{(z, 0)} = 0 \\ & \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

上式為一階線性常微分方程式，其解的形式可表示如下所示：

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \Big|_{(z, 0)} = c_1 \times \exp \left(-\frac{\Pi}{K_v^{(u)}} z \right) \dots\dots\dots (33)$$

其中 $\Pi (= \Theta_s - \alpha M \Theta_f)$ 為與重力相關之飽和土壤參數，而在土體頂部其垂直方向總應力 $\sigma_{zz}(h, t)$ 即為施加於土體的固定載重 $-p^*$ ，將(33)式代入(31)式即可求得待定係數 C_1 ：

$$c_1 = -\frac{p^*}{K_v^{(u)}} \exp \left(\frac{\Pi}{K_v^{(u)}} h \right) \dots\dots\dots (34)$$

因此可得到土體垂直應變量的初始條件：

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\bigg|_{(z,0)} = -\frac{p^*}{K_v^{(u)}} \times \exp\left[-\frac{\Pi}{K_v^{(u)}}(h-z)\right] \dots (35)$$

將(35)式代入(30)式可得超額孔隙水壓的初始條件：

$$p_f(z,0) = \gamma p^* \exp\left[-\frac{\Pi}{K_v^{(u)}}(h-z)\right] \dots (36)$$

其中 $\gamma (= \alpha M / K_v^{(u)})$ 為流體的載重效率。

本研究考慮飽和土壤受壓密沉陷過程中，土體為雙邊排水(即土壤頂部與底部可透水且與大氣接觸)，土體頂部與底部超額孔隙水壓的邊界條件可由下列數學形式表示：

$$p_f(0,t) = p_f(h,t) = 0 \dots (37)$$

土體頂部所受的總應力為固定載重 $-p^*$ ，其數學形式如下所示：

$$\sigma_{zz}(h,t) = -p^* \dots (38)$$

將(37)式及(38)式代入(20)式整理後可得：

$$\frac{\partial w}{\partial z}\bigg|_{(h,t)} = \frac{-p^*}{K_b + \frac{4}{3}G} \dots (39)$$

對於土體底部而言，所受應力為載重所造成應力及因各相密度變化及體積分率變化所造成的垂

直力兩者加總而成，在考慮一為情況下對(6)式進行空間積分可得：

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(0,t) &= -p^* - \int_0^h g[\Delta\rho_s(1-\phi) + \Delta\phi\rho_s + \Delta\rho_f\phi + \Delta\phi\rho_f] dz \\ &\dots (40) \end{aligned}$$

將(8)式、(9)式、(17)式及(20)式代入(40)式進行變數邊換可得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z}\bigg|_{(0,t)} &= \frac{-p^*}{K_b + \frac{4}{3}G} + \frac{1}{K_b + \frac{4}{3}G} \int_0^h [\Theta_s \frac{\partial w}{\partial z} + \Theta_f p_f] dz \\ &\dots (41) \end{aligned}$$

(39)式及(41)式即為土體垂直應變率之邊界條件。

三、數值模式

3.1 數值離散與模式建構

本研究應用有限差分法，在空間域和時間域分別使用中央差分法及前項差分法可將(28)式及(29)式離散為下列形式：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{M} \frac{p_{f,k}^{n+1} - p_{f,k}^n}{\Delta t} + \alpha \frac{w'_{k+1}^{n+1} - w'_k{}^{n+1}}{\Delta t} \\ &= b_f \frac{p_{f,k+1}^n - 2p_{f,k}^n + p_{f,k-1}^n}{\Delta z^2} + b_f \rho_f^0 g q_1 \frac{p_{f,k+1}^n - p_{f,k-1}^n}{2\Delta z} + b_f \rho_f^0 g q_2 \frac{w'_{k+1}^n - w'_k{}^n}{2\Delta z} \dots (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(K_b + \frac{4}{3}G) \frac{w'_{k+1}^{n+1} - 2w'_k{}^{n+1} + w'_{k-1}{}^{n+1}}{\Delta z^2} - \alpha \frac{p_{f,k+1}^{n+1} - 2p_{f,k}^{n+1} + p_{f,k-1}^{n+1}}{\Delta z^2} \\ &+ \Theta_s \frac{w'_{k+1}^{n+1} - w'_k{}^{n+1}}{2\Delta z} + \Theta_f \frac{p_{f,k+1}^{n+1} - p_{f,k-1}^{n+1}}{2\Delta z} = 0 \dots (43) \end{aligned}$$

(42)式及(43)式即為離散後之控制方程式，其中 Δz 為格點間距； Δt 為時間步間距； $w'_k{}^n$ 及 $p_{f,k}^n$ 表示時間步在 $n (=0, 1, \dots, N_T)$ 時刻位於 $k (=1, 2, \dots, k_T)$ 格點上的土體垂直應變率($w' \equiv \partial w / \partial z$)及超額孔隙流體壓力；下標 $k=1$ 及 $k=k_T$ 分別表示空間域中的下邊界及上邊界，上標 $n=0$ 及 $n=N_T$ 則

分別代表初始時間步和總時間步。

運用相同方法可將初始條件((35)式及(36)式)及邊界條件((38)式、(39)式及(41)式)進行數值離散，而土體垂直應變率之底部邊界條件中具有一積分項，本研究利用梯形法則進行數值積分，其初始條件及邊界條件離散後結果如下所示：

$$w'_{k=0} = -\frac{p^*}{K_v^{(u)}} \exp\left[\frac{\Pi}{K_v^{(u)}}(h - (k-1)\Delta z)\right] \dots\dots\dots (44)$$

$$p_{f\ k=0} = \gamma p^* \exp\left[\frac{\Pi}{K_v^{(u)}}(h - (k-1)\Delta z)\right] \dots\dots\dots (45)$$

$$p_{f\ 1}^n = p_{f\ k_T}^n = 0 \dots\dots\dots (46)$$

$$w'_{k_T}^n = \frac{-p^*}{K_b + \frac{4}{3}G} \dots\dots\dots (47)$$

$$w'_1^n = -\frac{p^*}{K_b + \frac{4}{3}G} + \frac{1}{K_b + \frac{4}{3}G} \left[\Theta_s \left(\frac{1}{2} w'_1^n + \sum_2^{k_T-1} w'_k{}^n + \frac{1}{2} w'_{k_T}{}^n \right) \Delta z + \Theta_f \left(\frac{1}{2} p_{f\ 1}^n + \sum_2^{k_T-1} p_{f\ k}^n + \frac{1}{2} p_{f\ k_T}^n \right) \Delta z \right] \dots\dots\dots (48)$$

其中(44)式及(45)式為離散後之初始條件；(46)式、(47)式及(48)式為離散後之邊界條件。

根據數值離散之結果可得下列矩陣形式：

$$A_{m \times m} X_{m \times 1}^{n+1} = B_{m \times 1}^n \dots\dots\dots (49)$$

其中 $A_{m \times m}$ 表示 $m \times m$ 的係數矩陣 ($m = 2K_T$)； $X_{m \times 1}^{n+1}$ 為 $m \times 1$ 變數矩陣，上標 $n+1$ 表示未知時刻； $B_{m \times 1}^n$ 是 $m \times 1$ 常數矩陣，上標 n 表示已知時刻，本研究運用高斯-喬登消去法計算係數矩陣之反矩陣 $A_{m \times m}^{-1}$ ，之後將等號兩邊同乘 $A_{m \times m}^{-1}$ 可得未知時刻的變數矩陣，當 $n=0$ 時將初始條件代入常數矩陣中，即可得下一時刻之變數矩陣，矩陣內元素即為數值模式所求的解，之後將解作為已知時刻的值並代入常數矩陣中，便可求解未知時刻之變數矩陣，不斷重複此步驟即可得到任意時刻之數值解，所求得之解其中之一為土體垂直應變率，透過數值積分即可得到 t 時間 ($t = n\Delta t$) 的土體沉陷量 $s(t)$ 如下式所示：

$$\begin{aligned} s(t) &= -\int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dz \\ &= -\frac{w'_1{}^n}{2} \Delta z - \sum_{k=2}^{k_T-1} w'_k{}^{n+1} \Delta z - \frac{w'_{k_T}{}^n}{2} \Delta z \dots\dots\dots (50) \end{aligned}$$

本研究將模擬飽和黏土受垂直固定載重而產生壓密沉陷之情形，其模式所需相關參數如表 1、表 2 及表 3 所示。

3.2 模式驗證

當不考慮重力時(即模式中 $g=0$)，其控制方程式與 Biot (1941)提出的飽和土壤壓密沉陷孔隙性理論相同，因此本研究將利用 Biot (1941)所提

表 1 相關控制參數

垂直固定載重 p^* (MPa)	0.1
土體厚度 h (m)	100
時間步間距 Δt (s)	1
格點間距 Δz (m)	0.25
重力加速度 g (m/s ²)	0.98

表 2 模式相關材料參數

	固體	水
統體模數 K_a (MPa)	3.5×10^4	2.25×10^3
密度 ρ_a (kg/m ³)	2650	997
黏滯係數 η_s (Ns/m ²)	-	0.001

資料來源：Lo *et al.*, 2007

表 3 黏土土壤參數

孔隙率 ϕ	0.475
滲透係數 k_s (m ²)	1.699×10^{-14}
孔隙介質體積模數 K_b (MPa)	4.5
剪力模數 G (MPa)	2.4

資料來源：Rawls *et al.*, 1992

出之解析解對模式進行驗證，圖 1 為不同時間超額孔隙水壓隨土體深度變化之數值解與解析解比較，圖 2 為土體沉陷量隨時間變化之數值解與解析解比較，從圖中可觀察發現數值模擬結果與解析解結果高度吻合，為更進一步驗證模式準確度，本研究利用相對誤差參數 RE 來比較兩者間差異，其定義如下所示

$$RE = \frac{V_n - V_e}{V_e} \times 100\% \dots\dots\dots (51)$$

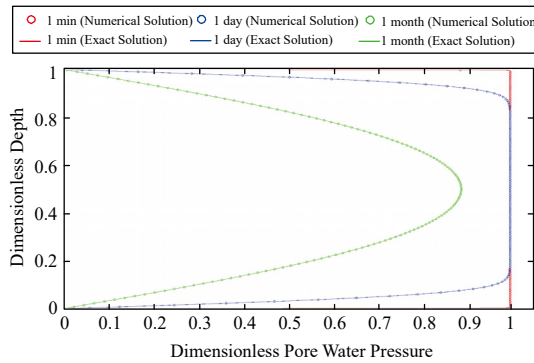


圖 1 無因次化超額孔隙水壓(p_f/p^*)隨無因次土體深度(z/h)變化之數值解與解析解比較

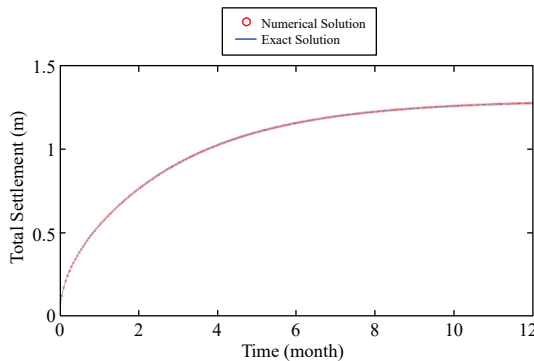


圖 2 土體沉陷量隨時間變化之數值解與解析解比較

其中 V_n 及 V_e 分別為不考慮重力影響情況下任意物理量(超額孔隙水壓或土體沉陷量)之數值解與解析解,圖 3 及圖 4 即為超額孔隙水壓及土體沉陷量之相對誤差,由圖 3 可發現在壓密初期超額孔隙水壓在土體邊界處有比較明顯的誤差,但誤差將隨時間減少,從圖 4 可觀察到土體沉陷量也是在壓密初期有較明顯的相對誤差,而其誤差亦隨時間減少,然而不論超額孔隙水壓或是土體沉陷量,其數值解與解析解的相對誤差都小於 0.05%及 0.02%,根據上述的驗證結果可證明本研究所建構之數值模式具有高度的準確性。

四、結果與討論

本研究分別在考慮及不考慮重力情況下,模

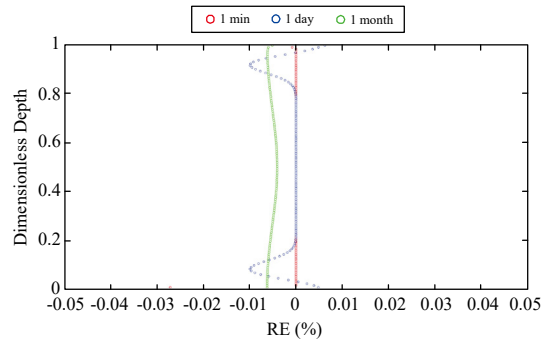


圖 3 超額孔隙水壓相對誤差隨無因次土體深度變化

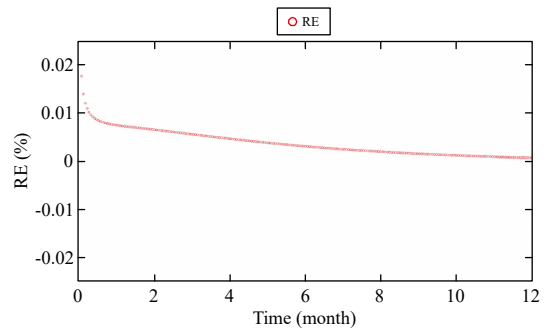


圖 4 土體沉陷量相對誤差隨時間變化

擬土壤在受垂直固定載重壓密沉陷情形,為更進一步量化重力對土體壓密沉陷的影響,本研究利用相對差異參數 RD 來表示超額孔隙流體壓力及土體沉陷量受重力影響的程度,相對差異參數定義如下所示:

$$RD = \frac{V_g - V_n}{V_n} \times 100\% \dots\dots\dots (52)$$

其中 V_g 表示考慮重力情況下任意物理量(超額孔隙流體壓力或土體沉陷量)的數值解,而相對差異的值越大則表示任意物理量受重力的影響越強。

4.1 模擬結果與討論

圖 5 為分別在考慮及不考慮重力影響情況下,超額孔隙水壓隨土體深度及時間變化的分佈圖,為更清楚比較考慮及不考慮重力影響兩者間的

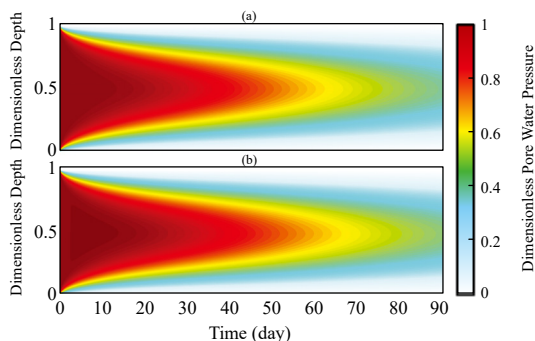


圖 5 (a)不考慮重力影響(b)考慮重力影響，無因次化超額孔隙水壓(p_f/p^*)隨時間及深度變化分佈

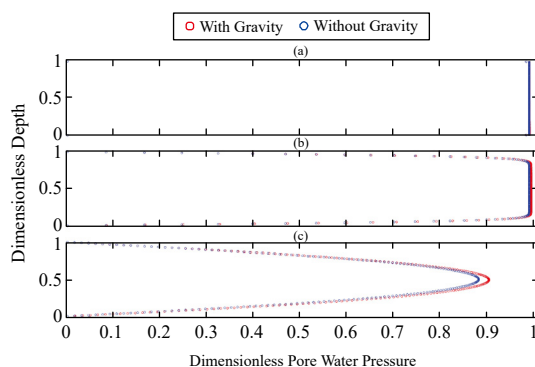


圖 6 時間(a) 1 分；(b) 1 天；(c) 1 個月，受重力影響及不受重力影響無因次化超額孔隙水壓(p_f/p^*)隨深度變化比較

差異，本研究分別擷取 1 分鐘、1 天及 1 個月的超額孔隙水壓資料進行比較如圖 6 所示，並根據擷取資料計算超額孔隙水壓的相對差異如圖 7 所示，從超額孔隙水壓模擬結果可發現當忽略重力時超額孔隙水壓隨深度變化的曲線為上下對稱的圖形，當考慮重力後超額孔隙水壓因重力影響而增加，造成超額孔隙水壓隨深度變化的曲線向底部偏移，呈現上下不對稱的圖形，也因重力的影響使超額孔隙水壓的值變大，導致超額孔隙水壓隨時間消散得較慢；比較不同時間的其相對差異曲線可發現，重力的影響將隨時間及深度而增強；圖 8 為考慮及不考慮重力影響的土體沉陷量

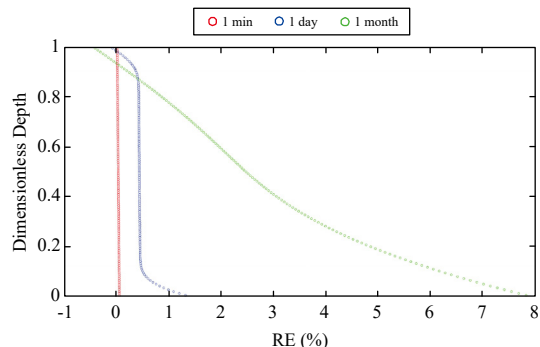


圖 7 不同時間超額孔隙水壓隨深度變化之相對差異

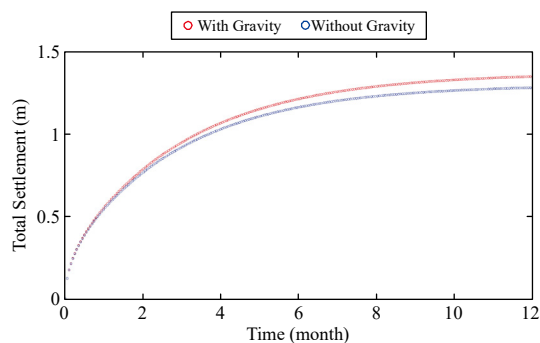


圖 8 受重力影響及不受重力影響隨時間變化之土體沉陷量比較

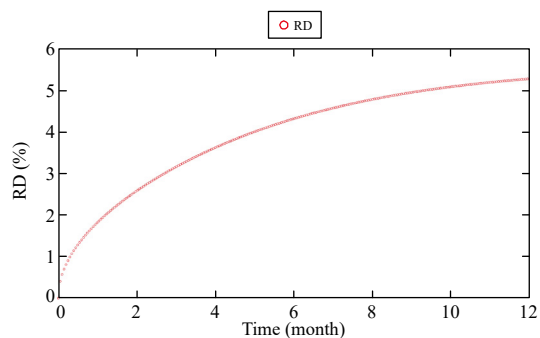


圖 9 隨時間變化之土體沉陷量相對差異

隨時間變化圖，本研究更進一步計算各土體沉陷量隨時間變化的相對差異如圖 9 所示，根據土體沉陷量的模擬結果可發現，相較於不考慮重力的

結果，當考慮重力時土體將因受重力的影響而產生額外的沉陷量，而相對差異將隨時間上升，並於一年左右趨近於穩定值，其值約 5.5%，由此可說明重力影響對於土體沉陷量是漸漸增強後不久便趨於穩定狀態。

綜合比較超額孔隙水壓及土體沉陷量的模擬結果可知，重力對超額孔隙水壓的影響將隨時間漸增，但重力對土體沉陷量的影響卻隨時間漸減，此現象的發生是由土體內流體超額孔隙壓力隨時間消散所造成，土體沉陷量是由土體垂直應變率積分而成，而土體垂直應變率與流體超額孔隙壓力的關係如(29)式所示，從式中可發現若流體超額孔隙壓力隨時間消散後，則超額孔隙流體壓力對土體垂直應變率及土體沉陷量的影響亦隨時間減小，即便重力對流體超額孔隙壓力影響隨時間增大，但土體沉陷量的影響將隨時間減小。

結 論

本研究應用 Lo *et al.* (2005) 提出連續體混合理論所推導出的孔隙介質中含有兩相非混合、可壓縮且具有黏滯性流體之孔彈性理論模式為基礎，利用考慮孔隙率及密度微小變化，在飽和條件下推導出具重力影響之動量平衡方程式及質量平衡方程式，之後與 Biot (1956) 所提出的線性應力應變關係式結合，進而發展出具重力影響之飽和土壤壓密理論，並在考慮一維情況下，利用有限差分法求得數值解，探討重力對於土壤在壓密沉陷的影響，根據模擬結果可發現，重力影響將使土體內的超額孔隙水壓沿深度增加，造成原本上下對稱的超額孔隙水壓隨深度變化之曲線向下偏移，超額孔隙水壓消散所需時間將增加，而重力影響將使土體沉陷量增加，但增加量在短時間內會趨於一穩定值，而由於土體內流體將隨時間漸漸消散，雖然重力對流體超額孔隙壓力影響隨時間增大，但土體沉陷量的影響將隨時間減小。

參考文獻

1. Biot, M.A., "General Theory of Three-Dimensional Consolidation," *Journal of applied physics*, Vol. 12, No. 2, pp. 155-164, 1941.
2. Biot, M.A., "Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid," *Journal of applied physics*, Vol. 26, No. 2, pp. 182-185, 1955.
3. Biot, M.A., "Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media," *Journal of applied physics*, Vol. 33, No. 4, pp. 1482-1498, 1962.
4. Gibson, R.E., Robert, L.S., and Kenneth, W.C., "The Theory of One-Dimensional Consolidation of Saturated Clays. II. Finite Nonlinear Consolidation of Thick Homogeneous Layers," *Canadian geotechnical journal*, Vol. 18, No. 2, pp. 280-293, 1981.
5. Lo, W.C., Sposito, G., and Majer, E., "Wave Propagation Through Elastic Porous Media Containing Two Immiscible Fluids," *Water Resources Research*, Vol. 41, No. 2, 2005.
6. Lo, W.C., Yeh, C.L., and Tsai, C.T., "Effect of Soil Texture on the Propagation and Attenuation of Acoustic Wave at Unsaturated Conditions," *Journal of hydrology*, Vol. 338, pp. 273-284, 2007.
7. Mei, C.C., "Gravity Effects in Consolidation of Layer of Soft Soil," *Journal of engineering mechanics*, Vol. 111, No. 8, pp. 1038-1047, 1985.
8. Rawls, W.J., Ahuja, J.R., Brakensiek, and D.L., *Estimating Soil Hydraulic Properties from Soils Data*. In: *Proceedings of Workshop on Indirect Methods for Estimating The Hydraulic Properties of Unsaturated Soils*. Riverside, CA, pp. 329-341, 1992.
9. Terzaghi, K., *End Baumechanik*, Franz Deuticke, Vienna, 1925.
10. Terzaghi, K., *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley, New York, 1943.
11. Tuncay, K., Kambham, K., and Corapcioglu, M., "Self-Weight Subsidence of Saturated Soft Porous Media," *Journal of engineering mechanics*, Vol. 12, No. 2, pp. 155-164, 1941.

Vol. 124, No. 6, pp. 630-638, 1998.

12. Tsai, T.L., Chang, K.C., and Huang, L.H., "Body Force Effect on Consolidation of Porous Elastic Media Due to Pumping," Journal of the Chinese Institute of Engineers, Vol. 29, No. 1, pp. 75-82, 2006.
13. Tseng, C.M., Tsai, T.L., and Huang, L.H., "Effects of Body Force on Transient Poroelastic Consolidation Due to Groundwater Pumping," Environmental geology, Vol. 54, No. 7, pp.

1507-1516, 2008.

14. Wang H.F., Theory of Linear Poroelasticity with Applications to Geomechanics and Hydrogeology, Princeton University Press, Princeton, 2000.

收稿日期：民國 107 年 6 月 22 日

修正日期：民國 107 年 7 月 20 日

接受日期：民國 107 年 7 月 24 日