



## 載重效率對於未飽和土壤壓密過程之影響評估

### An Assessment of the Loading Efficiency on the Process of Consolidation in Unsaturated Soils

國立成功大學  
水利及海洋工程學系  
博士班研究生

鄧教弘

Jiao-Hong Deng

國立成功大學  
水利及海洋工程學系  
博士後研究員

李哲瑋

Jhe-Wei Lee

國立成功大學  
水利及海洋工程學系  
教授

羅偉誠\*

Wei-Cheng Lo

國立成功大學  
水利及海洋工程學系  
博士班研究生

王常勉

Chang-Mien Wang

#### 摘要

由於台灣水資源在乾濕季分佈的不平均，抽取地下水成為最快速且方便的供應選項，但因為早期國土保育的概念較為欠缺，導致過度抽取地下水造成地層下陷，近年來由於重大的交通建設發展，地表結構物的荷重對於下陷區域的影響也成為一項重要的議題。因此，若能將理論解析分析土壤壓密的量化結果應用在實際的工程現地上，對於日後解決工程問題應當有所幫助。在從事土壤壓密的研究通常以 Terzaghi (1925) 及 Biot (1941) 的研究為主要的依據，然而此兩理論在初始孔隙流體壓力的建立上有很大的差異，也就是載重效率 (loading efficiency) 的影響。前者 (Terzaghi) 假設載重一開始是全部由流體承受並不考慮載重效率，後者 (Biot) 假設載重一開始由流體承受的部份是由載重效率所決定。因此，本研究利用 Lo *et al.* (2014) 所發表的一維未飽和土壤彈性壓密理論進行研究，並且探討在考慮有無載重效率的存在對於孔隙流體壓力的消散及土壤的總沉陷量之影響，外部載重分為固定載重與震動載重。

本研究以黏土為例進行模擬分析，模擬的初始水飽和度分別為 0.7、0.8 及 0.9，從數據結果可以看出，當載重作用初期 ( $T = 1 \text{ min}$ )，土壤的無因次孔隙水壓在有考慮載重效率時比較小，但是當壓密時間為一天時，兩者模擬的結果卻非常接近，而土壤的總沉陷量在壓密初期也有明顯的不同，當壓密到達穩定時，模擬出來的結果卻是一樣的，以初始水飽和度=0.9，外部載重為固定載重，邊界條件為上排水邊界為例，當壓密時間為 0.5 小時，有無考慮載重效率時之土壤總沉陷量相差 39.84%，而當壓密時間到達 2.5 小時，總沉陷量只相差 4.25%。外部載重為震動載重時，壓密初期沒有考慮載重效率時之土壤的總沉量會出現負值，這並不符合物理現象，但是當壓密到達穩定時，有無考慮載重效率之結果卻是一樣的。因此，由本研究結果可知，

\*通訊作者，國立成功大學水利及海洋工程學系教授，70101 臺南市東區大學路 1 號，lowc@mail.ncku.edu.tw

若要探討未飽和土壤初期壓密的影響，則必須考慮載重效率的作用，若重點在考量壓密穩定後，則載重效率的影響不大。

**關鍵詞：**孔彈性壓密理論，非飽和土壤，載重效率，總沉陷量。

## ABSTRACT

Due to the uneven distribution of water resources during wet and dry seasons in Taiwan, the extraction of groundwater has become one of the most rapid and convenient supply options. In addition, the lack of a concept for national land conservation has led to overpumping of groundwater, thus causing land subsidence. In recent years, because of the development of the transport infrastructure, the impact of the loading of surface structures on land subsidence regions has become a crucial issue. The Taiwan High Speed Rail Corporation has been monitoring the vertical displacement of the railroad pier every year since 2003. The latest monitoring results show that land subsidence in Changhua and Yunlin counties is respectively around 3 to 5 centimeters every year, which threatens the safety of the high speed rail. Thus, it remains a necessity to develop a rational approach to solving these engineering problems based on theoretical analysis. To date, the most widely-used theories of consolidation are those of Terzaghi (1925) and Biot (1941). However, these two theories are different in many aspects, especially in terms of developing initial pore fluid pressure. In the current study, we apply the consolidation theory of poroelasticity developed by Lo *et al.* (2014) to illustrate the effect of loading efficiency on one-dimensional consolidation in unsaturated soils. Based on Lo *et al.* (2014), closed-form analytical solutions describing the excess pore air and water pressures along with the total settlement in response to time-invariant external loading under three boundary drainage conditions are formulated by employing the Laplace transform. In Terzaghi's (1943) theory, at the instant the external loading is applied, it is assumed to be sustained entirely by pore fluid, while in Biot's (1941) theory, the external loading is partially sustained by pore fluid according to loading efficiency.

As illustrated through the use of samples, three initial water saturations (*i.e.*, 0.7, 0.8, and 0.9) with respect to various elapsed time periods (*i.e.*, 1 min, 1 hr, and 1 day) are selected for (*i.e.*, clay) soils. Our numerical results show that, in the early stage of consolidation ( $T = 1$  min), excess pore water pressure with loading efficiency is well represented and is less than that by ignoring loading efficiency. For a longer elapsed time ( $T = 1$  day), the differences between excess pore water pressures induced with or without loading efficiency included are quite small. We also demonstrate that the total settlement is significantly different between these situations in the early stage of consolidation. As the process of consolidation undergoes one day, the total settlement achieves the same magnitude with respect to these two situations. Thus, in the early stage of soil consolidation, if loading efficiency is not well represented, initial total settlement will be underestimated.

**Keywords:** Consolidation theory of poroelasticity, Unsaturated soils, Loading efficiency, Total settlement.

## 一、前言

由於台灣水資源在乾濕季分佈的不平均，抽取地下水成為最快速且方便的供應選項，但因為早期國土保育的概念較為欠缺，導致過度抽取地下水造成地層下陷，台灣西部因超抽地下水嚴重，高鐵局自 2003 年起，每年針對高鐵墩柱下陷情況進行監測。高鐵局最新監測結果顯示，包括彰化溪州沉陷 3.8 公分、雲林虎尾車站沉陷 4.4 公分、高鐵跨 158 縣道處沉陷 4.6 公分，都比過去嚴重。雖然高鐵局強調沉陷在安全範圍內，但專家擔心乾旱與超抽地下水，恐怕會讓高鐵沉陷加速。因此，若能將理論解析分析土壤壓密的量化結果應用在實際的工程現地上，對於日後解決工程問題應當有所幫助。在從事土壤壓密的研究通常以 Terzaghi (1925)及 Biot (1941)的研究為主要的依據，其中 Terzaghi 假設土壤之壓密排水為單向度、載重不隨時間而變，且土壤顆粒及水均為不可壓縮；Biot 將土壤壓密理論延伸至三維、載重可以隨著時間而改變，且有考慮到土壤顆粒變形所造成的影響，但 Biot 理論在推導上較為複雜，且須配合的參數較多，因此不易求解。本研究將探討載重效率(*loading efficiency*)對於土壤壓密過程的影響，分析載重效率對於超額孔隙水壓在土壤中的變化，以及壓密沉陷的影響，外部載重分為固定載重與震動載重。主要探討未飽和土壤壓密行為，故孔隙介質中同時含有空氣及水，因此在初始條件的假設上，支配固體及液體(空氣及水)所承受載重的比例將十分重要，此比例即為載重效率。

在土壤表面施加載重時，土壤孔隙中會激發超額孔隙流體壓力(*excess pore fluid presser*)，此時載重完全由流體來承受，超額孔隙流體壓力會隨著時間增長而逐漸消散，載重隨後轉嫁改由土壤承受，超額孔隙流體壓力的排除會伴隨著土壤顆粒間重新排列，因此土壤孔隙會隨著時間而趨於緊密，並且發生下陷情形，即為土壤沉陷。

Lo *et al.* (2014)利用孔彈性理論方程式(Lo *et al.*, 2005)並結合線性應力-應變關係式成功的推導出未飽和土壤壓密理論。在本研究中初始條件

的設定將分別根據 Terzaghi 以及 Biot 的假設，此兩理論在初始孔隙流體壓力的建立上有很大的差異，前者(Terzaghi)假設載重一開始是全部由流體承受，後者(Biot)假設載重一開始由流體及固體所共同承受，因此本研究透過此兩種初始條件的設定探討載重效率(*loading efficiency*)對土壤壓密過程的影響。

Wang (2000)定義載重效率為一個不排水孔性彈性係數，也就是說載重效率會因為壓縮的軸向應力增加，使該孔隙壓力增加。第一個提出類似載重效率概念的人為 Jacob (1940)，他當初利用潮汐與氣壓對於地下水觀測井的影響計算求得含水層的水力參數，因此也稱做潮汐效率(*tidal efficiency*)。van der Kamp and Gale (1983)假設表面載重作用時不會產生側向形變因而推導出載重效應，若將固體視為不可壓縮，其載重效應將簡化成 Jacob (1940)的形式。Lewallen and Wang (1998)在一維岩石壓密的研究中，同時考慮岩石的孔隙與裂縫雙孔隙率研究，並且延伸 van der Kamp and Gale (1983)載重效率的概念，推導出岩石孔隙與裂縫的載重效率。

本研究主要分析載重效率對於土壤壓密沉陷的重要性，並探討不同土壤質地及初始水飽和度的影響，結果將透過無因次孔隙水壓與土體深度關係及總沉陷量與時間關係相互比較討論。

## 二、研究理論

### 2.1 控制方程式

本研究應用 Lo *et al.* (2005)所提出之多孔隙介質中含有兩項不相容、可壓縮且具有黏滯性流體的孔彈性理論方程式，並根據土壤壓密的典型假設(Terzaghi, 1943; Biot, 1956)，將土壤壓密視為準靜定(*quasi-static*)的狀態，也就是外部載重緩慢的施力，使得孔隙流體壓力及孔隙介質的形變也非常的緩慢，則可忽略慣性力的影響(Wang, 2000)，因此，在忽略慣性項後方程式可簡化為：

$$-R_{11} \left( \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial t} \right) = -\theta_1 \bar{\nabla} p_1 \dots\dots\dots (1.1)$$

$$-R_{22} \left( \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial t} \right) = -\theta_2 \bar{\nabla} p_2 \dots\dots\dots (1.2)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\sigma} = \bar{0} \dots\dots\dots (1.3)$$

此處下標 1、2 分別代表非潤濕(空氣)及潤濕流體(水)，下標  $S$  為固體相， $p_\xi$  和  $\theta_\xi$  ( $\xi = 1, 2$ ) 分別為孔隙流體壓力及流體的體積分數； $\bar{u}_\xi$  為流體相之位移向量； $\bar{u}_s$  固體相之位移向量； $R_{\xi\xi} (= \theta_\xi^2 \eta_\xi / k_s k_{r\xi})$  表示為流體相  $\xi$  與固體相之間的黏滯耦合阻力參數， $\eta_\xi$  為流體的動力黏滯係數， $k_s$  為孔隙介質的滲透係數， $k_{r\xi}$  為  $\xi$  相流體的相對滲透係數； $\bar{\sigma}$  為孔隙介質的總應力張量，且根據 Biot (1962) 的理論，總應力張量可以定義為固體相及流體相之應力張量之和，其表示如下：

$$\bar{\sigma} = \bar{t}_s - \phi p_f \bar{\delta} \dots\dots\dots (2)$$

其中， $t_s$  為固體相之應力張量； $\phi$  為孔隙率； $\delta$  為單位張量； $p_f$  為孔隙流體平均壓力，當孔隙空間含有兩種不相溶流體時，Lo *et al.* (2005) 利用體積權重法(volume-weighted) (Whitaker, 1973) 計算流體平均壓力，其可表示為  $p_f = S_1 p_1 + S_2 p_2$ ， $S_\xi = \theta_\xi / \phi$  表示  $\xi$  相流體之飽和度，將流體平均壓力  $p_f$  代入方程式(2)中可得：

$$\bar{\sigma} = 2G\bar{e} + \left\{ \left[ \left( a_{11} - \frac{2}{3}G \right) + a_{12} + a_{13} \right] e + (a_{12} + a_{22} + a_{23})\varepsilon_1 + (a_{13} + a_{23} + a_{33})\varepsilon_2 \right\} \bar{\delta} \dots\dots\dots (5)$$

求解方程式(4.2)及(4.3)後可分別得到以流體壓力  $p_\xi$  為變數之  $\varepsilon_1$  及  $\varepsilon_2$ ，如下表示：

$$\varepsilon_1 = \frac{(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23})}{(a_{23}^2 - a_{22}a_{33})} e + \frac{(\theta_1 a_{33})}{(a_{23}^2 - a_{22}a_{33})} p_1 - \frac{(\theta_2 a_{23})}{(a_{23}^2 - a_{22}a_{33})} p_2 = d_1 e + d_2 p_1 + d_3 p_2 \dots\dots\dots (6.1)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23})}{(a_{23}^2 - a_{22}a_{33})} e + \frac{(\theta_1 a_{23})}{(a_{23}^2 - a_{22}a_{33})} p_1 - \frac{(\theta_2 a_{22})}{(a_{23}^2 - a_{22}a_{33})} p_2 = d_4 e + d_5 p_1 + d_6 p_2 \dots\dots\dots (6.2)$$

一般習慣利用應力項為應變數，因此將方程式(6)代入方程式(5)，由應力取代應變，總應力張量可改成：

$$\bar{\sigma} = 2G\bar{e} + \left[ \left( a_{11} - \frac{2}{3}G + a_{12}d_1 + a_{13}d_4 \right) e + (a_{12}d_2 + a_{13}d_5 - \theta_1)p_1 + (a_{12}d_3 + a_{13}d_6 - \theta_2)p_2 \right] \bar{\delta} \dots\dots\dots (7)$$

由於本研究目的為探討土壤一維壓密沉陷的變化，載重  $q(t)$  可隨時間變化，並假設

## 2.2 線性應力-應變關係式

為了模擬流體在土壤孔隙中的傳遞，因此須了解固體和流體之間應力與應變的關係，Lo *et al.* (2005) 根據 Biot (1962) 的模式推導均質且等向的未飽和孔隙介質之應力-應變關係式如下：

$$\bar{t}_s = 2G\bar{e} + \left[ \left( a_{11} - \frac{2}{3}G \right) e + a_{12}\varepsilon_1 + a_{13}\varepsilon_2 \right] \bar{\delta} \dots\dots\dots (4.1)$$

$$-\theta_1 p_1 = a_{12}e + a_{22}\varepsilon_1 + a_{23}\varepsilon_2 \dots\dots\dots (4.2)$$

$$-\theta_2 p_2 = a_{13}e + a_{23}\varepsilon_1 + a_{33}\varepsilon_2 \dots\dots\dots (4.3)$$

上式中  $\bar{e} = (\bar{\nabla} \bar{u}_s + \bar{\nabla} \bar{u}_s^T) / 2$  表示固體相的應變張量，上標  $T$  表示轉置計算方式； $e = \bar{\nabla} \cdot \bar{u}_s$  為固體相的體積應變量； $\varepsilon_1 = \bar{\nabla} \cdot \bar{u}_1$  及  $\varepsilon_2 = \bar{\nabla} \cdot \bar{u}_2$  分別表示空氣及水的體積應變量； $G$  為孔隙介質剪力模數； $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) 為彈性係數，其可由孔隙率和五個可直接量測的彈性模數表示。(彈性係數  $a_{ij}$  請參見 Lo *et al.*, 2005 及 Lo *et al.*, 2014)。

將線性應力-應變關係式代入方程式(3)，則總應力張量  $\sigma$  改寫成：

$q(t) = -p^* \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$  ( $p^*$  為固定載重， $\omega$  震動為週期)，當  $\omega = 0$  時， $q(t) = -p^*$  載重即為固定載重，則方程式(7)可改寫成：

$$q(t) = \left(a_{11} + \frac{4}{3}G + a_{12}d_1 + a_{13}d_4\right) \frac{\partial \omega}{\partial z} + (a_{12}d_2 + a_{13}d_5 - \theta_1)p_1 + (a_{12}d_3 + a_{13}d_6 - \theta_2)p_2 \dots\dots\dots (8)$$

其中  $\omega$  為固體垂直方向( $z$  方向)之位移量，將上式重新整理可得垂直方向的固體應變量  $\frac{\partial \omega}{\partial z}$ ，如下所示：

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{q(t)}{\left(a_{11} + \frac{4}{3}G + a_{12}d_1 + a_{13}d_4\right)} - \frac{(a_{12}d_2 + a_{13}d_5 - \theta_1)}{\left(a_{11} + \frac{4}{3}G + a_{12}d_1 + a_{13}d_4\right)} p_1 - \frac{(a_{12}d_3 + a_{13}d_6 - \theta_2)}{\left(a_{11} + \frac{4}{3}G + a_{12}d_1 + a_{13}d_4\right)} p_2 \dots\dots\dots (9)$$

根據 Wang (2000) 得到土壤基質統體模數  $K_b$  與 3 種彈性係數  $a_{11}$ 、 $a_{12}$  及  $a_{13}$  之關係式：

$$K_b = a_{11} + \frac{\phi - \alpha}{\phi} (a_{12} + a_{13}) \dots\dots\dots (10)$$

其中  $\alpha = 1 - K_b/K_s$  為 Biot-Willis 係數(Biot and Willis, 1957)， $K_b$  為土壤基質統體模數； $K_s$  為土壤顆粒統體模數(bulk modulus of solid)。

為了簡化方程式(8)，參考 Lo and Sposito (2013) 所提出之彈性係數與標準孔彈性參數間之關係，如下所示：

$$a_{22} + a_{23} = \frac{\phi}{\alpha - \phi} a_{12} \dots\dots\dots (11.1)$$

$$a_{23} + a_{33} = \frac{\phi}{\alpha - \phi} a_{13} \dots\dots\dots (11.2)$$

藉由此關係式，可將方程式(6)之  $d_1$  及  $d_4$  簡化為如下形式：

$$d_1 = \frac{(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23})}{(a_{23}^2 - a_{22}a_{33})} = \frac{\phi - \alpha}{\phi}$$

$$d_4 = \frac{(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23})}{(a_{23}^2 - a_{22}a_{33})} = \frac{\phi - \alpha}{\phi}$$

方程式(8)可以簡化為如下形式：

$$q(t) = \left(K_b + \frac{4}{3}G\right) \frac{\partial \omega}{\partial z} - S_1 \alpha p_1 - S_2 \alpha p_2 \dots\dots\dots (12)$$

同理，垂直方向的固體應變量  $\frac{\partial \omega}{\partial z}$  可簡化成：

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{q(t)}{\left(K_b + \frac{4}{3}G\right)} + \frac{S_1 \alpha}{\left(K_b + \frac{4}{3}G\right)} p_1 + \frac{S_2 \alpha}{\left(K_b + \frac{4}{3}G\right)} p_2 \dots\dots\dots (13)$$

### 2.3 一維未飽和壓密理論

將方程式(1.1)及(1.2)等號兩邊皆作散度運算，並將方程式(6)代入其中，可得下列形式：

$$d_2 \frac{\partial p_1}{\partial t} + d_3 \frac{\partial p_2}{\partial t} - \frac{\alpha}{\phi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = \frac{\theta_1}{R_{11}} \nabla^2 p_1 \dots (14.1)$$

$$d_5 \frac{\partial p_1}{\partial t} + d_6 \frac{\partial p_2}{\partial t} - \frac{\alpha}{\phi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = \frac{\theta_2}{R_{22}} \nabla^2 p_2 \dots (14.2)$$

將(13)式代入(14)式可得：

$$q_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} + q_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} + r_1 \frac{\partial q(t)}{\partial t} \dots\dots\dots (15.1)$$

$$q_3 \frac{\partial p_1}{\partial t} + q_4 \frac{\partial p_2}{\partial t} = b_2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial z^2} + r_2 \frac{\partial q(t)}{\partial t} \dots\dots\dots (15.2)$$

其中，參數  $q_1$ 、 $q_2$ 、 $q_3$ 、 $q_4$ 、 $b_1$ 、 $b_2$ 、 $r_1$  及  $r_2$  分別如下所示：

$$q_1 = \theta_1 \left[ \frac{(S_1 \alpha^2 / \phi)}{\left(K_b + \frac{4}{3}G\right)} - d_2 \right] \dots\dots\dots (16.1)$$

$$q_2 = \theta_1 \left[ \frac{(S_2 \alpha^2 / \phi)}{\left(K_b + \frac{4}{3}G\right)} - d_3 \right] \dots\dots\dots (16.2)$$

$$r_2 = - \frac{S_2 \alpha}{\left(K_b + \frac{4}{3}G\right)} \dots\dots\dots (16.8)$$

$$q_3 = \theta_2 \left[ \frac{(S_1 \alpha^2 / \phi)}{\left(K_b + \frac{4}{3}G\right)} - d_5 \right] \dots\dots\dots (16.3)$$

並且我們定義  $\tilde{c}_v = b_1 / q_1$  及  $c_v = b_2 / q_4$  分別為空氣及水的壓密係數(coefficient of consolidation)。

$$q_4 = \theta_2 \left[ \frac{(S_2 \alpha^2 / \phi)}{\left(K_b + \frac{4}{3}G\right)} - d_6 \right] \dots\dots\dots (16.4)$$

#### 2.4 初始條件

首先，依據 Biot (1941)的假設，假設當水飽和孔隙介質受到外部載重瞬間時，水無法由孔隙介質排出，也就是線性流體增加量(linearized increment of water content)等於零，即  $\phi(e - \varepsilon) = 0$ ，這個假設也同時被不排水之未飽和壓密研究所考慮，即  $\theta_1(e - \varepsilon_1) = \theta_2(e - \varepsilon_2) = 0$  (Fredlund and Hasan, 1979; Chen, 1993; Ausilio and Conte, 1999)，因此，可得到下列關係：

$$b_1 = - \frac{\theta_1^2}{R_{11}} = \frac{k_s k_{r1}}{\eta_1} \dots\dots\dots (16.5)$$

$$e = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \dots\dots\dots (17)$$

$$b_2 = - \frac{\theta_2^2}{R_{22}} = \frac{k_s k_{r2}}{\eta_2} \dots\dots\dots (16.6)$$

$$r_1 = - \frac{S_1 \alpha}{\left(K_b + \frac{4}{3}G\right)} \dots\dots\dots (16.7)$$

將上述關係式代入線性應力-應變關係式，可得到空氣和水的超額孔隙壓力以及總應力，如下所示：

$$p_1 = - \frac{(a_{12} + a_{22} + a_{23})}{\theta_1} \frac{\partial \omega}{\partial z} = - \frac{\alpha}{\alpha - \phi} \frac{a_{12}}{\theta_1} \frac{\partial \omega}{\partial z} \dots\dots\dots (18.1)$$

$$p_2 = - \frac{(a_{13} + a_{23} + a_{33})}{\theta_2} \frac{\partial \omega}{\partial z} = - \frac{\alpha}{\alpha - \phi} \frac{a_{13}}{\theta_2} \frac{\partial \omega}{\partial z} \dots\dots\dots (18.2)$$

$$-p^* = \left[ \left( a_{11} + \frac{4}{3}G \right) + a_{22} + a_{33} + 2a_{12} + 2a_{13} + 2a_{23} \right] \frac{\partial \omega}{\partial z} \dots\dots\dots (18.3)$$

其中， $H = a_{11} + a_{22} + a_{33} + 2a_{12} + 2a_{13} + 2a_{23} + \frac{4}{3}G$  稱為不排水彈性波模數(undrained P-wave modulus) (Pride, 2005 and Lo *et al.*, 2005)，又可稱為不排水垂直統體模數  $K_v^{(u)}$  (Lo and Sposito, 2013)，並將方程式(11)代入  $H$ ，可得：

$$H = K_v^{(u)} = a_{11} + \frac{(2\alpha - \phi)}{(\alpha - \phi)} a_{12} + \frac{(2\alpha - \phi)}{(\alpha - \phi)} a_{13} + \frac{4}{3}G \dots\dots\dots (19)$$

即  $K_v^{(u)} = K_u + \frac{4}{3}G$ ，與 Biot (1962)所提出的一致。則方程式(18.3)可簡化為：

$$-p^* = K_v^{(u)} \frac{\partial \omega}{\partial z} \dots\dots\dots (20)$$

將方程式(20)代入方程式(18.1)，可得到空氣的初始壓力：

$$p_1(z, 0) = \gamma_1 p^* = \frac{\alpha}{\alpha - \phi} \frac{a_{12}}{K_v^{(u)} \theta_1} p^* \dots\dots\dots (21.1)$$

同理，將方程式(20)代入方程式(18.2)，可得到水的初始壓力：

$$p_2(z,0) = \gamma_2 p^* = \frac{\alpha}{\alpha - \phi} \frac{a_{13}}{K_v^{(u)} \theta_2} p^* \dots\dots\dots (21.2)$$

上兩式中， $\gamma_1$  及  $\gamma_2$  為空氣與水的載重效率(loading efficiency)，其物理意義為當載重作用在未飽和孔隙介質的瞬間，總應力是由孔隙介質、空氣與水所共同承受。

根據 Terzaghi (1943)的假設，當外部固定壓力( $p^*$ )施加在含有流體的多孔隙介質土體上時，在初始的時候壓力是假設完全由流體來承受，因此  $p_f(z, 0) = p^*$ 。並考慮非濕潤流體飽和度變化量 ( $\Delta S_1$ )極小且趨近於 0，因此  $\Delta S_1 = \frac{p_1 - p_2}{dp_c / dS_1} \cong 0$  則

$p_1$  及  $p_2$  分別為：

$$p_1(z,0) = p^* \dots\dots\dots (22.1)$$

$$p_2(z,0) = p^* \dots\dots\dots (22.2)$$

## 2.5 邊界條件及解析解

本研究考慮一個圓柱土壤單位長度且沿著  $z$  軸軸對稱，邊界底部  $z = 0$ 、頂部  $z = h$ 。模擬之邊界條件為土體表面( $z = h$ )為透水層與大氣接觸，底部( $z = 0$ )為不透水層與超額孔隙流體壓力及隨時間變化的土壤沉陷量解析結果如下：

$$\sum_{n=0}^{\infty} [q_1 \bar{p}'_{1n}(t) + q_2 \bar{p}'_{2n}(t) + b_1 \lambda_n^2 \bar{p}_{1n}(t)] \cos(\lambda_n z) = r_1 \sum_{m=0}^{\infty} G_m(t) \cos(\lambda_m z) \dots\dots\dots (26.1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [q_3 \bar{p}'_{1n}(t) + q_4 \bar{p}'_{2n}(t) + b_2 \lambda_n^2 \bar{p}_{2n}(t)] \cos(\lambda_n z) = r_2 \sum_{m=0}^{\infty} G_m(t) \cos(\lambda_m z) \dots\dots\dots (26.2)$$

其中，上標 ' 表示對時間微分； $G_m(t)$ 為：

$$G_m(t) = \frac{2}{h} \int_0^h \frac{p^* \omega \sin(\omega t)}{2} \cos(\lambda_m z) dz = \frac{2}{h} \frac{p^* \omega \sin(\omega t)}{2} \frac{2h}{(2m+1)\pi} \cos(m\pi) = Y_m \sin(\omega t) \dots\dots\dots (27)$$

其中  $Y_m$  為：

$$Y_m = \frac{2\omega p^* \cos(m\pi)}{(2m+1)\pi} \dots\dots\dots (28)$$

上述方程式透過正交關係(orthogonality relations)計算，可得：

$$q_1 \bar{p}'_{1n}(t) + q_2 \bar{p}'_{2n}(t) + b_1 \lambda_n^2 \bar{p}_{1n}(t) = Y_n \sin(\omega t) \dots\dots\dots (29.1)$$

邊界條件可假設為：

$$p_1(h,t) = p_2(h,t) = 0 \dots\dots\dots (23.1)$$

$$\frac{\partial p_1(0,t)}{\partial z} = \frac{\partial p_2(0,t)}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (23.2)$$

(23.1)式與(23.2)式所對應的特徵函數為  $\cos(\lambda_n z)$ ，

其中  $\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2h}$ ，故利用特徵函數展開法求解

$p_1(z,t)$  及  $p_2(z,t)$ 如下所示：其中  $\bar{p}_{1n}(t)$  及  $\bar{p}_{2n}(t)$  可由拉普拉斯轉換(Laplace transformation)求得。

$$p_1(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}_{1n}(t) \cos(\lambda_n z) \dots\dots\dots (24.1)$$

$$p_2(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}_{2n}(t) \cos(\lambda_n z) \dots\dots\dots (24.2)$$

外部載重  $q(t)$  可隨時間變化，並假設  $q(t) = -p^* \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$ ，當  $\omega = 0$  時， $q(t) = -p^*$  載重即為固定載重。

因為方程式(15)右邊有一項  $\frac{\partial q(t)}{\partial t}$ ，所以我們也必須假設它為 Fourier 餘弦級數(Fourier cosine series)之形式：

$$\frac{\partial q(t)}{\partial t} = \sum_{m=0}^{\infty} G_m(t) \cos(\lambda_m z) \dots\dots\dots (25)$$

將(24)式和(25)式代入方程式(15)，可得：

$$q_3 \bar{p}'_{1n}(t) + q_4 \bar{p}'_{2n}(t) + b_2 \lambda_n^2 \bar{p}_{2n}(t) = Y_{2n} \sin(\omega t) \dots\dots\dots (29.2)$$

其中  $Y_{1n}$  及  $Y_{2n}$  分別為：

$$Y_{1n} = \frac{2\omega r_1 p^* \cos(n\pi)}{(2n+1)\pi}, \quad Y_{2n} = \frac{2\omega r_2 p^* \cos(n\pi)}{(2n+1)\pi} \dots\dots\dots (30)$$

對(29)式作拉普拉斯轉換(Laplace transformation)如下：

$$\begin{bmatrix} sq_1 + b_1 \lambda_n^2 & sq_2 \\ sq_3 & sq_4 + b_2 \lambda_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_{1n}(s) \\ \bar{p}_{2n}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_{1n}(0) \\ \bar{p}_{2n}(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{1n} \\ Y_{2n} \end{bmatrix} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \dots\dots\dots (31)$$

其中  $\bar{p}_{1n}(0)$  及  $\bar{p}_{2n}(0)$  將由初始條件來得到，將(21)式及(22)式分別代入(24)式，可分別得到  $\bar{p}_{1n}^a(0)$ 、 $\bar{p}_{2n}^a(0)$  及  $\bar{p}_{1n}^b(0)$ 、 $\bar{p}_{2n}^b(0)$ ：

$$\bar{p}_{1n}^a(0) = \frac{2p^*}{h\lambda_n} \cos(n\pi) \dots\dots\dots (32.1)$$

$$\bar{p}_{2n}^a(0) = \frac{2p^*}{h\lambda_n} \cos(n\pi) \dots\dots\dots (32.2)$$

$$\bar{p}_{1n}^b(0) = \frac{2}{h\lambda_n} \gamma_1 p^* \cos(n\pi) \dots\dots\dots (32.3)$$

$$\bar{p}_{2n}^b(0) = \frac{2}{h\lambda_n} \gamma_2 p^* \cos(n\pi) \dots\dots\dots (32.4)$$

其中上標  $a$  為沒有考慮載重效率，上標  $b$  為有考慮載重效率。將(31)式整理如下：

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_{1n}(s) \\ \bar{p}_{2n}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Gamma} \left\{ \begin{bmatrix} sq_4 + b_2 \lambda_n^2 & -sq_2 \\ -sq_3 & sq_1 + b_1 \lambda_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_{1n}(0) \\ \bar{p}_{2n}(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} sq_4 + b_2 \lambda_n^2 & -sq_2 \\ -sq_3 & sq_1 + b_1 \lambda_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1n} \\ Y_{2n} \end{bmatrix} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right\} \dots (33)$$

其中

$$\Gamma = (q_1 q_4 - q_2 q_3) s^2 + \lambda_n^2 (b_1 q_4 + b_2 q_1) s + b_1 b_2 \lambda_n^4 \dots\dots\dots (34)$$

將(33)式之解分為齊次解(homogeneous solution)( $\bar{p}_{\xi n}^c$ )及特解(particular solution)( $\bar{p}_{\xi n}^p$ )，其中齊次解為(33)式右邊第一項，表示土壤載重為固定載重( $q(t) = -p^*$ )，特解為(33)式右邊第二項。

(33)式之齊次解( $\bar{p}_{\xi n}^c$ )如下表示：

$$\bar{p}_{1n}^c(s) = \frac{\left( s + \frac{q_1 b_2 \lambda_n^2}{\Delta} \right) \bar{p}_{1n}(0) + \frac{(q_2 b_2 \lambda_n^2)}{\Delta} \bar{p}_{2n}(0)}{s^2 + \frac{(q_1 b_2 \lambda_n^2 + q_4 b_1 \lambda_n^2)}{\Delta} s + \frac{b_1 b_2 \lambda_n^4}{\Delta}} \dots\dots\dots (35.1)$$

$$\bar{p}_{2n}^c(s) = \frac{\left( \frac{q_3 b_1 \lambda_n^2}{\Delta} \right) \bar{p}_{1n}(0) + \left( s + \frac{q_4 b_1 \lambda_n^2}{\Delta} \right) \bar{p}_{2n}(0)}{s^2 + \frac{(q_1 b_2 \lambda_n^2 + q_4 b_1 \lambda_n^2)}{\Delta} s + \frac{b_1 b_2 \lambda_n^4}{\Delta}} \dots\dots\dots (35.2)$$

其中  $\Delta = q_1 q_4 - q_2 q_3$ 。將(35)式進行拉普拉斯反轉換(inverse of Laplace transformation)可得下式：



$$\bar{p}_{1n}^c(t) = A_{1n} \exp(-\alpha_{1n}t) + A_{2n} \exp(-\alpha_{2n}t) \dots\dots\dots (36.1)$$

$$\bar{p}_{2n}^c(t) = A_{3n} \exp(-\alpha_{1n}t) + A_{4n} \exp(-\alpha_{2n}t) \dots\dots\dots (36.2)$$

其中  $A_{1n}$ 、 $A_{2n}$ 、 $A_{3n}$ 、 $A_{4n}$ 、 $\alpha_{1n}$  及  $\alpha_{2n}$  分別如下所示：

$$A_{1n} = \frac{1}{(\alpha_{1n} - \alpha_{2n})} \left[ \bar{p}_{1n}(0) \left( \alpha_{1n} - \frac{b_2 \lambda_n^2}{\Delta} q_1 \right) - \bar{p}_{2n}(0) \frac{b_2 \lambda_n^2}{\Delta} q_2 \right] \dots\dots\dots (37.1)$$

$$A_{2n} = \frac{1}{(\alpha_{1n} - \alpha_{2n})} \left[ \bar{p}_{1n}(0) \left( -\alpha_{2n} + \frac{b_2 \lambda_n^2}{\Delta} q_1 \right) + \bar{p}_{2n}(0) \frac{b_2 \lambda_n^2}{\Delta} q_2 \right] \dots\dots\dots (37.2)$$

$$A_{3n} = \frac{1}{(\alpha_{1n} - \alpha_{2n})} \left[ -\bar{p}_{1n}(0) \frac{b_1 \lambda_n^2}{\Delta} q_3 + \bar{p}_{2n}(0) \left( \alpha_{1n} - \frac{b_1 \lambda_n^2}{\Delta} q_4 \right) \right] \dots\dots\dots (37.3)$$

$$A_{4n} = \frac{1}{(\alpha_{1n} - \alpha_{2n})} \left[ \bar{p}_{1n}(0) \frac{b_1 \lambda_n^2}{\Delta} q_3 + \bar{p}_{2n}(0) \left( -\alpha_{2n} + \frac{b_1 \lambda_n^2}{\Delta} q_4 \right) \right] \dots\dots\dots (37.4)$$

$$\alpha_{1n} = \frac{\lambda_n^2}{2\Delta} (q_1 b_2 + q_4 b_1) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_n^4}{\Delta^2} (q_1 b_2 + q_4 b_1)^2 - \frac{4b_1 b_2 \lambda_n^4}{\Delta}} \dots\dots\dots (37.5)$$

$$\alpha_{2n} = \frac{\lambda_n^2}{2\Delta} (q_1 b_2 + q_4 b_1) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_n^4}{\Delta^2} (q_1 b_2 + q_4 b_1)^2 - \frac{4b_1 b_2 \lambda_n^4}{\Delta}} \dots\dots\dots (37.6)$$

(33)式之特解( $\bar{p}_{\xi n}^p$ )如下表示：

$$\bar{p}_{1n}^p(s) = \frac{(q_4 Y_{1n} - q_2 Y_{2n})\omega}{\Delta} s + \frac{\omega b_2 \lambda_n^2 Y_{1n}}{\Delta} \dots\dots\dots (38.1)$$

$$\bar{p}_{2n}^p(s) = \frac{(q_1 Y_{2n} - q_3 Y_{1n})\omega}{\Delta} s + \frac{\omega b_1 \lambda_n^2 Y_{2n}}{\Delta} \dots\dots\dots (38.2)$$

同理，將(38)式進行拉普拉斯反轉換(inverse of Laplace transformation)可得下式：

$$\bar{p}_{1n}^p(t) = B_{1n} \exp(-\alpha_{1n}t) + B_{2n} \exp(-\alpha_{2n}t) + B_{5n} \cos(\omega t) + B_{6n} \sin(\omega t) \dots\dots\dots (39.1)$$

$$\bar{p}_{2n}^p(t) = B_{3n} \exp(-\alpha_{1n}t) + B_{4n} \exp(-\alpha_{2n}t) + B_{7n} \cos(\omega t) + B_{8n} \sin(\omega t) \dots\dots\dots (39.2)$$

其中  $B_{1n}$ 、 $B_{2n}$ 、 $B_{3n}$ 、 $B_{4n}$ 、 $B_{5n}$ 、 $B_{6n}$ 、 $B_{7n}$  及  $B_{8n}$  分別如下所示：

$$B_{1n} = \frac{(D_{2n} - \alpha_{1n} D_{1n})}{(\alpha_{2n} - \alpha_{1n})(\alpha_{1n}^2 + \omega^2)} \dots\dots\dots (40.1)$$

$$B_{2n} = \frac{(\alpha_{2n} D_{1n} - D_{2n})}{(\alpha_{2n} - \alpha_{1n})(\alpha_{2n}^2 + \omega^2)} \dots\dots\dots (40.2)$$

$$B_{3n} = \frac{(D_{4n} - \alpha_{1n} D_{3n})}{(\alpha_{2n} - \alpha_{1n})(\alpha_{1n}^2 + \omega^2)} \dots\dots\dots (40.3)$$

$$B_{4n} = \frac{(\alpha_{2n}D_{3n} - D_{4n})}{(\alpha_{2n} - \alpha_{1n})(\alpha_{2n}^2 + \omega^2)} \dots\dots\dots (40.4)$$

$$B_{5n} = \frac{D_{1n}(\alpha_{1n}\alpha_{2n} - \omega^2) - D_{2n}(\alpha_{1n} + \alpha_{2n})}{(\alpha_{1n}^2 + \omega^2)(\alpha_{2n}^2 + \omega^2)} \dots\dots\dots (40.5)$$

$$B_{6n} = \frac{D_{1n}\omega(\alpha_{1n} + \alpha_{2n}) + \frac{D_{2n}}{\omega}(\alpha_{1n}\alpha_{2n} - \omega^2)}{(\alpha_{1n}^2 + \omega^2)(\alpha_{2n}^2 + \omega^2)} \dots\dots\dots (40.6)$$

$$B_{7n} = \frac{D_{3n}(\alpha_{1n}\alpha_{2n} - \omega^2) - D_{4n}(\alpha_{1n} + \alpha_{2n})}{(\alpha_{1n}^2 + \omega^2)(\alpha_{2n}^2 + \omega^2)} \dots\dots\dots (40.7)$$

$$B_{8n} = \frac{D_{3n}\omega(\alpha_{1n} + \alpha_{2n}) + \frac{D_{4n}}{\omega}(\alpha_{1n}\alpha_{2n} - \omega^2)}{(\alpha_{1n}^2 + \omega^2)(\alpha_{2n}^2 + \omega^2)} \dots\dots\dots (40.8)$$

其中  $D_{1n}$ 、 $D_{2n}$ 、 $D_{3n}$  及  $D_{4n}$  分別如下所示：

$$D_{1n} = \frac{\omega(q_4Y_{1n} - q_2Y_{2n})}{\Delta} \dots\dots\dots (41.1)$$

$$D_{2n} = \frac{\omega b_2 \lambda_n^2 Y_{1n}}{\Delta} \dots\dots\dots (41.2)$$

$$D_{3n} = \frac{\omega(q_1Y_{2n} - q_3Y_{1n})}{\Delta} \dots\dots\dots (41.3)$$

$$D_{4n} = \frac{\omega b_1 \lambda_n^2 Y_{2n}}{\Delta} \dots\dots\dots (41.4)$$

因此，(33)式之通解為(36)式和(39)式之和。

$$\bar{p}_{1n}(t) = (A_{1n} + B_{1n})\exp(-\alpha_{1n}t) + (A_{2n} + B_{2n})\exp(-\alpha_{2n}t) + B_{5n} \cos(\omega t) + B_{6n} \sin(\omega t) \dots\dots\dots (42.1)$$

$$\bar{p}_{2n}(t) = (A_{3n} + B_{3n})\exp(-\alpha_{1n}t) + (A_{4n} + B_{4n})\exp(-\alpha_{2n}t) + B_{7n} \cos(\omega t) + B_{8n} \sin(\omega t) \dots\dots\dots (42.2)$$

當考慮載重為固定載重( $q(t) = -p^*$ )時， $p_1(z,t)$ 及  $p_2(z,t)$ 分別如下所示：

$$p_1(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}_{1n}^c(t) \cos(\lambda_n z) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_{1n} \exp(-\alpha_{1n}t) + A_{2n} \exp(-\alpha_{2n}t)] \cos(\lambda_n z) \dots\dots\dots (43.1)$$

$$p_2(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}_{2n}^c(t) \cos(\lambda_n z) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_{3n} \exp(-\alpha_{1n}t) + A_{4n} \exp(-\alpha_{2n}t)] \cos(\lambda_n z) \dots\dots\dots (43.2)$$

總沉陷量  $s(t)$ 如下表示：

$$s(t) = -\int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dz = \frac{p^* h}{\left(K_b + \frac{4}{3}G\right)} + r_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\lambda_n} \bar{p}_{1n}^c(t) + r_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\lambda_n} \bar{p}_{2n}^c(t) \dots\dots\dots (44)$$

當考慮震動載重( $q(t) = -p^* \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$ )時， $p_1(z,t)$ 及  $p_2(z,t)$ 分別如下所示：

$$\begin{aligned}
p_1(z,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}_{1n}(t) \cos(\lambda_n z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [(A_{1n} + B_{1n}) \exp(-\alpha_{1n} t) + (A_{2n} + B_{2n}) \exp(-\alpha_{2n} t) + B_{5n} \cos(\omega t) + B_{6n} \sin(\omega t)] \cos(\lambda_n z)
\end{aligned}
\tag{45.1}$$

$$\begin{aligned}
p_2(z,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}_{2n}(t) \cos(\lambda_n z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [(A_{3n} + B_{3n}) \exp(-\alpha_{1n} t) + (A_{4n} + B_{4n}) \exp(-\alpha_{2n} t) + B_{7n} \cos(\omega t) + B_{8n} \sin(\omega t)] \cos(\lambda_n z)
\end{aligned}
\tag{45.2}$$

總沉陷量  $s(t)$  如下表示：

$$s(t) = -\int_0^h \frac{\partial W}{\partial z} dz = \frac{p^* h \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\left(K_b + \frac{4}{3} G\right)} + r_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\lambda_n} \bar{p}_{1n}(t) + r_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\lambda_n} \bar{p}_{2n}(t) \dots\dots\dots (46)$$

### 三、數值模擬

#### 3.1 保水曲線

自然界中的土層常為非飽和狀態，而土壤保水曲線是來描述毛細壓力  $h_c$  與流體飽和度  $S_2$  之間的關聯性。本研究將以 van Genuchten (1980) 之經驗公式來推求毛細張力與流體飽和度的關係，此為最常應用之模式：

$$[1 + (\chi h_c)^n]^{-m} = S_2^e = \frac{\theta_2 - \theta_2^r}{\theta_2^s - \theta_2^r} \dots\dots\dots (47)$$

其中  $h_c = p_{cap} / (\rho_2 g)$ ； $S_2^e$  為濕潤性流體有效飽和度，為了方便起見，Lo *et al.* (2005) 假設  $S_2 = S_2^e$ ， $\theta_2$  為濕潤流體體積分量、 $\theta_2^s$  及  $\theta_2^r$  分別為濕潤流體飽和體積分量和濕潤流體殘餘體積分量； $\chi$ 、 $m$  和  $n$  皆為率定參數，且  $m = 1 - 1/n$ ，最後再將方程式重新推導得到：

$$\frac{dS_1}{dp_{cap}} = \left[ \frac{\rho_2 g}{mn\chi} [(1-S_1)^{\frac{-1}{m}} - 1]^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} (1-S_1)^{\left(\frac{-1}{m+1}\right)} \right]^{-1} \dots\dots\dots (48)$$

#### 3.2 水力傳導函數

欲求得水力傳導函數之典型方法是透過保水曲線(van Genuchten, 1980)與 Burdine (1953)及 Mualem (1976)概念性孔隙大小分佈模式之系統

中做結合。在任何飽和度下，濕潤性流體與非濕潤性流體的相對滲透係數之方程式如下：

$$k_{r1}(S_2) = (1 - S_2)^n \left[ 1 - (S_2)^{\frac{1}{m}} \right]^{2m} \dots\dots\dots (49.1)$$

$$k_{r2}(S_2) = (S_2)^n \left\{ 1 - \left[ 1 - (S_2)^{\frac{1}{m}} \right]^m \right\}^2 \dots\dots\dots (49.2)$$

其中  $k_{r1}$  及  $k_{r2}$  分別為非濕潤性流體與濕潤性流體之相對滲透係數； $n$  為率定參數。

### 四、結果與討論

本研究以黏土(clay)為例，模擬土體表面施加固定載重或震動載重，並探討不同初始水飽和度及有無考慮載重效率時之無因次孔隙水壓及總沉陷量之變化，透過無因次孔隙水壓與土體深度變化圖及總沉陷量與時間變化圖之結果相互比較討論。

圖 1 至圖 3 為黏土在固定載重下，有無考慮載重效率時之無因次孔隙水壓隨土體深度變化圖，且呈現三種不同初始飽和度(0.7, 0.8 及 0.9)之結果，並配合不同時間尺度(1 minute, 1 hour 及 1 day)，邊界條件為土體表面為透水層與大氣接觸，底部為岩盤或任何不透水層(上排水邊界)。圖 4 為黏土在固定載重下有無考慮載重效率時之總沉陷量時與時間變化關係圖，呈現三種不同初

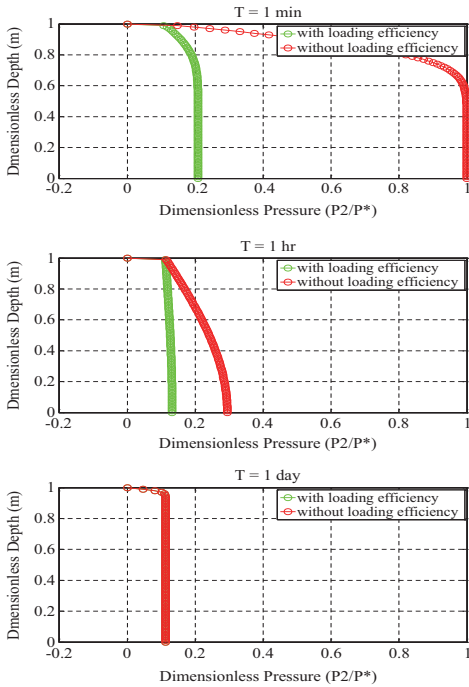


圖 1 黏土之無因次孔隙水壓在有無考慮載重效率下隨土體深度變化圖( $S_2 = 0.7$ )。

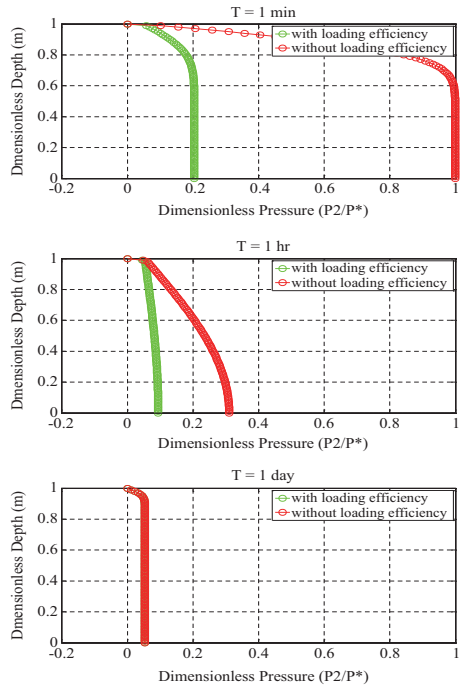


圖 2 黏土之無因次孔隙水壓在有無考慮載重效率下隨土體深度變化圖( $S_2 = 0.8$ )。

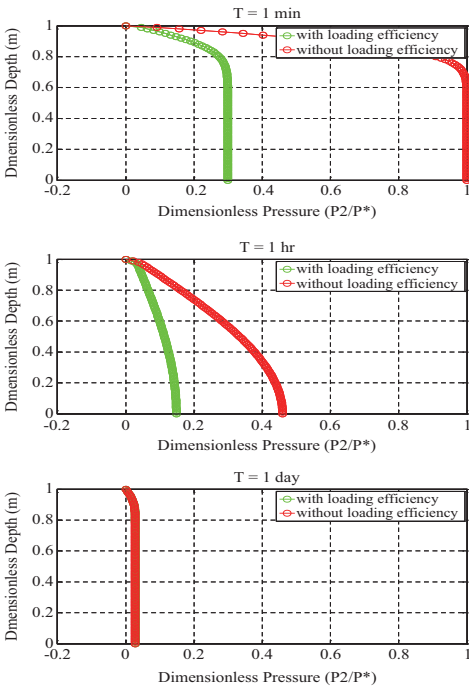


圖 3 黏土之無因次孔隙水壓在有無考慮載重效率下隨土體深度變化圖( $S_2 = 0.97$ )。

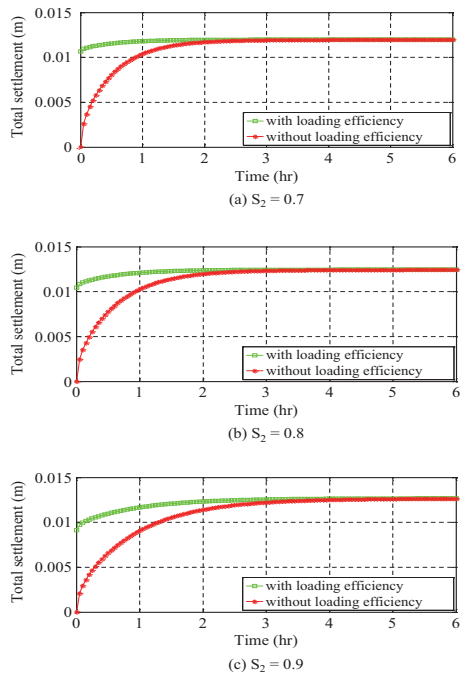


圖 4 黏土在固定載重下, 有無考慮載重效率時之總沉陷量與時間變化圖。

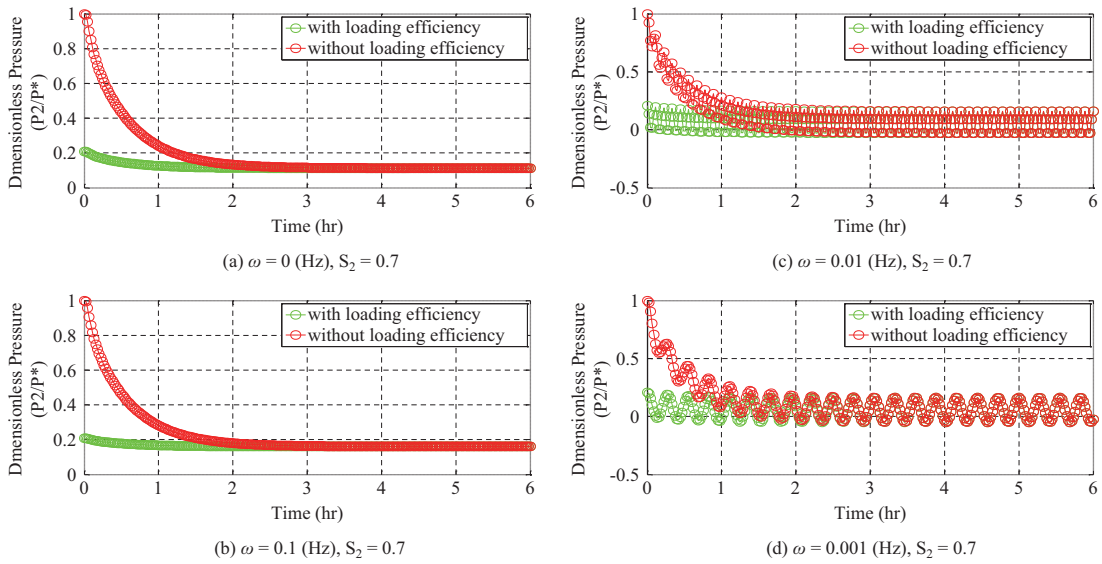


圖 5 黏土在震動載重下，在  $z = 0.5$ ，有無考慮載重效率時之無因次孔隙水壓隨時間變化圖( $S_2 = 0.7$ )。

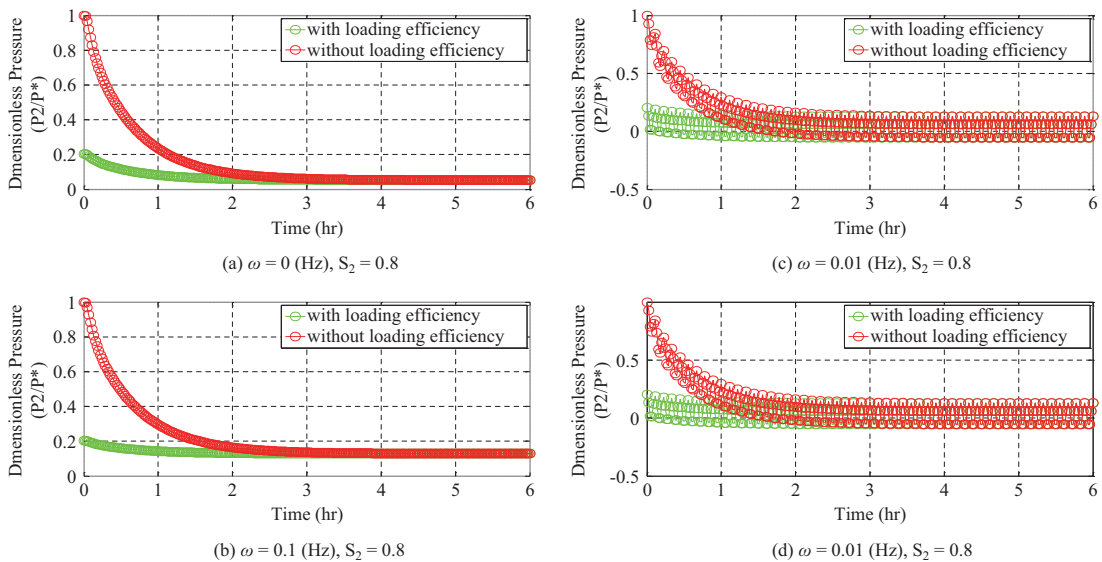


圖 6 黏土在震動載重下，在  $z = 0.5$ ，有無考慮載重效率時之無因次孔隙水壓隨時間變化圖( $S_2 = 0.8$ )。

始飽和度(0.7, 0.8 及 0.9)之結果(邊界條件為上排水邊界)。

圖 5 至圖 7 為黏土在震動載重下，在  $z = 0.5$ ，有無考慮載重效率時之無因次孔隙水壓隨時間

變化圖，並且考慮三種不同初始飽和度(0.7, 0.8 及 0.9)，與三種不同震動頻率( $\omega = 0.1, 0.01$  及 0.001)。邊界條件為上排水邊界。

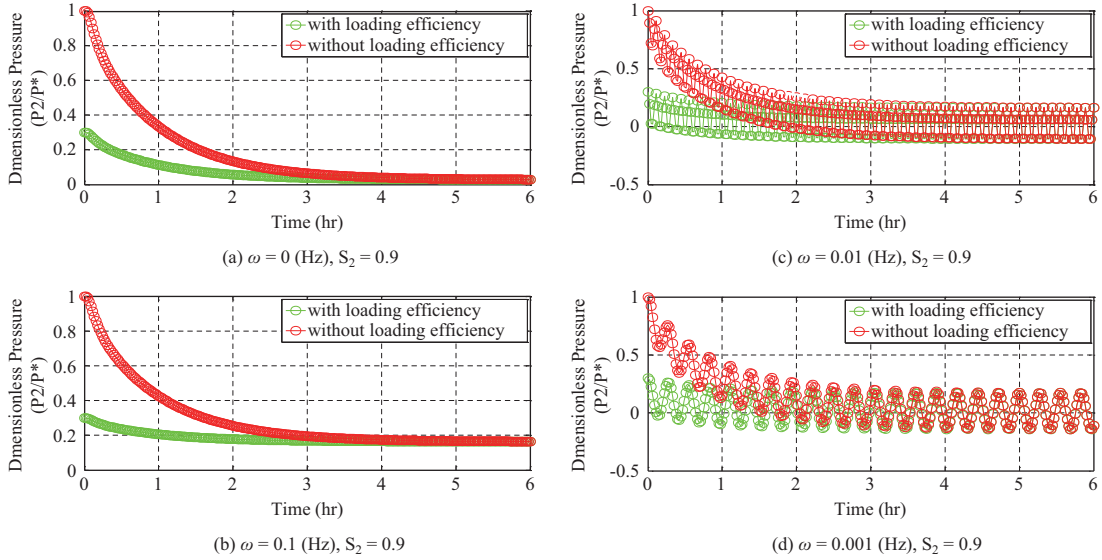


圖 7 黏土在震動載重下，在  $z = 0.5$ ，有無考慮載重效率時之無因次孔隙水壓隨時間變化圖( $S_2 = 0.9$ )。

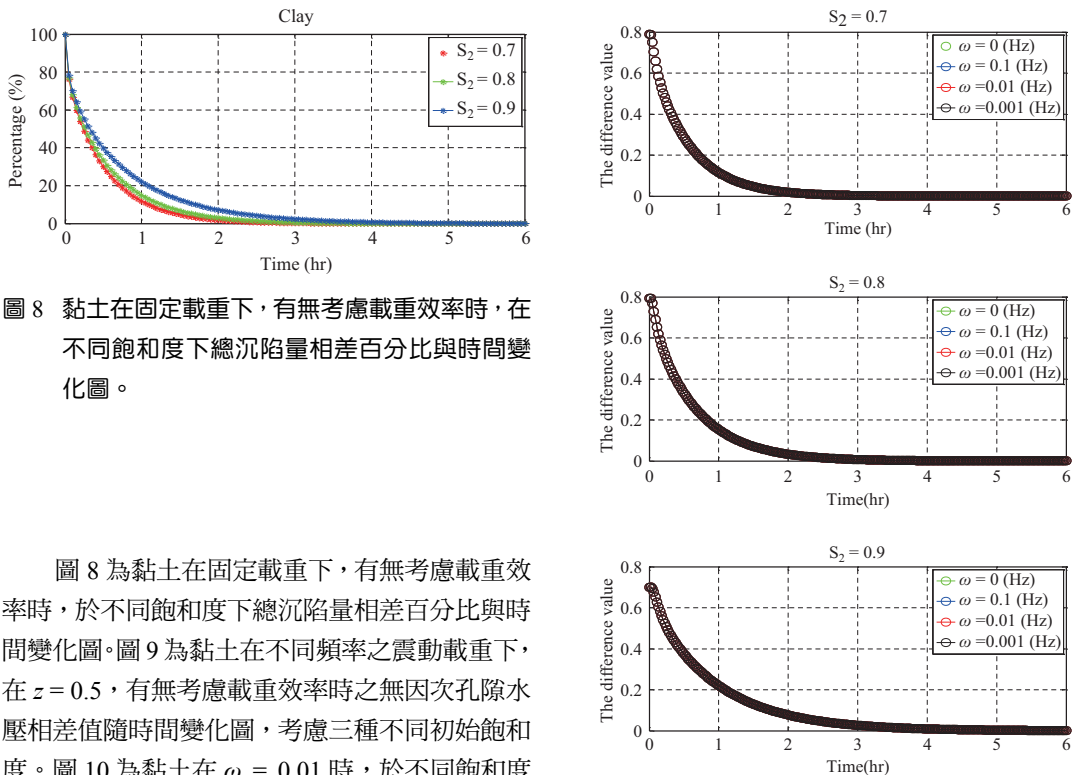


圖 8 黏土在固定載重下，有無考慮載重效率時，在不同飽和度下總沉陷量相差百分比與時間變化圖。

圖 8 為黏土在固定載重下，有無考慮載重效率時，於不同飽和度下總沉陷量相差百分比與時間變化圖。圖 9 為黏土在不同頻率之震動載重下，在  $z = 0.5$ ，有無考慮載重效率時之無因次孔隙水壓相差值隨時間變化圖，考慮三種不同初始飽和度。圖 10 為黏土在  $\omega = 0.01$  時，於不同飽和度下有無考慮載重效率時之無因次孔隙水壓相差值與時間變化圖。

圖 11 至圖 13 為黏土在震動載重下，有無考

圖 9 黏土在不同頻率之震動載重下，在  $z = 0.5$ ，有無考慮載重效率時之無因次孔隙水壓相差值與時間變化圖。

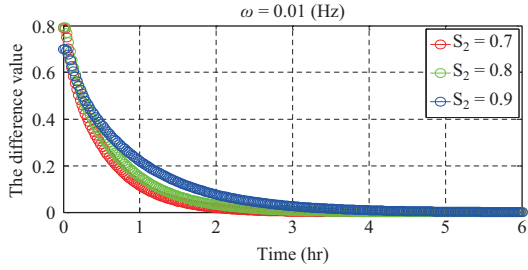
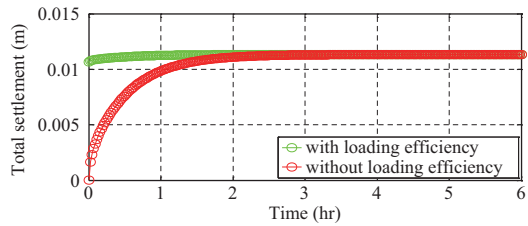
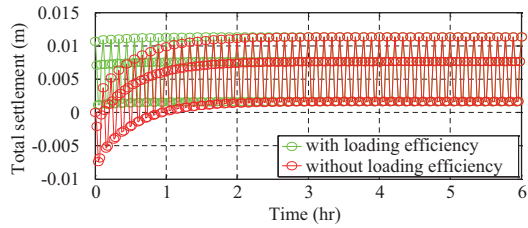


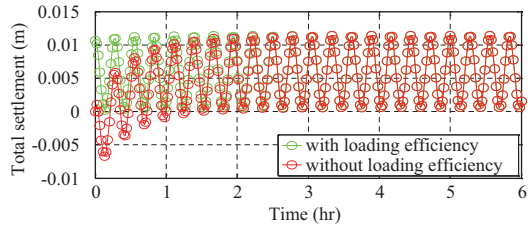
圖 10 黏土在震動載重下( $\omega = 0.01$ )，在  $z = 0.5$ ，不同飽和度下，有無考慮載重效率時之無因次孔隙水壓相差值與時間變化圖。



(a)  $\omega = 0.1$  (Hz),  $S_2 = 0.7$



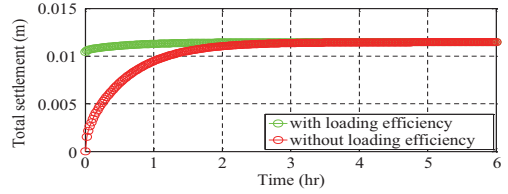
(b)  $\omega = 0.01$  (Hz),  $S_2 = 0.7$



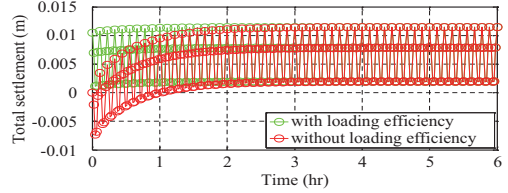
(c)  $\omega = 0.001$  (Hz),  $S_2 = 0.7$

圖 11 黏土在震動載重下，有無考慮載重效率時之總沉陷量與時間變化圖( $S_2 = 0.7$ )。

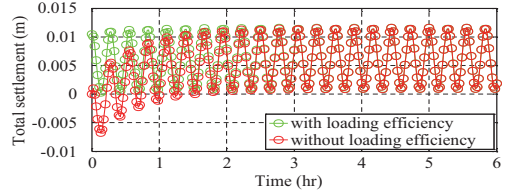
慮載重效率時之總沉陷量與時間變化圖，並且考慮三種不同初始飽和度(0.7, 0.8 及 0.9)，與三種不同震動頻率( $\omega = 0.1, 0.01$  及  $0.001$ )，邊界條件



(a)  $\omega = 0.1$  (Hz),  $S_2 = 0.8$

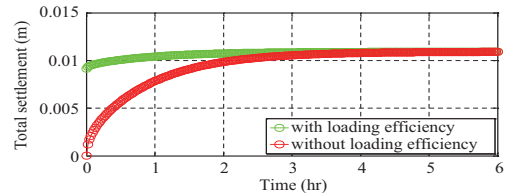


(b)  $\omega = 0.01$  (Hz),  $S_2 = 0.8$

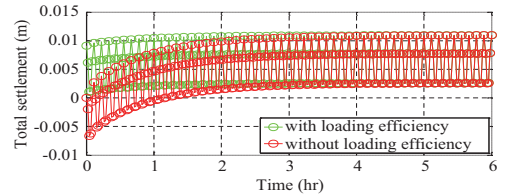


(c)  $\omega = 0.001$  (Hz),  $S_2 = 0.8$

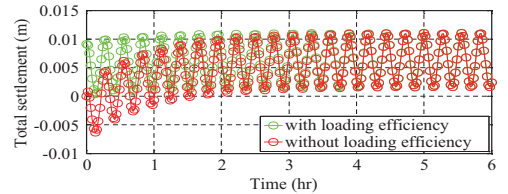
圖 12 黏土在震動載重下，有無考慮載重效率時之總沉陷量與時間變化圖( $S_2 = 0.8$ )。



(a)  $\omega = 0.1$  (Hz),  $S_2 = 0.9$

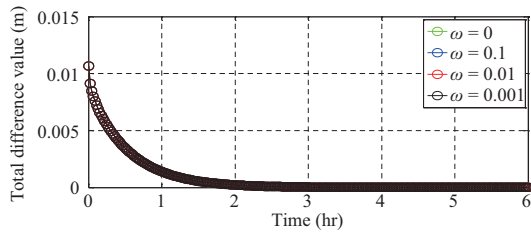


(b)  $\omega = 0.01$  (Hz),  $S_2 = 0.9$

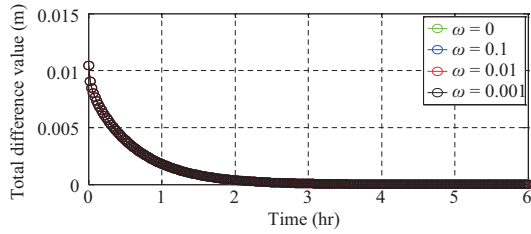


(c)  $\omega = 0.001$  (Hz),  $S_2 = 0.9$

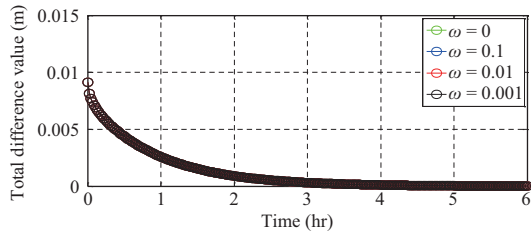
圖 13 黏土在震動載重下，有無考慮載重效率時之總沉陷量與時間變化圖( $S_2 = 0.9$ )。



(a)  $S_2 = 0.7$



(b)  $S_2 = 0.8$



(c)  $S_2 = 0.9$

圖 14 黏土在不同頻率之震動載下，有無考慮載重效率時之總沉陷量相差值與時間變化圖。

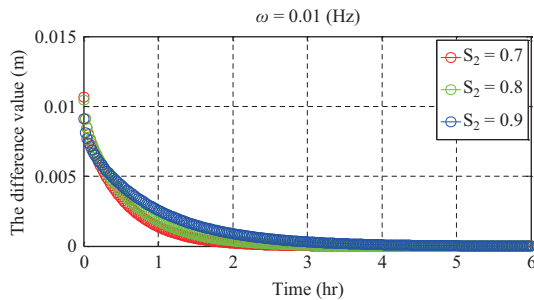
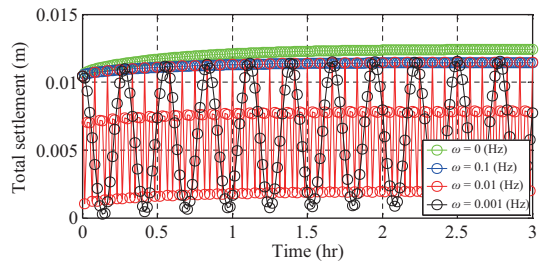
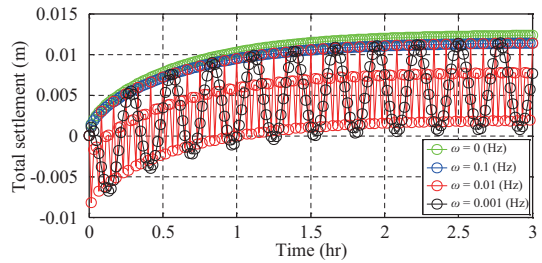


圖 15 黏土在震動載重( $\omega = 0.01$ )，不同飽和度下有無考慮載重效率時之總沉陷量相差值與時間變化圖。

為上排水邊界。圖 14 為黏土在不同頻率之震動載重下，有無考慮載重效率時之總沉陷量相差值



(a)  $S_2 = 0.8$



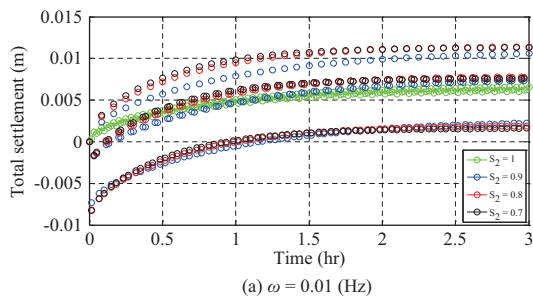
(b)  $S_2 = 0.8$

圖 16 黏土在不同頻率之震動載重與固定載重下，有無考慮載重效率時之總沉陷量與時間變化圖，(a)為有考慮載重效率，(b)為沒有考慮載重效率。

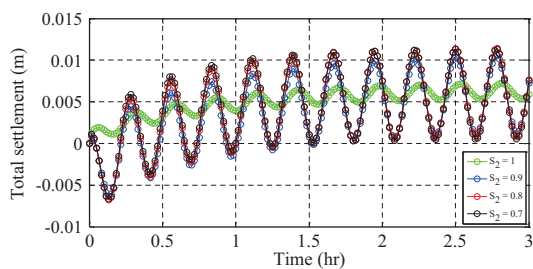
隨時間變化圖，考慮三種不同初始飽和度。圖 15 為黏土在  $\omega = 0.01$  時，於不同飽和度下有無考慮載重效率時之總沉陷量相差值與時間變化圖。

圖 16 為黏土在不同頻率之震動載重與固定載重下，有無考慮載重效率時之總沉陷量與時間變化圖，初始水飽和度為 0.8，邊界條件為上排水邊界，其中(a)圖為有考慮載重效率，(b)圖為沒有考慮載重效率。圖 17 為黏土在震動載重下，不同水飽和度對於沒有考慮載重效率時之總沉陷量與時間變化圖，邊界條件為上排水邊界，其中(a)圖震動頻率為 0.01 (Hz)，(b)圖震動頻率為 0.001 (Hz)。圖 18 為黏土固體、液體與空氣之載重效率與水飽和度變化之關係圖。表 1 和表 2 分別為土壤性質之參數與模式相關參數，表 3 為黏土在固定載重下，有無考慮載重效率時之總沉陷量數據表。





(a)  $\omega = 0.01$  (Hz)



(b)  $\omega = 0.001$  (Hz)

圖 17 黏土在震動載重下，不同水飽和度對於沒有考慮載重效率時的總沉陷量與時間變化圖(a)  $\omega = 0.01$ ，(b)  $\omega = 0.001$ 。

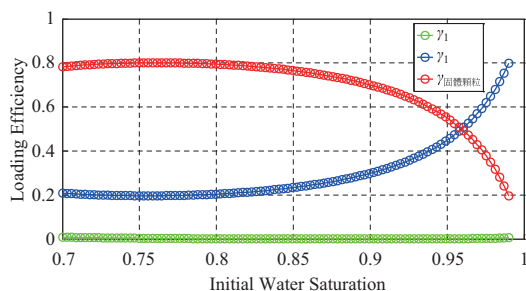


圖 18 黏土之載重效率與水飽和度關係變化圖。

#### 4.1 探討土壤在固定載重下之情形

探討載重效率的影響，圖 1 至圖 3 為黏土在固定載重下於邊界條件為土體表面為透水層與大氣接觸，底部為岩盤或任何不透水層(上排水邊界)，考慮有無載重效率時的無因次孔隙水壓在土壤中的變化，可以看出，不管初始飽和度為 0.7、0.8 或 0.9，當土壤壓密初期( $T = 1$  min)，有考慮

表 1 土壤性質之參數

| 土壤種類      | 率定參數 $\bar{\lambda}(1/m)$ | 率定參數 $\eta$ | 率定參數 $n$ | 孔隙率 $\phi$ | 滲透係數 $k_s$ ( $m^2$ )    | 統體模數 $K_s$ (Mpa) | 剪力模數 $G$ (Mpa) |
|-----------|---------------------------|-------------|----------|------------|-------------------------|------------------|----------------|
| 黏土 (clay) | 1.168                     | 1.165       | 1.165    | 0.475      | $1.699 \times 10^{-14}$ | 4.5              | 2.4            |

資料來源：Rawls *et al.* (1992)

表 2 模式之相關參數

| 各種參數       | 符號       | 數值                                    |
|------------|----------|---------------------------------------|
| 固定壓力(垂直方向) | $p^*$    | 0.1 MPa                               |
| 土體深度       | $h$      | 1 m                                   |
| 固體顆粒之統體模數  | $K_s$    | 35 GPa                                |
| 空氣之統體模數    | $K_1$    | 0.145 MPa                             |
| 水之統體模數     | $K_2$    | 2.25 GPa                              |
| 空氣之密度      | $\rho_1$ | 1.1 kg/m <sup>3</sup>                 |
| 水之密度       | $\rho_2$ | 997 kg/m <sup>3</sup>                 |
| 空氣之黏滯係數    | $\eta_1$ | $18 \times 10^{-6}$ Ns/m <sup>2</sup> |
| 水之黏滯係數     | $\eta_2$ | 0.001 Ns/m <sup>2</sup>               |

資料來源：Lo *et al.* (2007)

載重效率時的無因次孔隙水壓比較小，兩者差異很大(兩者差異達 80%(如圖 1 所示))，但是當壓密達到穩定時( $T = 1$  day)，有無考慮載重效率對於無因次孔隙水壓的結果則無影響。由圖 1 可以看出當壓密時間為  $T = 1$  min 時，因為土體表面為透水層與大氣接觸，故無因次孔隙水壓為零，而土體底部為岩盤或任何不透水層，故無因次孔隙水壓有最大值。

根據總應力的概念，孔隙水壓下降會造成有效應力上升，載重隨後轉嫁改由土壤承受，使孔隙空間變小，並且發生下陷情形，即為土壤沉陷。其中 Terzaghi 假設載重一開始是全部由流體承受，所以一開始沉陷量為零，而 Biot 假設載重一開始由流體及固體所共同承受，所以土壤一開始便會產生立即沉陷，故兩者的假設在初始沉陷量上有很大的差異。圖 4 為黏土之總沉陷量在有無考慮載重效率時與時間之關係圖且邊界條件為上排水邊界，呈現三種不同初始飽和度(0.7, 0.8 及 0.9)之結果。在考慮載重效率時到達穩定時間

表 3 黏土在固定載重下，有無考慮載重效率時之總沉陷量數據表

| 黏土(clay) |             |        |        |             |        |        |             |        |        |
|----------|-------------|--------|--------|-------------|--------|--------|-------------|--------|--------|
|          | $S_2 = 0.7$ |        |        | $S_2 = 0.8$ |        |        | $S_2 = 0.9$ |        |        |
| 時間(hr)   | 0.5         | 1.5    | 2.5    | 0.5         | 1.5    | 2.5    | 0.5         | 1.5    | 2.5    |
| 有載重效率(m) | 0.0116      | 0.0119 | 0.0119 | 0.0117      | 0.0122 | 0.0124 | 0.0109      | 0.0120 | 0.0124 |
| 無載重效率(m) | 0.0081      | 0.0113 | 0.0118 | 0.0078      | 0.0114 | 0.0122 | 0.0066      | 0.0105 | 0.0119 |
| 相差(%)    | 30.18       | 5.04   | 0.75   | 33.33       | 6.76   | 1.45   | 39.84       | 12.67  | 4.25   |

約為 1.5 小時，而無考慮載重效率時到達穩定時間約為 3 小時，在初始沉陷量的差異上，可由表 3 看出，在水飽和度為 0.9 時，當壓密時間為 0.5 小時，兩者之沉陷量相差 39.84%，表示壓密初期，沉陷量差異很大，但是當壓密時間為 2.5 小時，沉陷量相差 4.25%，表示當壓密到達穩定時兩者沉陷量差異很小。

表 3 可以看出黏土在壓密初期有無考慮載重效率時之沉陷量有明顯不同，當邊界條件固定時，初始水飽和度越大，壓密初期時之土壤沉陷量相差百分比差異越大。

圖 8 可以看出黏土在固定載重及相同邊界條件下，壓密初期時之土壤沉陷量相差百分比大小比較，當初始水飽和度為 0.9 時相差百分比最大，其次為 0.8，相差百分比最小為 0.7，當壓密到達穩定時，相差百分比都趨近於零。圖 18 可以看出紅色為黏土之固體載重效率，藍色為液體之載重效率，綠色為空氣之載重效率，三者總和為 1，由液體之載重效率可以看出最小值發生在初始水飽和度約為 0.75 時，當水飽和度上升與下降，載重效率值都變大。

#### 4.2 探討土壤在震動載重下之情形

從圖 5 至圖 7 可以看出當土壤壓密初期，有考慮載重效率時的無因次孔隙水壓比較小，兩者差異很大(兩者差異約 80%(如圖 5 所示))，但是當壓密達到穩定時，有無考慮載重效率時的結果就沒有影響無因次孔隙水壓，兩者結果幾乎一致。壓密達到穩定時間約為 3 小時，振動頻率不影響壓密到達穩定時間。

圖 9 可以看出，不管振動頻率為多少，當初

始水飽和度固定時，有無考慮載重效率時之無因次孔隙水壓相差值都相同，表示頻率大小不影響無因次孔隙水壓之相差值。圖 10 可以看出黏土在相同邊界條件下，震動頻率為 0.01 時，初始水飽和度的不同對於有無考慮載重效率時之無因次孔隙水壓相差值的影響，壓密初期時，可以看出初始水飽和度為 0.7 相差值最大，其次為 0.8，最小為 0.9，當壓密過程達到中期時，最大值發生在初始水飽和度為 0.9，其次為 0.8，相差質最小為 0.7，最後當壓密到達穩定時，相差值都趨近於零。

當外部載重為震動載重時，有無考慮載重效率於土壤沉陷在壓密初期有很大的差異，從圖 11 至圖 13 中可以看出，於不同震動頻率時，當不考慮載重效率，土壤壓密初期會出現負沉陷量，因為本研究定義正值代表土壤沉陷，如果出現負值，代表土壤膨脹，這是不合理的，但是從 Terzaghi 的假設理論推倒出來的公式中，沉陷量確實是算出負值的，因為(46)式中  $r_1$  及  $r_2$  是負值，但是都非常小， $r_1$  約等於  $-10^{-8}$ ， $r_2$  約等於  $-10^{-7}$ ，再根據 Terzaghi 初始條件的假設， $p_1(z, 0) = p^*$ 、 $p_2(z, 0) = p^*$  (22 式)，會造成初始流體壓力值非常大，造成(46)式中後面兩項變成負值，故沉陷量於載重作用初期會得出負值，而當壓密到達穩定時，孔隙水壓會逐漸消散，最後土壤的沉陷量在有無考慮載重效率時會是相同的，這表示當土壤壓密初期，我們必須考慮載重效率的影響，因為壓密初期，土壤會出現負值。

圖 14 中可以看出，當初始水飽和度固定時，不管振動頻率為多少，有無考慮載重效率時之總沉陷量相差值都相同。圖 15 可以看出黏土在震

動頻率為 0.01 時，初始水飽和度的不同對於有無考慮載重效率時之總沉陷量相差值的影響，壓密初期時，可以看出初始水飽和度為 0.7 相差值最大，其次為 0.8，最小為 0.9，當壓密過程達到中期時，有無考慮載重效率對總沉陷量差異值最大發生在初始水飽和度為 0.9，其次為 0.8，相差質最小為 0.7，最後當壓密到達穩定時，相差值都趨近於零。

圖 16 可以看出黏土在初始飽和度為 0.8 時，外部載重分為固定載重與震動載重，有無考慮載重效率時之總沉陷量比較，從(a)圖中可以看出，固定載重時土壤沉陷量最大，接者是振動頻率為 0.001, 0.01 與 0.1，振動頻率越大，沉陷量越小；(b)圖可以得到相同結果，只是在壓密初期，只要是振動載重，沉陷量就會出現負值，因為圖中是每隔 80 秒取一個點，故  $\omega = 0.1$  時才不會出現震動情形，實際上沉陷量還是有出現負值，但是當壓密到達穩定時，沉陷量會變成正值。

圖 17 可以看出當外部載重為震動載重時並且不考慮載重效率，當土壤為未飽和，壓密初期會出現負沉陷量，但是當土壤為飽和時，卻沒有這個問題，代表 Terzaghi 的假設在飽和土壤是合理的，但是到了未飽和土壤又考慮震動載重時，會出現不合理值，因為當初 Terzaghi 的假設就是建立在土壤為飽和的情況下，本研究把它應用在未飽和土壤中，發現在震動載重下，壓密初期因初始流體壓力條件過大造成沉陷量出現負值(膨脹)，表示載重作用初期必須要考慮到載重效率的影響。

## 五、結論

本研究根據 Lo *et al.* (2014)所發表的孔彈性壓密理論進行研究，並分別利用 Terzaghi (1925) 及 Biot (1941)所提出的概念，前者(Terzaghi)假設載重一開始是全部由流體承受並不考慮載重效率，後者(Biot)假設載重一開始由流體承受的部份是由載重效率/loading efficiency)所決定，推導出邊界條件為土體表面為透水層與大氣接觸，底部為岩盤或任何不透水層(上排水邊界)的孔隙水壓

以及隨時間變化的總沉陷量。

探討載重效率的影響，當載重為固定載重時，土壤壓密初期( $T = 1 \text{ min}$ )，有考慮載重效率時的無因次孔隙水壓比較小，而當壓密達到穩定時( $T = 1 \text{ day}$ )，有無考慮載重效率時兩者結果幾乎一致。當載重為震動載重時，不管初始飽和度為 0.7, 0.8 或 0.9，震動頻率為 0.1, 0.01 或 0.001，當土壤壓密初期，有考慮載重效率時的無因次孔隙水壓比較小，而當壓密達到穩定時，兩者結果幾乎一致。而土壤的總沉陷量在壓密初期也有明顯的不同，最後不管有無考慮載重效率，當壓密時間到達穩定時，兩者的總沉陷量是一樣的。但是震動載重在不考慮載重效率時之總沉陷量會出現不合理值，當不考慮載重效率，土壤壓密初期會出現負沉陷量，因為出現負值代表土壤膨脹，用物理來解釋這是不合理的，但是從 Terzaghi 的假設理論推倒出來的公式中，沉陷量確實是算出負值的，因為 Terzaghi 初始條件的假設會造成初始流體壓力值非常大，而根據 Biot 的假設在初始條件上會乘上一個比例，也就是載重效率，會使初始流體壓力值變小，故沉陷量就不會得出負值，這表示當土壤壓密初期，我們必須考慮載重效率的影響，但是當壓密到達穩定時，兩者結果會是一樣的。

土壤的壓密行為對於不管是區域地下水超抽所引起地層下陷，或是結構物載重所引起的沉陷等的應對處置，都是關鍵的課題。對土壤壓密的探討，以往大多針對飽和土壤，本研究進一步探討未飽和土壤的壓密行為，可使我們對土壤壓密有更深入的了解。本研究以黏土進行模擬分析，其結果顯示，載重效率影響的主要差異在土壤的壓密初期，當壓密穩定時，則載重效率的考量影響不大，亦即與傳統分析結果相近，此結果可提供工程施工上的參考。

## 符號說明

$$A_m \quad \left[ \frac{M}{LT^2} \right] = \text{係數定義於(37)式}$$

$$a_{ij} \quad \left[ \frac{M}{LT^2} \right] = \text{彈性係數}$$

|                                 |  |  |   |
|---------------------------------|--|--|---|
| $B_{in}$                        | $[-]$ = 係數定義於(40)式                                 | $\bar{p}_{1n}^c$ 和 $\bar{p}_{2n}^c$            | $\left[\frac{M}{LT^2}\right]$ = $p_1$ 和 $p_2$ 的齊次解          |
| $b_1$ 和 $b_2$                   | $\left[\frac{L^3T}{M}\right]$ = 係數定義於(16)式         | $\bar{p}_{1n}^p$ 和 $\bar{p}_{2n}^p$            | $\left[\frac{M}{LT^2}\right]$ = $p_1$ 和 $p_2$ 的特解           |
| $c_v$ 和 $\tilde{c}_v$           | $\left[\frac{L^2}{T}\right]$ = 分別為水和空氣的壓密係數        | $p_c$  | $\left[\frac{M}{LT^2}\right]$ = 毛細壓力                        |
| $D_{in}$                        | $\left[\frac{M^2}{L^2T^6}\right]$ = 係數定義於(41)式     | $p_f$  | $\left[\frac{M}{LT^2}\right]$ = 為孔隙流體平均壓力                   |
| $e$                             | $[-]$ = 固體相的體積應變量                                  | $p^*$  | $\left[\frac{M}{LT^2}\right]$ = 固定載重                        |
| $\bar{e}$                       | $[-]$ = 固體相的應變張量                                   | $q_1, q_2, q_3, q_4$                           | $\left[\frac{LT^2}{M}\right]$ = 係數定義於(16)式                  |
| $G$                             | $\left[\frac{M}{LT^2}\right]$ = 孔隙介質剪力模數           | $q(t)$   | $\left[\frac{M}{LT^2}\right]$ = 隨時間變化的外部載重                  |
| $G_m(t)$                        | $\left[\frac{M}{LT^3}\right]$ = Fourier 係數         | $R_{\zeta\zeta}$                               | $\left[\frac{M}{L^3T}\right]$ = 流體相 $\zeta$ 與固體相之間的黏滯耦合阻力參數 |
| $g$                             | $\left[\frac{L}{T^2}\right]$ = 重力加速度               | $r_1$ 和 $r_2$                                  | $\left[\frac{LT^2}{M}\right]$ = 係數定義於(16)式                  |
| $H$                             | $\left[\frac{M}{LT^2}\right]$ = 不排水彈性波模數           | $S_\zeta$                                      | $[-]$ = 表示 $\zeta$ 相流體之飽和度                                  |
| $h$                             | $[L]$ = 單位土體厚度                                     | $S_\zeta^c$                                    | $[-]$ = 濕潤性流體有效飽和度  |
| $h_c$                           | $[L]$ = 毛細壓力                                       | $s(t)$   | $[L]$ = 隨時間變化的總沉陷量  |
| $K_1$ 和 $K_2$                   | $\left[\frac{M}{LT^2}\right]$ = 分別為空氣和水之統體模數       | $t$  | $[T]$ = 模擬時間  |
|                                 | 數  | $\bar{t}_s$                                    | $\left[\frac{M}{L^3T}\right]$ = 為固體相之應力張量                   |
| $K_b$                           | $\left[\frac{M}{LT^2}\right]$ = 土壤基質統體模數           | $\bar{u}_\zeta$                                | $[L]$ = 為流體相之位移向量   |
| $K_s$                           | $\left[\frac{M}{LT^2}\right]$ = 固體顆粒之統體模數          | $\bar{u}_s$                                    | $[L]$ = 為固體相之位移向量   |
| $K_u$                           | $\left[\frac{M}{LT^2}\right]$ = 不排水統體模數            | $w$  | $[L]$ = 為固體垂直方向( $z$ 方向)之位移量                                |
| $K_v^{(u)}$                     | $\left[\frac{M}{LT^2}\right]$ = 不排水垂直統體模數          | $Y_m$  | $\left[\frac{M}{LT^3}\right]$ = 係數定義於(28)式                  |
| $k_s$                           | $[L^2]$ = 為孔隙介質的滲透係數                               | $Y_{1n}$ 和 $Y_{2n}$                            | $\left[\frac{M}{LT^3}\right]$ = 係數定義於(30)式                  |
| $k_{r1}$ 和 $k_{r2}$             | $[-]$ = 為非濕潤性流體與濕潤性流體之相對滲透係數                       | $z$  | $[L]$ = 土體高度垂直方向  |
| $M_1$ 和 $M_2$                   | $\left[\frac{M}{LT^2}\right]$ = 流體蓄水因子             | $\eta$   | $[-]$ = 率定參數  |
| $m$                             | $[-]$ = 率定參數                                       | $\chi$   | $\left[\frac{1}{L}\right]$ = 率定參數                           |
| $n$                             | $[-]$ = 率定參數                                       | $\bar{\delta}$                                 | $[-]$ = 單位張量  |
| $p_1$ 和 $p_2$                   | $\left[\frac{M}{LT^2}\right]$ = 空氣和水之壓力            | $\varepsilon_1 = \bar{\nabla} \cdot \bar{u}_1$ | $[-]$ = 空氣的體積應變量  |
| $\bar{p}_{1n}$ 和 $\bar{p}_{2n}$ | $\left[\frac{M}{LT^2}\right]$ = $p_1$ 和 $p_2$ 的完整解 | $\varepsilon_2 = \bar{\nabla} \cdot \bar{u}_2$ | $[-]$ = 水的體積應變量   |
|                                 |  | $\phi$   | $[-]$ = 孔隙率   |
|                                 |  | $\theta_\zeta$                                 | $[-]$ = $\alpha$ 相之體積分量                                     |

|                                   |  |
|-----------------------------------|--|
| $\theta_2^r$                      | [-] = 濕潤流體殘餘體積分量                             |
| $\theta_2^s$                      | [-] = 濕潤流體飽和體積分量                             |
| $\eta_\xi$                        | $\left[ \frac{M}{LT} \right]$ = 為流體的動力黏滯係數   |
| $\bar{\sigma}$                    | $\left[ \frac{M}{L^3T} \right]$ = 孔隙介質的總應力張量 |
| $\omega$                          | $\left[ \frac{1}{T} \right]$ = 震動頻率          |
| $\alpha$                          | [-] = Biot-Willis 係數                         |
| $\alpha_{1n}$ 和 $\alpha_{2n}$     | $\left[ \frac{L^2}{T} \right]$ = 係數定義於(37)式  |
| $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$           | [-] = 空氣與水的載重效率                              |
| $\delta_s, \delta_1$ 和 $\delta_2$ | [-] = 孔隙變化之無因次參數                             |
| $\lambda_n$ 和 $\lambda_m$         | [-] = 特徵函數                                   |
| $\Gamma$                          | [-] = 係數定義於(34)式                             |

### 參考文獻

- Biot, M.A., "General Theory of Three-Dimensional Consolidation," J. Appl. Phys., Vol. 12, No. 2, pp. 155-164 (1941).
- Biot, M.A., "Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid," J. Appl. Phys., Vol. 26, No. 2, pp. 182-185 (1955).
- Biot, M.A., "Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid, I, Low Frequency Range," J. Acoustic Soc. Am., Vol. 28, No. 2, pp. 168-178 (1956).
- Biot, M.A. and Willis, D.G. "The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation," J. Appl. Mech., Trans. ASME, Vol. 79, pp. 594-601 (1957).
- Jacob, C.E., "On the flow of water in an elastic artesian aquifer," Eos. Trans. AGU, Vol. 21, pp. 574-586, 1940.
- Lo, W.C., Sposito, G. and Majer, E., "Immiscible two-phase fluid flows in deformable porous media, Adv. Water Resour." Vol. 25, No. 8-12, pp. 1105-1117, 2002.
- Lo, W.C., Sposito, G. and Majer, E., "Wave propagation through elastic porous media containing two immiscible fluids," Water Resour. Res., Vol. 41, W02025, 2005.
- Lo, W.C., Yeh, C.L. and Tsai, C.T., "Effect of soil texture on the propagation and attenuation of acoustic wave at unsaturated conditions," J. Hydrology, Vol. 338, pp. 273-284, 2007.
- Lo, W.C., Yeh, C.L. and Jan, C.D., "Effect of soil texture and excitation frequency on the propagation and attenuation of acoustic wave at saturated conditions," J. Hydrology, Vol, 357, pp. 270-281, 2008.
- Lo, W.C., Sposito, G. and Huang, Y. H., "Modeling seismic stimulation: Enhanced non-aqueous fluid extraction from saturated porous media under pore-pressure pulsing at low frequencies," J. Appl Geophys, Vol. 78, pp. 77-84, 2012.
- Lo, W.C., and Sposito, G., "Acoustic waves in unsaturated soils," Water Resour. Res., Vol. 49, No. 9, pp. 5674-5684, 2013.
- Lo, W.C., Sposito, G. and Chu, H., "Poroeleastic theory of consolidation in unsaturated soils," Vadose Zone J., Vol. 13, No. 5, 2014.
- Terzaghi, K., Erdbaumechanik auf Bodenphysikalischer, Deutichke, Vienna, 1925.
- Terzaghi, K., Theoretical soil mechanics, John Wiley, New York, 1943.
- van Genuchten, M. T., "A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils," Soil Sci. Soc. Am. J., Vol. 44, No. 5, pp. 892-898, 1980.
- van der Kamp, G. and Gale, J.E., "Theory of earth tide and barometric effects in porous media," Wat. Resour. Res., Vol. 31, pp. 3103-3106, 1983.
- Van der Kamp, G., Theory of Earth tide and barometric effects in a horizontal aquifer-aquitard system, Publ. R-844-7-E-89,

- 49 pp., Saskatchewan Res. Counc., Saskatoon, 1989.
18. Van der Kamp, G. and Maathuis, H., Annual fluctuations of groundwater levels as a result of loading by surface moisture, *J. Hydrol.*, 1 27, 137-152, 1991.
19. Van der Kamp, G., Tidally induced fluid movement and tidal energy dissipation in subsea formations, paper presented at 39th Annual Pacific Northwest AGU Meeting, Victoria, B.C., Sept. 23-25, 1992.
20. Weeks, E. P., Barometric fluctuations in wells tapping deep unconfined aquifers, *Water Resour. Res.*, 15, 1167-1176, 1979.
21. Wang, K. and E. E., Davis, Theory for the propagation of tidally induced pore pressure variations in layered subseafloor formations, *J. Geophys. Res.*, 101(B5), 11, 483-11,495.1996.

收稿日期：民國 107 年 2 月 22 日

修正日期：民國 107 年 4 月 23 日

接受日期：民國 107 年 4 月 25 日