

# 估算有限厚度水工結構體內氯離子濃度分佈的 數學模型與解析解

## Mathematical Model and Its Solution for Estimating the Chloride Concentration in Hydraulic Structure with Finite Thickness

國立屏東科技大學  
土木工程系  
副教授

鍾文貴\*

Wen-Guey Chung

國立屏東科技大學  
土木工程系  
副教授

王弘祐

Hung-Yu Wang

國立屏東科技大學  
土木工程系  
副教授

林金柄

Jin-Bing Lin

### 摘 要

水工結構體內氯離子含量是導致鋼筋銹蝕與結構體耐久性劣化的關鍵因素。本文應用拉普拉斯變換，推導得具 Dirichlet 條件的一維有限厚度水工混凝土結構體，氯離子傳輸數學模式之基本解，再運用積分技巧求得適用於估算氯離子濃度分佈的幾種邊界條件之解析解，並驗證了解析解的正確性。數值計算結果顯示，解析解中的混凝土表面氯離子濃度比值( $C_L/C_0$ )、擴散係數與孔隙水滲透速度等對混凝土厚度內各位置點氯離子濃度的影響呈現正比變化，而降解反應係數的影響則呈現反比變化。本文推導得到的解析解，可應用於估算有限厚度水工結構體內氯離子的濃度分佈，亦可用於驗證電腦模擬混凝土內氯離子複雜傳輸模式數值解的合理性，具有實用價值。

**關鍵詞：**氯離子，解析解，水工結構。

### ABSTRACT

The negative influence of chloride on concrete durability has been proved by many researchers. With the aid of Laplace transform, the fundamental solution for the chloride ion transport problems with Dirichlet boundary conditions in a saturated, homogeneous hydraulic structure with finite thickness is derived in this paper. The analytical solutions with given boundaries for estimating the distribution of chloride concentration in hydraulic

\*通訊作者，國立屏東科技大學土木系副教授，91201 屏東縣內埔鄉學府路 1 號，wenguey@mail.npust.edu.tw

structure are presented. The validity of each solution is analyzed and discussed. Numerical computation shown that diffusion coefficient, reaction coefficient and seepage velocity are three dominant factors for the derived solutions. The concentration of chloride is increasing while the value of the ratio of surface chloride content ( $C_L/C_0$ ), diffusion coefficient or seepage velocity is increasing, but the reaction coefficient is in opposition. The presented solutions are helpful for estimating the chloride concentration in hydraulic structure with finite thickness and can be used for verifying numerical simulations of chloride transport in complex concrete systems.

**Keywords:** Chloride, Analytical solution, Hydraulic structure.

## 一、前言

水工結構物在含有氯鹽環境下的耐久性評估和壽命預測問題，為國內外學術界近年來關注的課題。許多有關於混凝土內鋼筋銹蝕機理的研究，均認為氯離子侵入混凝土內是導致鋼筋銹蝕與結構體耐久性劣化的關鍵因素。Colleparidi 等[1]最早用 Fick 擴散定律來描述氯離子在混凝土中的表觀擴散行為。Hooton and MacGrath [2]的研究指出，水工鋼筋混凝土結構物暴露在含有氯鹽的水環境時，氯離子伴隨著水通過混凝土內部的孔隙和微裂縫，從混凝土表層向內部擴散傳輸，導致鋼筋銹蝕，此種氯離子的擴散傳輸機理包括擴散、毛細作用、滲透、吸附和電化學作用等。施養杭、羅剛[5]的研究指出影響氯離子侵入混凝土的方式和速度的主要因素有混凝土本身的特性(包括組成材料的種類、用量、配合比和密實程度等)，氯離子的擴散係數，混凝土表面氯離子的濃度(即表面氯離子的累積濃度)和環境因素(包括氣候和混凝土表面水環境等)。換言之，氯離子在混凝土內之傳輸機理是非常複雜的，難以用簡單的 Fick 擴散模型來描述，以致於有一些修正模型相繼地被提出，例如文獻[2-8, 4-13]，而這些修正模型均假設混凝土結構體為半無限介質。實務應用上，氯離子侵入混凝土的機理，往往是氯離子與混凝土組成材料間複雜的化學和物理作用，且混凝土結構體的尺寸通常是有限厚度，有鑑於此，本文乃針對一維有限厚度水工結構體，考慮

氯離子在混凝土內傳輸過程中發生擴散、滲透、降解等作用的控制方程式，以拉普拉斯變換法有系統地推導得幾種邊界條件的氯離子濃度分佈解析解，並以文獻中相同求解條件的結果，來驗證解析解的正確性。這些解析解，除了可應用於分析近海水工結構物內的氯離子濃度分佈情形，亦可用來討論分析與驗證氯離子在混凝土內複雜傳輸機理中的某些基本行為，具有一定的實用價值。

## 二、基本解的推導與討論

### 2.1 數學模式的基本解

當考慮一維有限厚度均質水工混凝土結構體內氯離子的擴散係數為常數時，其濃度分佈可用如下的偏微分方程式來描述：

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - kC$$

$$0 < x < L, \quad t > 0 \quad (\text{取向右為正}), \dots\dots (2.1)$$

式中  $C(x, t)$  為氯離子在混凝土內的濃度分佈 ( $\text{g}/\text{cm}^3$ )； $V$  為水在混凝土孔隙內之平均滲透速度 ( $\text{cm}/\text{min}$ )； $D$  為氯離子的擴散係數 ( $\text{cm}^2/\text{min}$ )； $k$  為氯離子的一階降解反應係數 ( $1/\text{day}$ )； $x$  是座標位置 ( $\text{m}$ ，以混凝土海水接觸面側起算，取向右為正)，在  $x = 0$  處為接觸海水的混凝土表面，通稱為內水面； $L$  為混凝土厚度，在  $x = L$  處的混凝土表面，通稱為外水面； $t$  為時間 ( $\text{min}$ )。

求解條件：假設初始條件與邊界條件分別為

$$C(x,0) = 0, \quad \dots\dots\dots(2.2)$$

$$C(0,t) = \psi(t); \quad C(L,t) = C_L, \quad \dots\dots\dots(2.3)$$

式中  $\psi(t)$  為任意的時間實函數，表示混凝土接觸海水處內水面的氯離子濃度，多數研究文獻均假設為常數[3-9, 11-12]； $C_L$  為常數，是距離混凝土表面  $x = L$  處外水面的氯離子濃度。在正常情況下，混凝土接觸海水的表面氯離子濃度  $C_0$  會大於  $C_L$ ，即  $C_L/C_0 \leq 1$ 。

令  $C(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} u(x,t)$ ，其中  $\alpha, \beta$  為待定函係數，分別對  $t, x$  取偏導數後代入(2.1)式整理得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (V - 2D\alpha) \frac{\partial u}{\partial x} \\ = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (D\alpha^2 - k - \beta - V\alpha) u \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2.4)$$

若令  $V - 2D\alpha = 0$ ， $D\alpha^2 - k - \beta - V\alpha = 0$ ，可解得  $\alpha, \beta$ ，即

$$\alpha = \frac{V}{2D}, \quad \beta = -k - \frac{V^2}{4D} \quad \dots\dots\dots(2.5)$$

此時(2.1)式可化簡為純擴散方程式，即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots(2.6)$$

同時，求解條件(2.2) (2.3)式也一併改寫為

將邊界條件代入(2.10)式得

$$\bar{u}(x,s) = \frac{\bar{\phi}(s)[e^{-\lambda x} - e^{-\lambda(2L-x)}] + \bar{\mu}(s)[e^{-\lambda(L-x)} - e^{-\lambda(L+x)}]}{1 - e^{-2\lambda L}} \quad \dots\dots\dots(2.12)$$

由麥克勞林級數(Maclaurin series)： $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  得

$$\frac{1}{1 - e^{-2\lambda L}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\lambda L} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nL\sqrt{s/D}} \quad \dots\dots\dots(2.13)$$

(2.13)式代入(2.12)式可整理得

$$\bar{u}(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \bar{\phi}(s) [e^{-\lambda(2nL+x)} - e^{-\lambda(2nL+2L-x)}] + \bar{\mu}(s) [e^{-\lambda(2nL+L-x)} - e^{-\lambda(2nL+L+x)}] \right\} \quad \dots\dots\dots(2.14)$$

對(2.14)式取變數  $s$  的拉普拉斯逆變換，且引用褶積定理公式[14]：

$$L^{-1} \{ \bar{f}(s) \bar{g}(s) \} = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau, \quad L^{-1} \{ e^{-a\sqrt{s}} \} = \frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}, \quad \dots\dots\dots(2.15)$$

初始條件：

$$u(x,0) = 0, \quad \dots\dots\dots(2.7)$$

邊界條件：

$$\begin{aligned} u(0,t) = \psi(t)e - \beta t = \phi(t), \\ u(L,t) = C_L e^{-\alpha L - \beta t} u(t) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2.8)$$

換言之，經由變數變換  $C(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} u(x,t)$ ，可將(2.1)式化簡為(2.6)式，因此，只要找出(2.6)式的解答，就可求得(2.1)式的基本解。以下我們就從推求(2.6)式的解答出發，首先取時間變數  $t$  的拉普拉斯變換，可得

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \frac{s}{D} \bar{u} = 0, \quad \dots\dots\dots(2.9)$$

式中  $\bar{u} = \bar{u}(x,s) = L \{ u(x,t) \} = \int_0^{\infty} e^{-st} u(x,t) dt$ 。

(2.9)式為二階常微分方程式，通解為

$$\bar{u}(x,s) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}, \quad \lambda = \sqrt{s/D} \quad \dots\dots\dots(2.10)$$

對邊界條件(2.8)式取時間變數  $t$  的拉普拉斯變換，可得

$$\bar{u}(0,s) = \bar{\phi}(s), \quad \bar{u}(L,s) = \bar{\mu}(s), \quad \dots\dots\dots(2.11)$$

可將(2.14)式整理得

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_0^t \frac{\phi(\tau)}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)^3}} \left[ (2nL+x)e^{\frac{(2nL+x)^2}{4D(t-\tau)}} - (2nL+2L-x)e^{\frac{(2nL+2L-x)^2}{4D(t-\tau)}} \right] d\tau \right. \\ \left. + \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)^3}} \left[ (2nL+L-x)e^{\frac{(2nL+L-x)^2}{4D(t-\tau)}} - (2nL+L+x)e^{\frac{(2nL+L+x)^2}{4D(t-\tau)}} \right] d\tau \right\} \circ \quad \dots\dots\dots (2.16)$$

由(2.8)式知  $\phi(t) = \psi(t)e^{-\beta t}$ ， $\mu(t) = C_L e^{-\alpha L - \beta t}$ ，代入(2.16)式得

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_0^t \frac{e^{-\beta\tau}\psi(\tau)}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)^3}} \left[ (2nL+x)e^{\frac{(2nL+x)^2}{4D(t-\tau)}} - (2nL+2L-x)e^{\frac{(2nL+2L-x)^2}{4D(t-\tau)}} \right] d\tau \right. \\ \left. + \int_0^t \frac{C_L e^{-\alpha L - \beta\tau}}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)^3}} \left[ (2nL+L-x)e^{\frac{(2nL+L-x)^2}{4D(t-\tau)}} - (2nL+L+x)e^{\frac{(2nL+L+x)^2}{4D(t-\tau)}} \right] d\tau \right\} \circ \quad \dots\dots\dots (2.17)$$

上式等號右邊兩個積分項，分別由邊界條件  $\psi(t)$  與  $C_L$  來決定。將  $C(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} u(x,t)$  代入(2.17)式，即可得水工結構體內氯離子濃度分佈函數  $C(x,t)$ ：

$$C(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_0^t \frac{e^{\alpha x + \beta(t-\tau)}\psi(\tau)}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)^3}} \left[ (2nL+x)e^{\frac{(2nL+x)^2}{4D(t-\tau)}} - (2nL+2L-x)e^{\frac{(2nL+2L-x)^2}{4D(t-\tau)}} \right] d\tau \right. \\ \left. + \int_0^t \frac{C_L e^{-\alpha(L-x) + \beta(t-\tau)}}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)^3}} \left[ (2nL+L-x)e^{\frac{(2nL+L-x)^2}{4D(t-\tau)}} - (2nL+L+x)e^{\frac{(2nL+L+x)^2}{4D(t-\tau)}} \right] d\tau \right\} \circ \quad \dots\dots\dots (2.18)$$

(2.18)式等號右邊第二個積分項，可引用積分公式[15]：

$$\int \frac{1}{x^{3/2}} e^{-a^2 x - \frac{b^2}{x}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2b} \left[ e^{-2ab} \operatorname{erfc} \left( a\sqrt{x} - \frac{b}{\sqrt{x}} \right) - e^{2ab} \operatorname{erfc} \left( a\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{x}} \right) \right], \quad \dots\dots\dots (2.19)$$

積分整理後得

$$\int_0^t \frac{C_L e^{-\alpha(L-x) - \lambda T}}{\sqrt{4\pi D T^3}} \left[ (2nL+L-x)e^{\frac{(2nL+L-x)^2}{4DT}} - (2nL+L+x)e^{\frac{(2nL+L+x)^2}{4DT}} \right] dT \quad (T = t - \tau) \\ = \frac{C_L e^{-\alpha(L-x)}}{2} \left[ \left[ e^{-(2nL+L-x)\sqrt{\lambda/D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+L-x}{\sqrt{4Dt}} - \sqrt{\lambda t} \right) + e^{(2nL+L-x)\sqrt{\lambda/D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+L-x}{\sqrt{4Dt}} + \sqrt{\lambda t} \right) \right] \right. \\ \left. - \left[ e^{-(2nL+L+x)\sqrt{\lambda/D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+L+x}{\sqrt{4Dt}} - \sqrt{\lambda t} \right) + e^{(2nL+L+x)\sqrt{\lambda/D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+L+x}{\sqrt{4Dt}} + \sqrt{\lambda t} \right) \right] \right], \quad \dots\dots\dots (2.20)$$

(2.19) 式中的  $erf(x)$  是誤差函數，定義為  $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$  且  $erf(0) = 0$ ， $erf(\infty) = 1$ ， $erf(-x) = -erf(x)$ ；(2.20) 式中的  $erfc(x) = 1 - erf(x)$ 。

將(2.20)式代入(2.18)式，得

$$\begin{aligned}
 C(x,t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_0^t \frac{e^{\alpha x - \lambda(t-\tau)} \psi(\tau)}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)^3}} \left[ (2nL+x)e^{\frac{(2nL+x)^2}{4D(t-\tau)}} - (2nL+2L-x)e^{\frac{(2nL+2L-x)^2}{4D(t-\tau)}} \right] d\tau \right. \\
 & + \frac{C_L e^{-\alpha(L-x)}}{2} \left\{ e^{-(2nL+L-x)\sqrt{\lambda/D}} erfc\left(\frac{2nL+L-x}{\sqrt{4Dt}} - \sqrt{\lambda t}\right) + e^{(2nL+L-x)\sqrt{\lambda/D}} erfc\left(\frac{2nL+L-x}{\sqrt{4Dt}} + \sqrt{\lambda t}\right) \right\} \\
 & \left. - \left[ e^{-(2nL+L+x)\sqrt{\lambda/D}} erfc\left(\frac{2nL+L+x}{\sqrt{4Dt}} - \sqrt{\lambda t}\right) + e^{(2nL+L+x)\sqrt{\lambda/D}} erfc\left(\frac{2nL+L+x}{\sqrt{4Dt}} + \sqrt{\lambda t}\right) \right] \right\}, \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

上式等號右邊的計算項，分別由邊界條件  $C(0,t) = \psi(t)$  與  $C(L,t) = C_L$  來決定。

## 2.2 混凝土表面氯離子濃度為常數的解析模型

多數研究文獻均假設混凝土接觸海水的表面氯離子濃度為常數[3-9, 11-12]，基於這個假設，令  $\psi(t) = C_0$  ( $C_0$  為混凝土表面氯離子濃度)，代入(2.21)式且引用(2.19)式，積分整理得

$$\begin{aligned}
 C(x,t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{e^{\alpha x} C_0}{2} \left[ e^{-(2nL+x)\sqrt{\lambda/D}} erfc\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{4Dt}} - \sqrt{\lambda t}\right) + e^{(2nL+x)\sqrt{\lambda/D}} erfc\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{4Dt}} + \sqrt{\lambda t}\right) \right] \right. \\
 & - \left[ e^{-(2nL+2L-x)\sqrt{\lambda/D}} erfc\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{4Dt}} - \sqrt{\lambda t}\right) + e^{(2nL+2L-x)\sqrt{\lambda/D}} erfc\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{4Dt}} + \sqrt{\lambda t}\right) \right] \\
 & + \frac{C_L e^{-\alpha(L-x)}}{2} \left[ e^{-(2nL+L-x)\sqrt{\lambda/D}} erfc\left(\frac{2nL+L-x}{\sqrt{4Dt}} - \sqrt{\lambda t}\right) + e^{(2nL+L-x)\sqrt{\lambda/D}} erfc\left(\frac{2nL+L-x}{\sqrt{4Dt}} + \sqrt{\lambda t}\right) \right] \\
 & \left. - \left[ e^{-(2nL+L+x)\sqrt{\lambda/D}} erfc\left(\frac{2nL+L+x}{\sqrt{4Dt}} - \sqrt{\lambda t}\right) + e^{(2nL+L+x)\sqrt{\lambda/D}} erfc\left(\frac{2nL+L+x}{\sqrt{4Dt}} + \sqrt{\lambda t}\right) \right] \right\}. \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

(1) 考慮純擴散情況的解析解

考慮純擴散情況時， $k = V = 0$ ，因此，令  $\alpha = \lambda = 0$  代入(2.22)式得

$$C(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C_0 \left[ erfc\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{4Dt}}\right) - erfc\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{4Dt}}\right) \right] + C_L \left[ erfc\left(\frac{2nL+L-x}{\sqrt{4Dt}}\right) - erfc\left(\frac{2nL+L+x}{\sqrt{4Dt}}\right) \right] \right\} \quad (2.23)$$

此為純擴散數學模型： $\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ ，且求解條件為  $C(x,0) = 0$ 、 $C(0,t) = C_0$  與  $C(L,t) = C_L$  的解析解，與 Malkovich [16] 的結果一致。當  $L \rightarrow \infty$ ， $C_L \rightarrow 0$ ，則(2.23)式可化簡為

$$C(x,t) = C_0 \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] = C_0 \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] \dots\dots\dots (2.24)$$

此為將混凝土結構體視為半無限介質的解析解，與 Costa and Appleton [9]的結果一致。

(2)考慮孔隙水滲流情況的解析解

水工結構體在環境長期侵蝕作用下，會增加混凝土內部的孔隙裂縫，使得氯離子伴隨著水加速在孔隙內滲流而侵入結構體。當考慮孔隙水滲流情況時，則令  $\alpha = \frac{V}{2D}$  與  $\lambda = \frac{V^2}{4D}$  代入(2.22)式得

$$\begin{aligned} C(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{e^{\frac{Vx}{2D}} C_0}{2} \left[ e^{-\frac{(2nL+x)V}{2D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+x}{\sqrt{4Dt}} - V\sqrt{\frac{t}{4D}} \right) + e^{\frac{(2nL+x)V}{2D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+x}{\sqrt{4Dt}} + V\sqrt{\frac{t}{4D}} \right) \right] \right. \\ \left. - \left[ e^{-\frac{(2nL+2L-x)V}{2D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+2L-x}{\sqrt{4Dt}} - V\sqrt{\frac{t}{4D}} \right) + e^{\frac{(2nL+2L-x)V}{2D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+2L-x}{\sqrt{4Dt}} + V\sqrt{\frac{t}{4D}} \right) \right] \right\} \\ + \frac{C_L e^{\frac{(L-x)V}{2D}}}{2} \left\{ \left[ e^{-\frac{(2nL+L-x)V}{2D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+L-x}{\sqrt{4Dt}} - V\sqrt{\frac{t}{4D}} \right) + e^{\frac{(2nL+L-x)V}{2D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+L-x}{\sqrt{4Dt}} + V\sqrt{\frac{t}{4D}} \right) \right] \right. \\ \left. - \left[ e^{-\frac{(2nL+L+x)V}{2D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+L+x}{\sqrt{4Dt}} - V\sqrt{\frac{t}{4D}} \right) + e^{\frac{(2nL+L+x)V}{2D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+L+x}{\sqrt{4Dt}} + V\sqrt{\frac{t}{4D}} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \dots\dots\dots (2.25)$$

此為考慮孔隙水滲流情況數學模型： $\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ ，且求解條件為  $C(x,0) = 0$ 、 $C(0,t) = C_0$  與  $C(L,t) = C_L$  的解析解。

(3)考慮降解反應作用情況的解析解

當考慮降解反應作用情況時，則  $\alpha = 0$  且  $\lambda = k$ ，代入(2.22)式整理後得

$$\begin{aligned} C(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{C_0}{2} \left[ e^{-(2nL+x)\sqrt{k/D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+x}{\sqrt{4Dt}} - \sqrt{kt} \right) + e^{(2nL+x)\sqrt{k/D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+x}{\sqrt{4Dt}} + \sqrt{kt} \right) \right] \right. \\ \left. - \left[ e^{-(2nL+2L-x)\sqrt{k/D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+2L-x}{\sqrt{4Dt}} - \sqrt{kt} \right) + e^{(2nL+2L-x)\sqrt{k/D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+2L-x}{\sqrt{4Dt}} + \sqrt{kt} \right) \right] \right\} \\ + \frac{C_L}{2} \left\{ \left[ e^{-(2nL+L-x)\sqrt{k/D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+L-x}{\sqrt{4Dt}} - \sqrt{kt} \right) + e^{(2nL+L-x)\sqrt{k/D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+L-x}{\sqrt{4Dt}} + \sqrt{kt} \right) \right] \right. \\ \left. - \left[ e^{-(2nL+L+x)\sqrt{k/D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+L+x}{\sqrt{4Dt}} - \sqrt{kt} \right) + e^{(2nL+L+x)\sqrt{k/D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+L+x}{\sqrt{4Dt}} + \sqrt{kt} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \dots\dots\dots (2.26)$$

上式為氯離子在傳輸過程中與混凝土成分結合為不可逆一級化學降解反應時的數學模型：

$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - kC$ ，且求解條件為  $C(x,0) = 0$ 、 $C(0,t) = C_0$  與  $C(L,t) = C_L$  的解析解。

### 2.3 混凝土表面氯離子濃度隨時間變化的解析模型

Dhir *et al.* [3]、Costa and Appleton [9]與應敬偉等[13]的研究指出，近海區水工混凝土結構物的表面氯離子濃度，並非一成不變，而是隨著時間逐漸遞增，換言之，邊界條件是時間的函數。然而，並非所有形式的時間函數邊界條件，都可以找到解析解，故必須採用電腦數值方法求解。但是，為了方便以下的討論，我們以純擴散情況來推演解析解與驗證解的正確性。

當考慮純擴散問題時，由(2.21)式得

$$C(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)^3}} \left[ (2nL+x)e^{-\frac{(2nL+x)^2}{4D(t-\tau)}} - (2nL+2L-x)e^{-\frac{(2nL+2L-x)^2}{4D(t-\tau)}} \right] d\tau \right. \\ \left. + C_L \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+L-x}{\sqrt{4Dt}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+L+x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] \right\} \quad \dots\dots\dots (2.27)$$

上式若令  $C_L = 0$ ，則為純擴散數學模型： $\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ ，且求解條件為  $C(x,0) = 0$ 、 $C(0,t) = \psi(t)$  與  $C(L,t) = 0$  的基本解，與 Polyanin [17]的結果一致。

當考慮近海混凝土表面的氯離子濃度是隨時間增加的線性函數、冪函數與指數函數時，邊界條件可設定為：(1).線性函數與冪函數邊界條件  $C(0,t) = C_0 t^m$ ；(2).指數函數邊界條件  $C(0,t) = C_0 e^{mt}$  ( $m$  為任意正實數)。以下討論此兩種邊界條件的純擴散數學模型之解析解：

#### 2.3.1 線性函數與冪函數邊界條件的解析解

線性函數與冪函數邊界條件： $C(0,t) = C_0 t^m$  ( $m$  為任意正實數)，表示隨著時間的增長，水工混凝土內水面的氯離子濃度呈現線性函數或冪函數增大。將邊界條件代入(2.27)式，可得

$$C(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{C_0}{\sqrt{4\pi D}} \int_0^t \frac{(t-T)^m}{\sqrt{T^3}} \left[ (2nL+x)e^{-\frac{(2nL+x)^2}{4DT}} - (2nL+2L-x)e^{-\frac{(2nL+2L-x)^2}{4DT}} \right] dT \right. \\ \left. + C_L \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+L-x}{\sqrt{4Dt}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+L+x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] \right\}, \quad \dots\dots\dots (2.28)$$

式中  $T = t - \tau$ 。

$(t-T)^m$  用泰勒級數展開，得  $(t-T)^m = t^m - mt^{m-1}T + \frac{m(m-1)}{2}T^2 + \dots$ 。當  $m \leq 1$  時，第三項以後為遞減負數且對計算結果的影響十分有限，可忽略不計，因此，取前兩項代入(2.28)式得

$$C(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{C_0}{\sqrt{4\pi D}} \int_0^t \frac{t^m - mt^{m-1}T}{\sqrt{T^3}} \left[ (2nL+x)e^{-\frac{(2nL+x)^2}{4DT}} - (2nL+2L-x)e^{-\frac{(2nL+2L-x)^2}{4DT}} \right] dT \right. \\ \left. + C_L \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+L-x}{\sqrt{4Dt}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+L+x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] \right\} \quad \dots\dots\dots (2.29)$$

(2.29)式等號右邊積分項，可引用積分公式[15]：

$$\int x^{-3/2} e^{-a^2/x} dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{a} \operatorname{erf} \left( \frac{a}{\sqrt{x}} \right), \quad \int x^{-1/2} e^{-a^2/x} dx = 2a\sqrt{\pi} \operatorname{erf} \left( \frac{a}{\sqrt{x}} \right) + 2\sqrt{x} e^{-a^2/x}, \quad \dots\dots\dots (2.30)$$

積分整理得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{4\pi D}} \int_0^t \frac{t^m - m\tau^{m-1}T}{\sqrt{T^3}} \left[ (2nL+x)e^{-\frac{(2nL+x)^2}{4DT}} - (2nL+2L-x)e^{-\frac{(2nL+2L-x)^2}{4DT}} \right] d\tau \\ &= \left[ t^m + \frac{mt^{m-1}(2nL+x)^2}{2D} \right] \operatorname{erfc}\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{4Dt}}\right) - \left[ t^m - \frac{mt^{m-1}(2nL+2L-x)^2}{D} \right] \operatorname{erfc}\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{4Dt}}\right) \dots\dots (2.31) \\ & - \frac{mt^{m-1/2}}{\sqrt{\pi D}} \left[ (2nL+x)e^{-(2nL+x)^2/4Dt} - (2nL+2L-x)e^{-(2nL+2L-x)^2/4Dt} \right] \circ \end{aligned}$$

(2.31)式代入(2.29)式得

$$\begin{aligned} C(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C_0 \left[ t^m + \frac{mt^{m-1}(2nL+x)^2}{2D} \right] \operatorname{erfc}\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{4Dt}}\right) \right. \\ & - C_0 \left[ t^m - \frac{mt^{m-1}(2nL+2L-x)^2}{D} \right] \operatorname{erfc}\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{4Dt}}\right) \dots\dots\dots (2.32) \\ & - \frac{mt^{m-1/2}C_0}{\sqrt{\pi D}} \left[ (2nL+x)e^{-(2nL+x)^2/4Dt} - (2nL+2L-x)e^{-(2nL+2L-x)^2/4Dt} \right] \\ & \left. + C_L \left[ \operatorname{erfc}\left(\frac{2nL+L-x}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{2nL+L+x}{\sqrt{4Dt}}\right) \right] \right\} \circ \end{aligned}$$

(1)當  $m=0$  時，則邊界條件為  $C(0,t) = C_0$ ，(2.32)式可化簡得(2.23)式的結果。

(2)當  $m=1$  時，則邊界條件為  $C(0,t) = C_0 t$ ，由(2.32)式得

$$\begin{aligned} C(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C_0 \left[ t + \frac{(2nL+x)^2}{2D} \right] \operatorname{erfc}\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{4Dt}}\right) - C_0 \left[ t - \frac{(2nL+2L-x)^2}{D} \right] \operatorname{erfc}\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{4Dt}}\right) \right. \\ & - \frac{C_0\sqrt{t}}{\sqrt{\pi D}} \left[ (2nL+x)e^{-(2nL+x)^2/4Dt} - (2nL+2L-x)e^{-(2nL+2L-x)^2/4Dt} \right] \dots\dots (2.33) \\ & \left. + C_L \left[ \operatorname{erfc}\left(\frac{2nL+L-x}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{2nL+L+x}{\sqrt{4Dt}}\right) \right] \right\} \circ \end{aligned}$$

(3)當  $m=1/2$  時，則邊界條件為  $C(0,t) = C_0\sqrt{t}$ ，由(2.32)式得

$$\begin{aligned} C(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C_0 \left[ \sqrt{t} + \frac{(2nL+x)^2}{4D\sqrt{t}} \right] \operatorname{erfc}\left(\frac{2nL+x}{\sqrt{4Dt}}\right) - C_0 \left[ \sqrt{t} - \frac{(2nL+2L-x)^2}{2D\sqrt{t}} \right] \operatorname{erfc}\left(\frac{2nL+2L-x}{\sqrt{4Dt}}\right) \right. \\ & - \frac{C_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \left[ (2nL+x)e^{-(2nL+x)^2/4Dt} - (2nL+2L-x)e^{-(2nL+2L-x)^2/4Dt} \right] \\ & \left. + C_L \left[ \operatorname{erfc}\left(\frac{2nL+L-x}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{2nL+L+x}{\sqrt{4Dt}}\right) \right] \right\} \circ \dots\dots\dots (2.34) \end{aligned}$$



表 1 數值計算氯離子濃度分佈的變數假設值

變數給定值	分析項目	計算結果
$t = 3, 6, 12, 24 \text{ month}; D = 5 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}; C_L/C_0 = 0, 0.5$	純擴散情況下，擴散時間對氯離子濃度分佈的影響。	圖 1
$C_L/C_0 = 0, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5; t = 2 \text{ year } D = 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$	純擴散情況下， $C_L/C_0$ 值對氯離子濃度分佈的影響。	圖 2
$D = 10^{-11}, 5 \times 10^{-12}, 10^{-12}, 10^{-13} \text{ m}^2/\text{s}; t = 2 \text{ year}; C_L/C_0 = 0, 0.5$	純擴散情況下，擴散係數對氯離子濃度分佈的影響。	圖 3
$V = 0, 10^{-11}, 5 \times 10^{-12}, 10^{-12}, 10^{-13} \text{ m/s}; t = 2 \text{ year}; D = 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}; C_L/C_0 = 0, 0.5$	孔隙水滲流速度對氯離子濃度分佈的影響。(降解反應係數 $k = 0$ )	圖 4
$k = 0, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7} \text{ day}^{-1}; t = 2 \text{ year}; D = 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}; C_L/C_0 = 0, 0.5$	降解反應係數對氯離子濃度分佈的影響。(孔隙水滲流速度 $V = 0$ )	圖 5
$t = 2 \text{ year}; D = 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}; C_L/C_0 = 0$	純擴散情況下，混凝土表面的氯離子濃度隨時間增加(即 $C(0,t) = C_0 t^m$ )的氯離子濃度分佈變化。	圖 6

2.3.2 指數函數邊界條件的解析解：

指數函數邊界條件： $C(0,t) = C_0 e^{mt}$ ，表示隨著時間的增長，混凝土表面的氯離子濃度呈現指數函數增大。將邊界條件代入(2.27)式，並引用積分公式[15]：

$$\int x^{-3/2} e^{-a^2 x - b^2/x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2b} \left[ e^{-2ab} \operatorname{erf} \left( a\sqrt{x} - \frac{b}{\sqrt{x}} \right) - e^{2ab} \operatorname{erf} \left( a\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{x}} \right) \right], \dots\dots\dots (2.35)$$

可積分整理得

$$C(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{C_0 e^{mt}}{2} \left[ e^{-(2nL+x)\sqrt{m/D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+x}{\sqrt{4Dt}} - \sqrt{mt} \right) + e^{(2nL+x)\sqrt{m/D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+x}{\sqrt{4Dt}} + \sqrt{mt} \right) \right] \right. \\ \left. - \left[ e^{-(2nL+2L-x)\sqrt{m/D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+2L-x}{\sqrt{4Dt}} - \sqrt{mt} \right) + e^{(2nL+2L-x)\sqrt{m/D}} \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+2L-x}{\sqrt{4Dt}} + \sqrt{mt} \right) \right] \right\} \\ + C_L \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+L-x}{\sqrt{4Dt}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{2nL+L+x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] \dots\dots\dots (2.36)$$

當  $m = 0$  時，則邊界條件為  $C(0,t) = C_0$ ，(2.36)式可化簡得(2.23)式的結果。

### 三、解析解的討論

觀察前述推導得各給定求解條件的解析解，不難發現均包含混凝土表面氯離子濃度( $C_0, C_L$ )、降解反應係數  $k$ 、擴散係數  $D$  與孔隙水滲透速度  $V$  等變數，為瞭解這些變數在計算混凝土內氯離子濃度分佈的影響，我們以具有常數邊界條件的(2.22)式為數值計算例，分別給定如表 1 的變數值，再用 Matlab 撰寫程式進行數值演算，其結果

繪如圖 1-6。在進行數值計算時，(2.22)式中的累加項取  $n \geq 20$ ，計算結果的誤差值均小於 1%，因此，我們採用  $n = 20$  來計算。另外，水工混凝土結構體表面氯離子濃度，在正常情況下，接觸海水面處( $x = 0$ )的氯離子濃度會大於遠離海水面處( $x = L$ )的濃度，即  $C_0 > C_L$ 。多數情況， $C_L/C_0$  的值會小於 0.5，為了方便分析討論，我們分別設定混凝土表面氯離子濃度比值  $C_L/C_0 = 0$  與  $C_L/C_0 = 0.5$ ，作為計算與分析討論混凝土內氯離

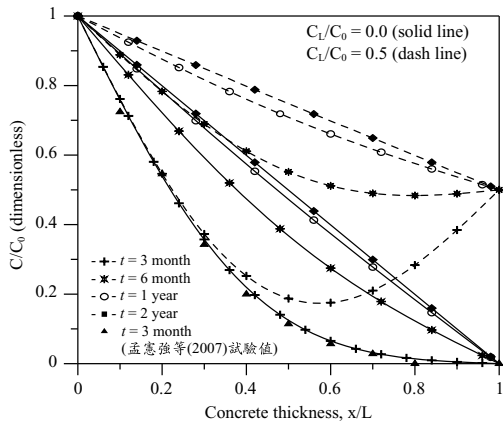


圖 1 純擴散情況下，擴散時間影響氯離子濃度分佈的變化圖 ( $D=5 \times 10^{-11} m^2/s$ )

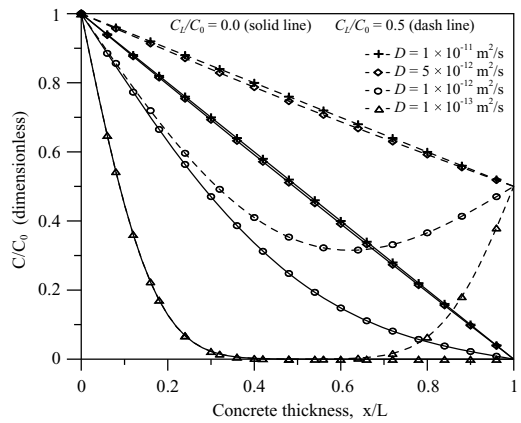


圖 3 純擴散情況下，擴散係數影響氯離子濃度分佈的變化圖 ( $t = 2 \text{ year}$ )

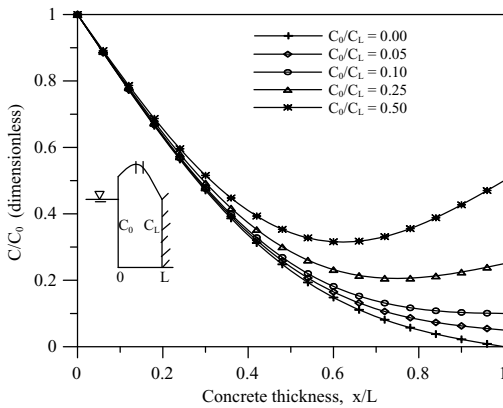


圖 2 純擴散情況下，不同  $C_L/C_0$  值的氯離子濃度分佈變化圖 ( $D=10^{-12} m^2/s$ ,  $t = 2 \text{ year}$ )

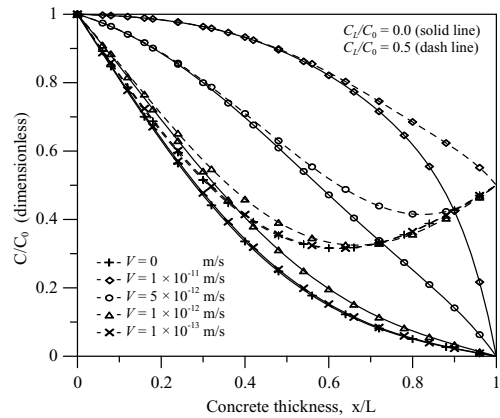


圖 4 孔隙水滲流速度影響氯離子濃度分佈的變化圖 ( $D=10^{-12} m^2/s$ ,  $t = 2 \text{ year}$ )

子濃度分佈差異變化的依據。

我們以孟憲強等(2007)考慮純擴散情況下的試驗數據，來檢驗推導得解析解的可靠性，因此，依據該文的試驗條件設定  $D=5 \times 10^{-11} m^2/s$  與擴散時間取  $t=3, 6, 12, 24 \text{ month}$  等代入(2.22)式，數值計算結果整理繪如圖 1。此圖顯示當  $t = 3 \text{ month}$  時，計算結果與孟憲強等(2007)的試驗值相當吻合，此表示解析解的計算值是可靠的。另外，混凝土內各位置點的氯離子濃度，隨著擴散時間的增長而增加，不因  $C_L/C_0$  值而異，但在接近  $x=1$  處的濃度則逐漸收斂趨於  $C_L/C_0$  值；圖 2 是純擴散情況下，設定擴散係數  $D=10^{-12} m^2/s$ ，擴散時間取  $t = 2 \text{ year}$  與  $C_L/C_0$  分

別設為 0, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5 等值代入(2.22)式的計算結果。此圖顯示  $C_L/C_0$  值會影響混凝土內氯離子的濃度分佈，尤其是當  $x > 0.3$  時，混凝土內各位置點的氯離子濃度隨著  $C_L/C_0$  值變化更為明顯；圖 3 是純擴散情況下，取擴散係數  $D = 10^{-11}, 5 \times 10^{-12}, 10^{-12}, 10^{-13} m^2/s$  與  $t = 2 \text{ year}$  等代入(2.22)式的計算結果。此圖顯示混凝土內各位置點的氯離子濃度，隨著擴散係數的增大而增加，不因  $C_L/C_0$  值而異，但在接近  $x=1$  處的氯離子濃度則逐漸收斂趨於  $C_L/C_0$  值。圖 4 是設定降解反應係數  $k=0$ ，孔隙水滲流速度分別為  $V = 0, 10^{-11}, 5 \times 10^{-12}, 10^{-12}, 10^{-13} m/s$ ，擴散係數  $D = 10^{-12} m^2/s$ ，以及擴散時間取  $t = 2 \text{ year}$  等值代入(2.22)式的計

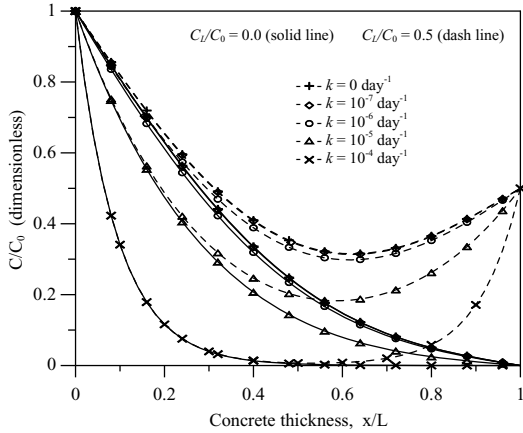


圖 5 降解反應係數影響氯離子濃度分佈的變化圖  
( $D=10^{-12} m^2/s$ ,  $t=2 year$ )

算結果。此圖顯示在混凝土厚度  $x/L=0\sim 0.9$  範圍內，各位置點的氯離子濃度與孔隙水滲流速度呈現正比變化關係，不因  $C_L/C_0$  值而異，即孔隙水滲流速度越小，氯離子的濃度越低，但當  $V/D < 10^{-1}(1/m)$  時，孔隙水滲流速度的影響就不明顯了。水工混凝土結構體長期在水環境作用下，容易產生侵蝕性孔隙或裂隙，此將增快水在混凝土內的滲流速度，此時估算氯離子濃度分佈時，應考慮孔隙水滲流速度的影響；圖 5 是設定降解反應係數分別為  $k=0, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7 day^{-1}$ ，孔隙水滲流速度  $V=0$ ，擴散係數  $D=10^{-12} m^2/s$  與擴散時間取  $t=2 year$  等值代入(2.22)式的計算結果。此圖顯示降解反應係數與氯離子濃度分佈呈現反比變化關係，即混凝土內各位置點的氯離子濃度隨著降解反應係數的增大而衰減，但當  $k/D < 10^5 (day^{-1}/m^2/s)$  時，降解反應係數的影響不明顯，此時可以忽略不計。目前討論氯離子在混凝土內產生降解反應的研究文獻，仍十分少見，有待進一步的用實驗來釐清其在混凝土內傳輸過程中的影響性；圖 6 為純擴散情況下 ( $D=10^{-12} m^2/s$ ,  $t=2 year$ )，考慮混凝土表面的氯離子濃度是隨時間增加 (即  $C(0,t)=C_0 t^m$ ,  $m=0\sim 1$ )，混凝土內各位置點氯離子濃度分佈的變化圖。此圖顯示混凝土內各位置點的氯離子濃度與  $m$  值呈現正比變化，即氯離子濃度隨著  $m$  值的增大而增加。對於混凝土表面氯離子濃度為

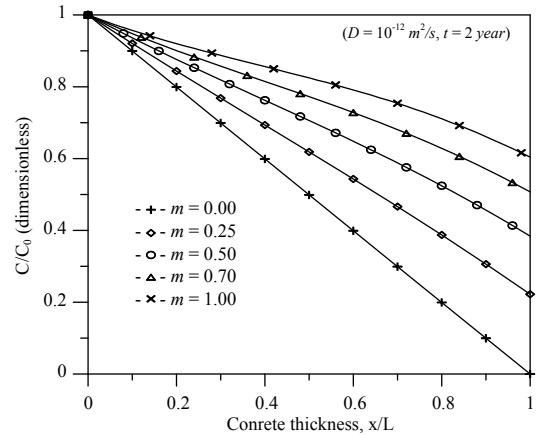


圖 6 純擴散情況下，考慮混凝土表面氯離子濃度  $C(0,t)=C_0 t^m$  的氯離子濃度分佈變化

$C(0,t)=C_0 e^{mt}$  ( $m=0\sim 1$ ) 的情況，雖然  $e^{mt}$  與  $t^m$  兩函數的型態不同，但都是  $KG$  的類型，差別只在於  $K$  值的大小，因此，此情況的氯離子濃度分佈亦與  $m$  值成正比變化。

總結來說，各個解析解中的混凝土表面氯離子濃度比值( $C_L/C_0$ )、降解反應係數  $k$ 、擴散係數  $D$  與孔隙水滲透速度  $V$  等變數，均影響混凝土內氯離子的濃度分佈，以混凝土厚度內各位置點的氯離子濃度而言， $C_L/C_0$  值、擴散係數與孔隙水滲透速度等對氯離子濃度分佈的影響呈現正比變化，而降解反應係數的影響則呈現反比變化。

#### 四、結 論

水工結構物在含有氯鹽環境下，將導致內部鋼筋銹蝕與結構體耐久性劣化。本文應用拉普拉斯變換，推導得一維有限厚度水工結構體，氯離子傳輸數學模式的基本解，再運用積分技巧求得適用於估算氯離子濃度分佈的幾種邊界條件之解析解，並驗證與討論了解析解的正確性。數值計算結果顯示，解析解中的混凝土表面氯離子濃度比值  $C_L/C_0$ 、降解反應係數  $k$ 、擴散係數  $D$  與孔隙水滲透速度  $V$  等變數，均明顯影響混凝土內氯離子的濃度分佈。混凝土內各位置點的氯離子濃度，隨著  $C_L/C_0$  值、擴散係數與孔隙水滲透速度等呈現正比變化，而與降解反應係數則呈現反比變化。本文的研究成果可應用於分析均質飽和

有限厚度水工結構體內的氯離子濃度分佈情形，亦可用於驗證電腦模擬氯離子在混凝土內更複雜傳輸模式數值解的合理性，具有一定的實用價值。

## 參考文獻

1. Collepardi, M., Marcialis, A., and Turriziani, R., "Kinetics of penetration of chloride ions into the concrete," *Il Cemento (Italy)*, No. 4, pp. 157-164 (1970).
2. Hooton, R.D., and MacGrath, P.F., "Issues related to recent developments in service life specifications for concrete structures," *Proceedings of the 1<sup>st</sup> International RILEM Workshop on chloride penetration into concrete*, Saint-Remy-Les-Chevreuse : RILEM, pp. 388-397 (1997).
3. Dhir, R.K., Jones, M.R., and Ng, SLD, "Prediction of total chloride content profile and concentration/time dependent diffusion coefficients for concrete," *Magazine of Concrete Research*, Vol. 50, No. 1, pp. 37-48 (1998).
4. 金偉良、張奕、盧振勇，「非飽和狀態下氯離子在混凝土中的滲透機理及計算模型」，*矽酸鹽學報*，第三十六卷，第十期，第 1362-1369 頁 (2008)。
5. 施養杭、羅剛，「含多種因素的氯離子侵入混凝土的有限差分計算模型」，*工業建築*，第三十四卷，第五期，第 7-10 頁 (2004)。
6. 劉榮桂、陸春華，「海工預應力混凝土氯離子侵蝕模型及耐久性」，*江蘇大學學報*，第二十六卷，第六期，第 525-528 頁 (2005)。
7. 劉志勇、孫偉、楊鼎宜、周新剛，「基於氯離子滲透的海工混凝土壽命預測模型進展」，*工業建築*，第三十四卷，第六期，第 61-64 頁 (2004)。
8. 葉美怡，「鹽份滲透混凝土之理論模式修訂」，*國立雲林科技大學營建工程系碩士論文*，台灣雲林 (2007)。
9. Costa, A., and Appleton, J., "Chloride penetration into concrete in marine environment – Part I: Main parameters affecting chloride penetration," *Materials and Structures*, Vol. 32, No. 4, pp. 252-259 (1999).
10. 余紅發、孫偉，「混凝土氯離子擴散理論模型」，*東南大學學報自然科學版*，第三十六卷增刊，第 68-76 頁 (2006)。
11. Kassir, M.K., and Ghosn, M., "Chloride-induced corrosion of reinforced concrete bridge decks," *Cement and Concrete Research*, Vol. 32, No. 1, pp. 139-143 (2002).
12. Mangat, P.S., and Molloy, B.T., "Prediction of long term chloride concentration in concrete," *Materials and Structures*, Vol. 27, No. 6, pp. 338-346 (1994).
13. 應敬偉、趙治超、張喜德，「地方氣候環境下氯離子擴散係數的研究」，*廣西大學學報*，第三十三卷增刊，第 32-35 頁 (2008)。
14. Shu, S.S., *Boundary value problems of linear partial differential equations for engineers and science*, World Scientific, New Jersey, pp. 113-120 (1987).
15. Beck, J.V., Cole, K.D., Haji-Sheikh, A., and Litkouhi, B., *Heat conduction using Green's functions*, Hemisphere, London, pp. 421-428 (1992).
16. Malkovich, R.Sh., "Alternative analysis solution of the diffusion equation for an arbitrary initial concentration distribution," *Technical Physics Letters*, Vol. 28, No. 11, pp. 91-94 (2009).
17. Polyanin, A.D., *Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists*, Chapman & Hall CRC, New York, Sec 1.1.5-7 (2002).
18. 孟憲強、王顯利、王凱英，「海洋環境混凝土中氯離子濃度預測多係數擴散方程」，*武漢大學學報*，第四十卷，第三期，第 57-60 頁 (2007)。

收稿日期：民國 99 年 4 月 9 日

修正日期：民國 99 年 8 月 11 日

接受日期：民國 99 年 8 月 31 日