

專 論

管道氣體流可壓縮性引致誤差之分析
**Analysis of Error Induced by Compressibility of Gas
Flow in Conduits**

國立臺灣大學土木工程學系

名譽教授

水工試驗所

特約研究員

顏 清 連*

Chin-Lien Yen

摘 要

由於摩擦阻力作用或管道斷面積變化的關係，管道氣體流的壓力沿程會有變化，因此氣體密度及流速亦隨之而變以滿足質量守恆原理。然而為實際應用上的方便，卻常見在密度為固定不變的假設條件下進行流況分析，結果有時會出現較大誤差。為釐清此一假設所引致之可能誤差，本文以理想氣體定律所定義之密度、壓力與溫度之間的關係為基礎，探討兩類管道氣體流之沿程壓力變化；第一類為馬赫數 $M < 0.3$ (亦即 $M^2 \ll 1$) 的均勻管道等溫氣體流，第二類為 $M < 1$ 的管道斷面變化段之無摩擦阻力絕熱氣體流。第一類的分析結果顯示，未考慮密度沿程變化之壓降值 Δp^* 較有考慮者之 Δp 偏高；第二類的結果顯示，壓降(或壓升)值 Δp^* 較 Δp 偏低(或偏高)依斷面積變化為束縮(或擴張)而定。同時，本文並分別推導建立這兩類管道氣體流之 Δp 與 Δp^* 之關係，以便作為修正密度沿程變化之效應。

關鍵詞：可壓縮性，溫等流，絕熱流，壓力變化，誤差分析。

ABSTRACT

Due to frictional resistance or variation of cross-sectional area, the pressure of gas flow in conduit changes along the main flow direction, and its density and velocity also change accordingly so as to satisfy the principle of mass conservation. However, for the convenience in practice, it is often seen that the density is assumed to remain constant

*通訊作者，國立臺灣大學土木工程學系名譽教授，水工試驗所特約研究員，10617 台北市大安區羅斯福路 4 段 1 號，clyen@ntu.edu.tw

throughout in the analysis of flow characteristics. As a result, significant errors may appear in some cases. In order to clarify the possible errors induced by such an assumption, this article is to analyze pressure changes for gas flow in two kinds of conduits, based on ideal gas law which defines the relations among density, pressure and temperature. The first kind is isothermal gas flow in uniform conduit, with Mach number $M < 0.3$ (i.e., $M^2 \ll 1$), and the second one is frictionless adiabatic flow in conduit having nonuniform cross-section, with $M < 1$. For the first kind, the result indicates that the pressure drop under the assumption of constant density, Δp^* , is higher than that under variable density, Δp . For the second kind, the pressure drop (or rise) Δp^* is lower (or higher) than Δp , depending on the nature of cross-sectional variation being convergent (or divergent). In the meantime, a relationship between Δp and Δp^* is derived for error correction in each kind, respectively.

Keywords: Compressibility, Isothermal flow, Adiabatic flow, Pressure change, Error analysis.

一、前 言

雖然從理論上或實務上來看，有很多流體運動的現象不論在液體或氣體都具相同的特性，但是液體特有的自由表面是氣體所沒有的。不過，大氣中的冷氣團在暖氣團之下的運動現象卻與“自由表面”現象有相當程度的相似性。在另一方面，氣體則具有隨壓縮/膨脹而來的熱效應，卻是液體所沒有的。

對於這種熱效應的探討已經超越流體力學的範疇，而是另一個學科叫做熱動力學的基礎。這兩個學科之間的界限在於工程應用上熱效應是否可以略而不計。為能確定在未考慮熱效應情況下可能導致的誤差，仍需借助於熱動力學的一些基本原理，最主要就是定義氣體密度、壓力及溫度之間互相關係的理想氣體定律。嚴格而言，沒有真正的理想氣體，但是就遠離液相狀態的真實氣體而言，其物理特性之關係可以理想氣體定律近似之。

本文以下首先對理想氣體定律作簡要介紹，以表明氣體密度、壓力、溫度及絕熱指數之間的關係，並闡明體積彈性係數、壓力波傳速率之定義及其物理意義。其次，就在均勻管道等溫氣體流因摩擦阻力導致沿程壓力、密度以及流速

變化的情況下，分析運動方程式中可省略動量變化項之條件，並進而推導出未考慮沿程密度變化所引致的壓降誤差關係式。繼而，對摩擦阻力可省略且絕熱情況下的氣體流，分析管道斷面變化段之流速及密度變化與斷面積變化之關係。最後並推導出來考慮沿程密度變化可能導致壓力變化之誤差關係式。

以上二種情況下之沿程壓降(或壓升)誤差關係式，可分別提供推估一定管長或一定斷面積減量(或增量)之壓降(或壓升)誤差值，並可據以作誤差修正之用。

二、氣體壓縮之物性

2.1 密度與壓力

相對於液體而言，氣體是可壓縮性很高的流體，其密度除隨壓力而變之外，亦與溫度有關。就理想氣體而言，在壓縮或膨脹的過程中，其密度與壓力成正比，而與溫度成反比，即：

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad \dots\dots\dots (1)$$

其中 ρ 為密度， p 為絕對壓力； R 為通用氣體常數； T 為絕對溫度。式(1)稱為理想氣體定律。若氣體在壓縮或膨脹過程中摩擦阻力可以忽略不

計而且沒有熱交換的情況發生，稱為等熵過程 (isentropic process)，則絕對壓力與密度之間的關係為：

$$\frac{p}{\rho^{k_r}} = \text{const.} \quad \dots\dots\dots(2)$$

其中 $k_r = c_p/c_v$ ； c_p 為定壓狀態下的比熱； c_v 為定體積狀態下的比熱。比熱的定義為單位流體質量的溫度升高或降低一度所吸收或釋放的熱能。

2.2 彈性係數與波速

可壓縮性是用來表示一個給定體積 \forall 的流體承受壓力的變化量 dp 與其所對應的體積變化量 $d\forall$ 之間的關係，代表該流體被壓縮的難易程度。如將壓力增量 dp 移除，則體積變化量消失，而恢復到原來的體積。換言之，流體為一種彈性物體，因此衡量可壓縮特性的參數稱為體積彈性模數 E_v ，其定義為：

$$E_v = -\frac{dp}{d\forall/\forall} \quad \dots\dots\dots(3)$$

上式中等號右側的負號是因為流體受壓力作用時體積會減少，而且由於體積減少質量密度 ρ 會增加 $d\rho$ ，故 $-d\forall/\forall = d\rho/\rho$ ，亦即式(3)可改寫成：

$$E_v = \frac{dp}{d\rho/\rho} \quad \dots\dots\dots(4)$$

因為 $d\forall/\forall$ 及 $d\rho/\rho$ 為沒有單位的純量，所以 E_v 具有與 dp 相同的單位。

液體的可壓縮性很低，也就是說很大的壓力變化量 Δp 僅能產生很小的體積變化比 $\Delta\forall/\forall$ 。因此，液體的 E_v 值是非常的大。這是液體的可壓縮性在工程應用上受到特別重視的原因。

一個孤立的微小彈性壓力波 Δp 在流體中以速度 $-c$ 傳遞，如圖 1(a)所示，如果 Δp 維持不變，則其傳遞速度 $-c$ 亦不變。現在以速度 $V = +c$ 疊加在以 $-c$ 傳遞壓力波的流場，使流場變成一個恆定流狀態，如圖 1(b)所示。由於恆定流沿程 (x 方向) 的柏努利總合 $B_s (= p + \rho c^2/2)$ 不變，即 $dB_s/dx = 0$ ，可得：

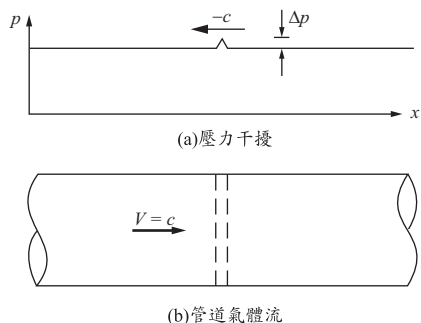


圖 1 微小壓力波傳遞示意圖

$$dp = -\rho c dc \quad \dots\dots\dots(5)$$

同時，由質量守恆原理， $d(\rho c)/dx = 0$ ，可得：

$$\rho dc + cd\rho = 0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

將式(5)及式(6)中的 dc 消去後可得：

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad \dots\dots\dots(7)$$

由式(4)可知 $dp/d\rho = E_v/\rho$ ，將之代入上式可得：

$$c = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}} \quad \dots\dots\dots(8)$$

上式指出，微小壓力波在流體中的傳遞速率隨 E_v/ρ 而變，不是只依 E_v 而變。雖然液體的 E_v 值遠遠大於氣體的 E_v 值，但因為二者的 ρ 值也有很大的差異，所以它們的 c 值是相對比較接近的。水體中的 c 值約為 $1,433 \text{ m/s}$ ，而空氣中的 c 值約為 335 m/s 。微小壓力波在流體中的傳遞速率其實是基礎物理學中的音速，不過在流體中的壓力波有時候會產生聲波以外的效應。事實上空氣流速 V 是有可能超越音速 c 的，亦即 $V/c > 1$ ，而比值 V/c 定義為馬赫數 M ； $M > 1$ 的流場稱為超音速流場。雖然微小壓力波不可能逆向朝超音速流的上游方向傳遞，但高強度壓力波(亦即壓力增幅 Δp 很大)的傳遞速率還是有可能大於空氣中的音速，而作逆向傳遞。

三、均勻管道等溫氣體流

在溫度固定的情況下，由式(1)可知 ρ 是與 p 成正比，即：

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \dots\dots\dots(9)$$

其中下標 0 表示基準斷面的狀態。在均勻管道氣體流中，由於管壁摩擦阻力的關係，壓力往下游方向逐漸遞減，因而導致密度亦隨著降低。在這種情況下，流速必須沿程增加，才能維持各個斷面通過相同質量通量；因此流速沿程漸增，壓力必須配合更進一步下降以滿足位變加速的要求。換言之，沿程的壓力變化是管壁摩擦阻力及加速度的綜合效應，因此運動方程式可以寫成[1]：

$$\rho V dV + dp + f \frac{\rho V^2}{2D} dx = 0 \quad \dots\dots\dots(10)$$

其中 V 為斷面平均流速； dV 、 dp 及 dx 分別為二斷面間之流速變化、壓差及管長，如圖 2 所示。

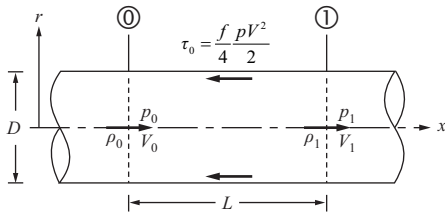


圖 2 均勻管道等溫氣體流示意圖

由質量守恆原理可知 $dV = -Vd\rho/\rho$ ，且從式(7)可知 $d\rho = dp/c^2$ 。將這些關係式代入式(10)等號左側第一項並經整理後，式(10)變成：

$$(1 - M^2)dp + f \frac{\rho V^2}{2} dx = 0 \quad \dots\dots\dots(11)$$

上式顯示，當 $M < 0.3$ (亦即 $M^2 \ll 1$) 時，代表位變加速度項 $\rho V dV$ 對壓差 Δp 之影響很小。這與一般工程應用上在 $M < 0.3$ 時，將可壓縮性略而不計之經驗相符[2]。因此，運動方程式可以簡化成：

$$dp + f \frac{\rho V^2}{2} dx = 0 \quad \dots\dots\dots(12)$$

如果管壁不是絕熱的，則管中流動的氣體為等溫且因而其動力粘性係數亦為定值。同時，由於管道中的氣體質量通量 $\rho Q (= \rho VA)$ 及管徑 D 是給定的，因此 $\rho V = \rho_0 V_0$ ，雷諾茲數 $R = \rho V D / \mu = \rho_0 V_0 D / \mu$ ，亦即二者沿程分別為定值；並且引入

式(9)後可得： $p/p_0 = \rho/\rho_0 = V_0/V$ 。在這些條件之下，管道氣體流沿程的壓力梯度變化可寫成：

$$-\frac{p}{p_0} \frac{dp}{dx} = f \frac{\rho_0 V_0^2}{2D} \quad \dots\dots\dots(13)$$

將上式從 $x = 0$ 積分至 $x = L$ ，並令 $\Delta p = p - p_0$ ，且將結果加以整理之後可得：

$$-\Delta p \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{p_0} \right) = f \frac{L}{D} \frac{\rho_0 V_0^2}{2} \quad \dots\dots\dots(14)$$

上式等號右側項等於未考慮密度沿程變化情況下管長 L 兩端之間的壓差，即 $-\Delta p^* = f(L/D) \rho_0 V_0^2 / 2$ 。將式(14)等號二側均除以 p_0 之後，可以改寫成：

$$\frac{\Delta p}{p_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{p_0} \right) = \frac{\Delta p^*}{p_0} \quad \dots\dots\dots(15)$$

式(15)為 $\Delta p/p_0$ 的二次式，其解為：

$$\frac{\Delta p}{p_0} = -1 + \left(1 + 2 \frac{\Delta p^*}{p_0} \right)^{1/2} \quad \dots\dots\dots(16)$$

由於 Δp 及 Δp^* 皆為負值且 $-\Delta p/p_0 < 1$ ，故上式的開方根項取+號。在 $-\Delta p^*/p_0 \ll 1$ 的情況下，開方項以無窮級數展開可得：

$$\frac{\Delta p/p_0}{\Delta p^*/p_0} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta p^*}{p_0} + \dots \quad \dots\dots\dots(17)$$

由於 Δp^* 為負值，式(16)表明考慮密度沿程變化的結果，管長 L 兩端之間的壓差 $-\Delta p$ 較未考慮密度變化者 $-\Delta p^*$ 為高，如圖 3 所示。例如在 $-\Delta p^*/p_0 = 0.10$ 的情況下，由式(17)可知 $\Delta p/p_0 = 1.05 \Delta p^*/p_0$ 。換言之，以相對壓差 $-\Delta p^*/p_0$ 當做 $-\Delta p/p_0$ 的結果是低估了約 5%；這樣的誤差在實務上應該是還可以接受的。其實，若 $\Delta p^*/p_0$ 為已知，則可直接由式(16)求得 $\Delta p/p_0$ 值。這裡要特別提醒，以上推導結果在 $M < 0.3$ 的條件才適用。在實務上，式(16)及式(17)可用於較長管道(如工礦廠房、排洪隧道及鐵公路隧道等處)之通風管道流速及壓力變化分析。另外，應用式(17)時必須嚴守 $-\Delta p^*/p_0 \ll 1$ 的條件；如果 L 太長，可以分段計算，以確保其精確度。

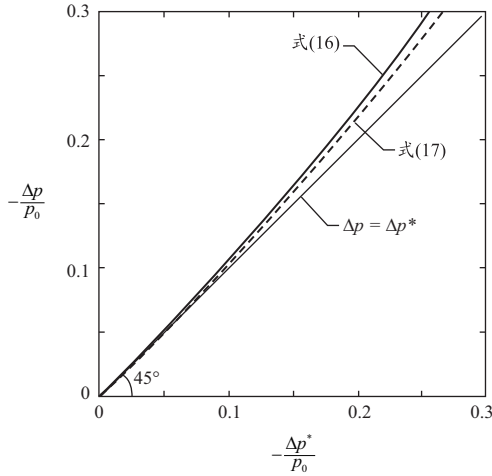


圖 3 均勻管道等溫氣體流之壓差修正係數

嚴格而言，式(16)應是在等溫狀態下的均勻管道流才可直接應用。不過，若要在絕熱(非等溫)狀態下應用式(16)則必須考慮下述二個因素對 Δp^* 的影響；其一為粘性係數 μ 隨溫度 T 沿程增加而降低，以致阻力係數 f 亦跟著沿程降低；其二為壓力與密度關係為 $p/p_0 = (\rho/\rho_0)^k$ 。若管長 L 兩端之 f 值差異為 Δf 、 ρ 值差異為 $\Delta \rho$ ，其平均值分別為 $\bar{f} = f_0 + \Delta f/2$ 及 $\bar{\rho} = \rho_0 + \Delta \rho/2$ ，則經由式(12)可推得：

$$-\Delta p^* = \bar{f} \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\right)^{0.4} \left(\frac{L}{D}\right) \rho_0 \frac{V_0^2}{2}$$

在應用式(16)時必須先假設 $\Delta f = \Delta \rho = 0$ 開始，後再逐步修正。為求取管長 L 末端之 f 值，須先由 $p \sim T$ 關係[3, p477]求得溫度 T ，再據以決定 μ 值及 R 值，並求得 $\bar{\rho}$ 及 \bar{f} 值。顯然在絕熱狀態下， f 及 ρ 沿程均隨著溫度升高而降低，因而使 $-\Delta p^*/p_0$ 值較等溫狀態者為低，由圖 3 可知壓降之修正係數跟著降低。

四、無摩擦絕熱之加(減)速流

如果管道断面劇烈變化段的氣體流有較大的加速或減速情況，分別如圖 4(a)及圖 4(b)所示，則氣體在快速的膨脹或壓縮過程並不會涉及到每單位質量熱含量的交換，也就是說粘性效應

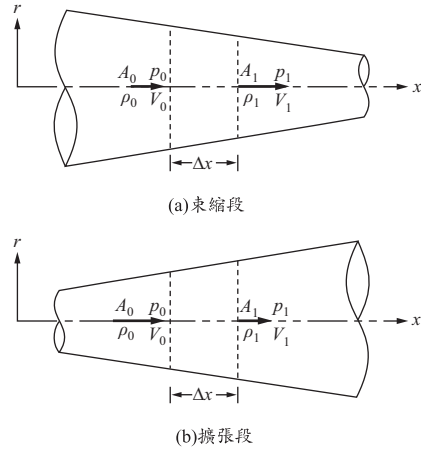


圖 4 非均勻管道無摩擦絕熱氣體流示意圖

所導致的摩擦阻力可以忽略，且無其他熱交換，因而成為絕熱狀態。在此情況下，沿程的壓力變化是因氣體流加速(或減速)而引起的，亦即式(10)可以簡化成：

$$-\frac{dp}{dx} = \rho V \frac{dV}{dx} \dots\dots\dots (18)$$

同時，質量守恆原理可表為： $d(\rho VA)/dx = 0$ ，並將之展開成為：

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{V} \frac{dV}{dx} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

另外， dp/dx 項可以改寫成 $(dp/d\rho)d\rho/dx$ ，而且由式(7)可知 $dp/d\rho = c^2$ ，式(18)因此變成 $d\rho/dx = -\rho(V/c^2)dV/dx$ 。將此一關係代入式(19)，並經整理後可得[3, p.487]：

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dx} = \frac{1}{(M^2 - 1)} \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \dots\dots\dots (20)$$

由式(20)可獲得很重要的資訊：當 $M < 1$ 時，若管道為束縮段 $dA/dx < 0$ ，則 $dV/dx > 0$ ；若管道為擴張段 $dA/dx > 0$ ，則 $dV/dx < 0$ 。當 $M > 1$ 時，不論管道是束縮或擴張段， dV/dx 與 dA/dx 同為正號或同為負號。綜合而言，在 $M < 1$ 的情況下，式(19)的第二、三項有互相抵消的效果；而在 $M > 1$ 的情況下，兩者卻有累加的效果。顯然後

者 ($M > 1$) 的 $d\rho/dx$ 會較前者 ($M < 1$) 大甚多, 而可能涉及震波現象, 已非屬本文探討範圍。因此, 以下就侷限於 $M < 1$ 的情況下來討論。

在沒有摩擦阻力且為絕熱狀態之下, 由式(2)可知 $p/p_0 = (\rho/\rho_0)^{k_r}$ 。將此關係引入式(18)後對 x 積分並加以整理, 可得:

$$\frac{-p_0}{m_r} \left[\left(1 + \frac{\Delta p}{p_0} \right)^{m_r} - 1 \right] = \frac{\rho_0}{2} (V^2 - V_0^2) \dots\dots\dots (21)$$

其中 $\Delta p = p - p_0$; $m_r = 1 - 1/k_r$; 等號右側整項就是在未考慮密度沿程變化情況下, 因加速所致之壓差, 即 $-\Delta p^* = \rho_0 (V^2 - V_0^2)/2$ 。在 $|\Delta p^*/p_0| \ll 1$ 條件下, 將等號左側括號內的 $(1 + \Delta p/p_0)^{m_r}$ 項以無窮級數展開並取至第三項, 可得:

$$\left(\frac{\Delta p}{p_0} \right)^2 - 2k_r \frac{\Delta p}{p_0} = -2k_r \frac{\Delta p^*}{p_0} \dots\dots\dots (22)$$

式(22)同樣是 $\Delta p/p_0$ 的二次式, 其解為:

$$\frac{\Delta p}{p_0} = k_r \left[1 - \left(1 - 2 \frac{\Delta p^*}{k_r p_0} \right)^{1/2} \right] \dots\dots\dots (23)$$

由於 Δp 及 Δp^* 同為負值(束縮段)或同為正值(擴張段), 而且 $k_r (= 1.4)$ 為正值, 故式(23)開方根項取負號。在 $|\Delta p^*/p_0| \ll 1$ 的情況下, 開方根項以無窮級數展開可得:

$$\frac{\Delta p/p_0}{\Delta p^*/p_0} = 1 + \frac{1}{2k_r} \frac{\Delta p^*}{p_0} + \dots\dots\dots (24)$$

上式表明, 以未考慮密度沿程變化的相對壓差 $-\Delta p^*/p_0$ 當做 $-\Delta p/p_0$, 在束縮段 $\Delta p^*/p_0 < 0$ 的情況下, 將會導致高估的結果, 如圖 5(a)所示。例如當 $\Delta p^*/p_0 = -0.14$ 時, 由式(24)可知 $\Delta p/p_0 = 0.95 \Delta p^*/p_0$ 。換言之 $\Delta p^*/p_0$ 必須乘以 0.95 才是正確的 $\Delta p/p_0$, 也就是以 $-\Delta p^*/p_0$ 當 $-\Delta p/p_0$ 約高估了 5%。相反地, 在擴張段 $\Delta p^*/p_0 > 0$ 的情況下, 以 $\Delta p^*/p_0$ 當作 $\Delta p/p_0$ 將導致低估的結果, 如圖 5(b)所示。

這裡同樣亦要提醒, 在式(23)及(24)的推導過程中, 均有 $-\Delta p^*/p_0 \ll 1$ (擴張段則為 $\Delta p^*/p_0 \ll 1$) 的假設條件。因此, 在應用此二式

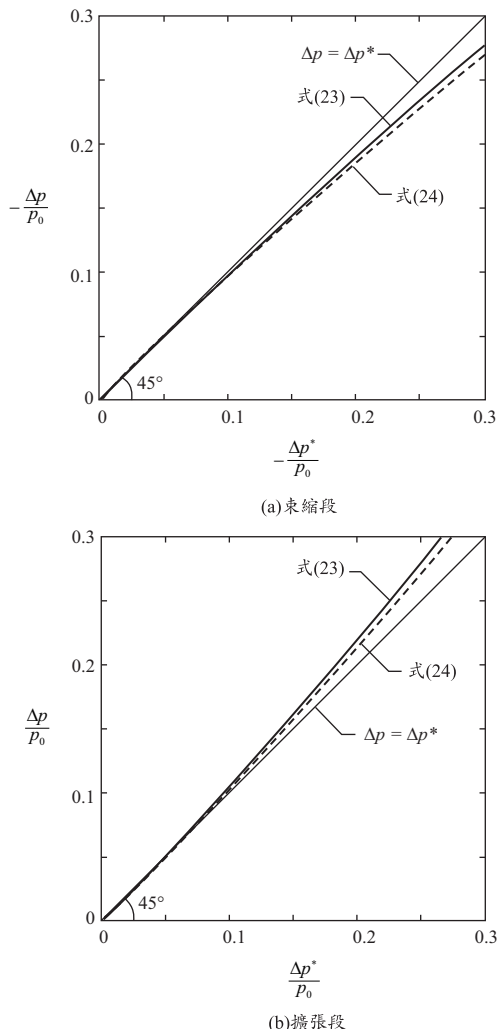


圖 5 管道無摩擦絕熱氣體流之壓差修正係數

時必須嚴守此一條件。必要時, 可將斷面變化段分成若干小段, 逐段分別計算, 以確保精確度。在實務上, 式(23)及式(24)除可用於管道斷面積劇變之氣體流壓力及流速變化分析外, 亦可作為測壓計量測流速之動壓差修正之用。另外, 亦應注意式(23)及(24)要在 $M < 1$ 的條下才適用, 故計算過程並隨時檢視 M 值。

由於一般管道漸變段甚短, 而其斷面積沿程變化相對急劇, 式(10)中之摩擦阻力項對壓差項之影響遠不如位變加速度項之影響, 而將其省略後推得式(23)。當漸變段較長而致阻力項不可忽

略時，若要應用式(23)推算沿程壓差 Δp ，則必須先將阻力項所導致之壓差納入為 Δp^* 的一部分，亦即：

$$-\Delta p^* = \rho_0 \frac{(V^2 - V_0^2)}{2} + \bar{f} \left(\frac{L}{D} \right) \rho_0 \frac{\bar{V}^2}{2}$$

其中 \bar{f} 、 \bar{D} 及 \bar{V}^2 分別為漸變段沿程之 f 、 D 及 V^2 的平均值，而 \bar{f} 的求取方式如同前一節所述者。顯然納入摩擦阻力使束縮段之 $-\Delta p^*/\rho_0$ 增加，因而由圖 5(a)可知壓降之修正係數隨著降低。相反地，摩擦阻力使擴張段之 $\Delta p^*/\rho_0$ 減少，因而由圖 5(b)可知壓升之修正係數隨著增加。

五、結 語

- (1) 均勻管道等溫氣體流因摩擦阻力而致沿程有壓降及加速之現象。分析結果顯示在 $M < 0.3$ 情況下，加速效應可略而不計，因此可將運動方程式簡化成僅包含壓力項及摩擦阻項。
- (2) 在上述第(1)點的條件下，若未考慮密度沿程變化之效應，則給定管長兩端之壓降計算結果會偏低，如式(17)所示。
- (3) 在摩擦阻力可忽略、絕熱情況下且 $M < 1$ 時，若未考慮密度沿程變化之效應，則給定斷面積沿程減量(或增量)之壓降(或壓升)計算結果會偏高(或偏低)，如式(24)所示。

(4) 式(17)及(24)之等號右側可視為壓差修正係數，用以修正未考慮密度沿程變化之效應。正確的壓差亦可由式(16)及(23)分別求得。

(5) 在無摩擦阻力、絕熱的情況下，當 $M > 1$ 時，管道斷面變化段氣體流之壓力隨斷面積同步減少或同步增加，因而可能導致密度沿程劇變的震波現象，已非本文所建議方法可適用。

參考文獻

1. Rouse, H., Elementary Mechanics of Fluids, 4th ed., John Wiley & Sons, Inc., New York 1962, p.339.
2. Vennard, J.K., and Street, R.L., Elementary Fluid Mechanics, John Wiley & Sons, Inc., New York 1976, p.133.
3. Roberson, J.A., and Crowe, C.T., Engineering Fluid Mechanics, 6th ed., John Wiley & Sons, Inc., New York 1977, p.477 & p.487.

收稿日期：民國 103 年 8 月 7 日

修正日期：民國 103 年 9 月 12 日

接受日期：民國 103 年 10 月 1 日