

專 論

應用小波轉換及消噪於線性擾動響應模式之研究

**Linear Perturbation Response Model Based on  
Wavelet Transform and Denoise**

明道大學  
綠環境設計學系  
副教授

周 建 明\*

Chien-Ming Chou

台灣首府大學  
休閒設施規劃與管理學系  
副教授

鄭 士 仁

Shin-Jen Cheng

摘 要

本研究將傳統線性擾動響應模式用於求得平滑季節平均值之傅立葉級數，改採小波轉換及小波消噪二種方法分別進行處理。首先對降雨及逕流時間序列分別進行  $M$  層小波分解，可獲致在  $M$  個尺度下之光滑近似訊號及細節訊號。第一種應用方法係將第  $M$  個尺度之光滑近似訊號視為平滑季節平均值，針對  $M$  層之細節訊號使用  $M$  個線性擾動響應模式分別模擬之，即假設每一層輸入與輸出之細節訊號間為線性關係，最後透過逕流之平滑季節平均值與  $M$  個擾動項推估值之小波重構可獲致輸出推估值。第二種應用方法係令各分辨層小於某門檻值之細節訊號為零，並將各分辨層經此處理後之細節訊號及第  $M$  層之光滑近似訊號，利用小波重構以獲致消噪後之降雨及逕流水文時間序列，並將其視為平滑季節平均值，而將原始時間序列減去消噪後時間序列所得到之噪音值視為擾動項。假設輸入噪音與輸出噪音間之關係為線性關係，採用最小二乘法推估此單一響應函數後，再利用降雨擾動項計算相對應之逕流擾動項推估值，最後將消噪後之逕流加上逕流擾動推估值，可獲致逕流量輸出推估值。上述二種方法經應用於基隆河流域五堵上游集水區之日降雨－逕流歷程分析，研究結果顯示應用小波轉換及小波消噪，均可以有效地計算平滑之季節平均值及相對應之擾動項，進而提高降雨－逕流歷程模擬之精確度。

**關鍵詞：**小波轉換，小波消噪，線性擾動響應模式，降雨－逕流歷程。

ABSTRACT

This work models rainfall-runoff processes using a novel framework based on wavelet analysis and the linear perturbation response model (LPRM). Wavelet transforms

\*通訊作者，明道大學綠環境設計學系副教授，52345 彰化縣埤頭鄉文化路 369 號，jamin@mdu.edu.tw

are substituted for the Fourier series to acquire smooth seasonal means and perturbation terms from rainfall-runoff data in the LPRM. The observed rainfall and runoff time series are decomposed using wavelet transforms to obtain the approximation and detailed signals of rainfall and runoff, respectively, at  $M$  resolution levels. In the first application, the detailed signal at each resolution level is considered the perturbation term utilized in the LPRM. We assume the relationship between the input detailed signal and output detailed signal at each resolution level is linear. Moreover, the approximation at resolution level  $M$  corresponds to the smooth seasonal mean employed in the LPRM. The estimated runoff can be derived from the approximation of runoff at resolution level  $M$  and estimated detailed signals of runoff at all resolution levels using wavelet reconstruction. In the second application, the values of a detailed signal below a certain threshold are set to zero at each resolution level, meaning denoise. The denoisy rainfall and runoff time series can be obtained from the approximation and denoisy detailed signals at all resolution levels of rainfall and runoff, respectively, using wavelet reconstruction. The denoisy rainfall and runoff time series are then regarded as the smooth seasonal mean employed in the LPRM. The noise, *i.e.*, original time series minus denoisy time series, is considered the perturbation term employed in the LPRM. Moreover, we assume the relationship between input noise and output noise is linear. The summation of the denoisy runoff and estimated noise of runoff yields the overall estimated runoff in the LPRM. To verify the accuracy of the proposed model, this work chose daily rainfall-runoff data for upstream of the Kee-Lung River as a case study. Analytical results demonstrate that wavelet transform and denoise can accurately estimate the smooth seasonal mean and perturbation terms, thereby enhancing the accuracy of modeling of rainfall-runoff processes.

**Keywords:** Wavelet transform, Wavelet denoise, Linear perturbation response model, Rainfall-runoff processes.

## 一、前言

模擬流域之降雨—逕流歷程時，常將其視為具有單輸入—單輸出關係之系統。研析此系統之目的係由觀測資料建立輸入—輸出關係，模擬過去歷史資料或預測未來之逕流推估值。此方法主要著重於系統之功能，而非系統本身之特性或控制系統運作之物理定律。所謂系統功能係指輸入與輸出間之關係，而將系統特性及物理定律及歸納為黑盒之概念。當系統特性或物理定律產生變化，系統作用亦相應地變化。

實際觀測之水文時間序列，由於受到衆多因

素影響，含有系統噪音與觀測噪音。所謂系統噪音是系統在各時刻步驟中受到小的隨機干擾時反饋於過程之中，其直接影響系統在時間上之演化；而觀測噪音是由於測量引起之誤差。噪音之存在會掩蓋水文時間序列之真實變化特性。由具有噪音之水文時間序列進行分析計算與推估模式參數，無法真正反應水文系統之本質。對於擬研析之水文時間序列進行消噪處理，可提高資料之可靠性與資料分析結果之精確度(王等, 2005)。

傳統消噪技術有維納濾波及卡門濾波等方法(Grewal & Andrews, 1993)，但僅適用於線性系統，且依賴狀態函數之建立。實際上，水文系統

是非線性且不易建立合適之狀態空間模式，因此上述方法在水文之應用具有極大之限制。傅立葉分析方法雖無需對系統建立模式，但僅適合於平穩水文時間序列之消噪。如暴雨、洪水與逕流等水文時間序列常為非平穩隨機過程，因而傅立葉消噪範圍有限。近二十年發展起來之小波分析為一種多尺度分析方法，能有效分離高頻成分與低頻成分，消噪效果比傅立葉分析更強(王等，2005)。

目前，國內外有關於小波在水文上應用之文獻並不多，王與李(1997)建立一種可以同時分析流量資料噪訊及模擬降雨－逕流相互關係之時間序列小波串聯模式，用以從事坡地集水區水文模擬之研究。王與王(1998)研析感潮河段內水位－流量之率定關係，藉著小波理論分解、消噪及重建之功能，串聯合適之水文模式，以建立一種濾除潮汐效應後之修正水位－流量率定曲線。李等(1999)引入新穎之水文序列組合預測方法，其首先對水文序列施行多尺演算(*à trous*)之小波轉換，得到其在各倍頻程上之小波係數；其次利用類神經網路預測模式對小波係數進行多尺度組合預測，最後應用完全重構公式，可得水文序列之預測；其對年平均逕流量序列進行研究，顯示理想之預測效果。

Labat *et al.* (2000)利用連續小波及離散正交多分辨分析(*discrete orthogonal multiresolution analyses*)於半小時、小時及日雨量及流量等不同尺度之記錄資料，探討石灰岩地層(*karstic springs*)之降雨－逕流關係。Bayazit and Aksoy (2001)提出將小波視為資料繁衍(*data generation*)之工具，其將觀測資料分解成細節，最後藉由隨機地加總這些細節以重構並產生新資料；應用於年流量與月流量之結果顯示其所提方法之可行性。

Labat (2005)回顧應用小波分析於水文領域之相關文獻，並藉由介紹 *wavelet cross-correlation* 與 *wavelet coherence* 提出新的尺度相依之關係。Chou (2007)應用小波分解及壓縮之觀念於非線性水文系統並應用流域之洪水預報。Partal & Kişi (2007)結合小波、類神經理論與模糊理論並應用於降雨預測，其驗證結果說明加入小波分析後之

結果，優於未加入小波分析之傳統類神經理論與模糊理論結合應用。

本研究將傳統線性擾動響應模式(*linear perturbation response model*，簡稱 LPRM)中用於使季節平均值平滑化之傅立葉級數，分別改採小波轉換及小波消噪進行處理。經應用於基隆河流域五堵上游集水區之日降雨－逕流歷程之分析，研究結果顯示由於小波分析能分離出訊號之高頻成分與低頻成分，可以有效地計算季節平均值及相對應之擾動項，進而提高降雨－逕流歷程模擬之精確度。

## 二、線性擾動響應模式(LPRM)

LPRM 主要觀念係將水文系統之輸入及輸出時間序列，均區分為季節平均值及擾動項兩部分，其中季節平均值佔有主導部份。為簡化模式，假設輸入之擾動項與輸出之擾動項之間存在線性關係，但輸入與輸出之季節平均值兩者間之關係不作任何假設。因為計算之輸出是季節平均值與擾動項之和，因此，LPRM 亦稱為考慮季節平均值變化之非線性系統方法(魏與王，2005)。

LPRM 之建立主要係計算平滑之季節平均值與辨識輸入之擾動項與輸出之擾動項間之響應函數。基本步驟如下(Nash & Barsi, 1983；魏與王，2005)：

- (1)日降雨量及日逕流量時間序列中包含各種水文訊息，例如之季節性變化平均值。由觀測分別計算水文系統輸入與輸出時間序列之季節平均值  $I_d$  與  $Q_d$ ：

$$I_d = \frac{1}{n}(I_{d,1} + I_{d,2} + \dots + I_{d,i} + \dots + I_{d,n}) \dots\dots (1)$$

$$Q_d = \frac{1}{n}(Q_{d,1} + Q_{d,2} + \dots + Q_{d,i} + \dots + Q_{d,n})$$

式中， $I_d$  及  $Q_d$  為季節平均值， $I_{d,i}$  及  $Q_{d,i}$  為第  $i$  年 第  $d$  天之降雨量及逕流量， $n$  為資料年數。若能將  $I_d$  及  $Q_d$  水文季節訊息納入水文模式中，則可改進水文模擬與預報之精度。

- (2)然而實際上因為計算季節平均值之資料年限較短，所求得之季節平均值常帶有隨機噪音而

出現震盪，需採用合宜之數學方法使季節平均值  $I_d$  及  $Q_d$  光滑為  $\tilde{I}_d$  及  $\tilde{Q}_d$ 。目前常用之方法是傅立葉級數，數學方程式為：

$$\tilde{I}_d = \bar{I}_d + \sum_{j=1}^L \left[ A_{I,j} \cos\left(\frac{2\pi jd}{365}\right) + B_{I,j} \sin\left(\frac{2\pi jd}{365}\right) \right] \quad (d=1, 2, \dots, 365) \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\tilde{Q}_d = \bar{Q}_d + \sum_{j=1}^L \left[ A_{Q,j} \cos\left(\frac{2\pi jd}{365}\right) + B_{Q,j} \sin\left(\frac{2\pi jd}{365}\right) \right] \quad (d=1, 2, \dots, 365)$$

式中， $\bar{I}_d$  及  $\bar{Q}_d$  為平均值， $A_{I,j}$ ， $B_{I,j}$ ， $A_{Q,j}$  及  $B_{Q,j}$  為傅立葉係數， $j$  為調和函數之序數，即：

$$\bar{I}_d = \frac{1}{365} \sum_{d=1}^{365} [I_d] \quad \bar{Q}_d = \frac{1}{365} \sum_{d=1}^{365} [Q_d] \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$A_{I,j} = \frac{2}{365} \sum_{d=1}^L \left[ I_d \cos\left(\frac{2\pi jd}{365}\right) \right] \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$A_{Q,j} = \frac{2}{365} \sum_{d=1}^L \left[ Q_d \cos\left(\frac{2\pi jd}{365}\right) \right]$$

$$B_{I,j} = \frac{2}{365} \sum_{d=1}^L \left[ I_d \sin\left(\frac{2\pi jd}{365}\right) \right] \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$B_{Q,j} = \frac{2}{365} \sum_{d=1}^L \left[ Q_d \sin\left(\frac{2\pi jd}{365}\right) \right]$$

當式(2)之調和函數只取幾項時，即可獲致光滑歷程  $\tilde{Q}_d$ ，一般取  $L = 4$  或  $5$ 。

(3)若假設觀測之降雨及逕流資料為  $\{I(k), Q(k)\}$ ，利用式(6)及(7)計算輸入擾動項  $P(k)$  與輸出擾動項  $Y(k)$ ，形成式(8)之線性系統方程式。

$$P(k) = I(k) - \tilde{I}_d \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$Y(k) = Q(k) - \tilde{Q}_d \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$Y(k) = \sum_{j=1}^m H(j)P(k-j+1) + e(k) \quad \dots\dots\dots(8)$$

式中， $H(j)$  為線性擾動系統響應函數， $m$  是響應函數之記憶長度， $e(k)$  為誤差。由式(6)、式(7)及式(8)所構成之系統模式，即稱為線性擾動響應模式(LPRM)。

- (4)採用最小二乘法推估 LPRM 之響應函數  $\hat{H}(j)$ 。
- (5)獲致響應函數之推估值後，再利用式(8)由降雨之擾動值  $P(k)$  計算相對應之逕流擾動推估值  $\hat{Y}(k)$ 。
- (6)由此可計算或預報逕流量之推估值  $\hat{Q}(k) = \tilde{Q}_d + \hat{Y}(k)$ 。

### 三、小波轉換及消噪

小波分析係一門新發展之數學學科，經過十幾年之發展，小波分析在理論及方法上均獲致突破性之進展。小波轉換亦稱為小波分解(wavelet decomposition)，其為一種線性運算，可對訊號進行不同分辨層(尺度)之分解，能將各種交織在一起之混合訊號分解成不同分辨層或不同頻率之區塊訊號，可有效地應用於訊號及噪音之分離，提高時頻兩域之分辨能力。小波轉換亦為一種訊號之時間-尺度(時間-頻率)分析方法，其具有多分辨分析之特點，且在時間-頻率兩域均具有表徵訊號局部特徵之功能。

小波分析在時域及頻域上同時具有良好之局部化性質，並且能根據訊號頻率高低自動調節採樣之疏密，容易捕捉及分析微弱訊號與圖像之任意細小部分。其優於傳統傅立葉分析之處，主要在於其能對不同之頻率成分採用逐漸精細之採樣長度，從而可以聚焦到訊號之任意細節，尤其是對奇異訊號相當敏感，可處理微弱或突變之訊號，其原理係將一個訊號之訊息轉換成小波係數，從而能夠便捷地加以處理、儲存、傳遞、分析或被用於重建原始訊號(林與鄭，1999)。

#### 3.1 小波轉換及 Daubechies 小波之濾波係數

某一向量之一維離散小波轉換，相當於產生與原向量相等維數向量之線性轉換。此線性轉換之運算亦稱為分解，此可藉由 Mallat 之多分辨分析演算法完成。計算離散小波轉換之轉換矩陣所需之元素主要為二個離散之濾波器，即低通濾波



(3)根據小波分解之第  $M$  層之低頻係數與經過量化處理後之第 1 層到第  $M$  層之高頻係數，進行訊號之小波重構，即可獲致消噪後之訊號。

上述三個步驟中，最關鍵者在於如何選取閾值與如何進行閾值之量化，其影響信號消噪之質量。本研究採用固定閾值方法，固定閾值  $T$  計算公式為(胡等，2000；王等，2005)：

$$T = \sigma\sqrt{2 \ln n} \dots\dots\dots(13)$$

式中， $n$  為某層小波係數之長度， $\sigma$  為該層小波係數之噪音強度(或噪音水平)，一般是未知的。噪音強度可用下式計算(胡等，2000；王等，2005)：

$$\sigma = \frac{1}{0.6745 n} \sum_{i=1}^n |w_j(t)| \dots\dots\dots(14)$$

式中， $w_j(t)$  為第  $j$  層小波分解係數。 $T$  隨小波係數之長度與噪音水平而變化，且  $n$  具決定性作用。

### 3.3 基於小波之 LPRM

於傳統 LPRM 中，以小波轉換及小波消噪分別取代傅立葉級數以獲致平滑季節平均值之方法簡稱為基於小波轉換之線性擾動響應模式(wavelet transform-based linear perturbation response model，簡稱 WT-LPRM)及基於小波消噪之線性擾動響應模式(wavelet denoise-based linear perturbation response model，簡稱 WD-LPRM)。在 WT-LPRM 中，首先分別針對降雨及逕流時間序列分別進行  $M$  層小波分解，可獲致在第  $M$  層之光滑近似訊號及  $M$  個分辨層下之細節訊號，將第  $M$  個尺度之光滑近似訊號視為平滑季節平均值，並針對  $M$  個分辨層之細節訊號使用  $M$  個線性擾動響應模式分別模擬之，即假設每一層輸入與輸出之細節訊號間為線性關係。採用最小二乘法推估  $M$  個響應函數後，再利用式(8)由  $M$  個分辨層之降雨擾動值計算相對應之  $M$  個逕流擾動推估值，最後透過第  $M$  層之平滑季節平均值與  $M$  個擾動項推估值之小波重構，可獲致逕流量輸出推估值。

在 WD-LPRM 中，首先亦分別針對降雨及逕

流時間序列分別進行  $M$  層小波分解，可獲致在第  $M$  層之光滑近似訊號及  $M$  個分辨層下之細節訊號。令各分辨層小於門檻值之細節訊號為零，並將各分辨層經上述處理後之細節訊號及第  $M$  層之光滑近似訊號，利用小波重構即可獲致消噪後之降雨及逕流水文時間序列。在 WD-LPRM 中，以消噪後之降雨及逕流水文時間序列，視為平滑季節平均值，以取代 LPRM 中之傅立葉級數。另將原始時間序列減去消噪後時間序列之噪音值視為擾動項。假設輸入噪音與輸出噪音間之關係為線性關係，採用最小二乘法推估此一響應函數後，再利用式(8)降雨擾動值計算相對應之逕流擾動推估值，最後透過消噪後之逕流加上逕流擾動推估值，可獲致逕流量輸出推估值，即  $\hat{Q}(k) = \hat{Q}_d + \hat{Y}(k)$ 。

## 四、研析資料之處理

### 4.1 研究流域簡介

本研究以基隆河流域五堵上游集水區為研析區域，如圖 1 所示。基隆河流域位於亞熱帶氣候區，冬季時受大陸性冷氣團籠罩，東北季風盛行，寒冷且多地形雨；夏季西南風吹襲，燠熱而時有陣雨。流域內東北部及北部因受東北季風之影響大，其雨量多於南部與西部，長年平均雨量以瑞芳附近為最高，各月雨量平均分配，為台灣其他地區罕見之現象，平均年雨量為 2,865 mm，年平均逕流深度 2,177 mm，平均年逕流係數 0.76。基隆河流域之下游流入台北盆地之東北角，由於盆地內地勢低窪，基隆河自汐止河段以下，感潮情況甚為明顯，但自五堵上溯地勢漸入丘陵坡地，兩岸支流錯綜複雜，坡陡流短，每到夏秋之際，暴雨颱風來襲，挾帶大量雨水，洪流渲洩不及，屢次造成重大災害。

### 4.2 研究資料蒐集與整理

本研究係以基隆河流域之五堵集水區為研析對象，主要選取五堵水文站為基隆河流域集水區之驗證流量站。對於降雨之空間變異分析，採用淡水河流域之 14 個電傳雨量站予以分析克利金方法之半變異圖。而降雨一逕流模式所需之平

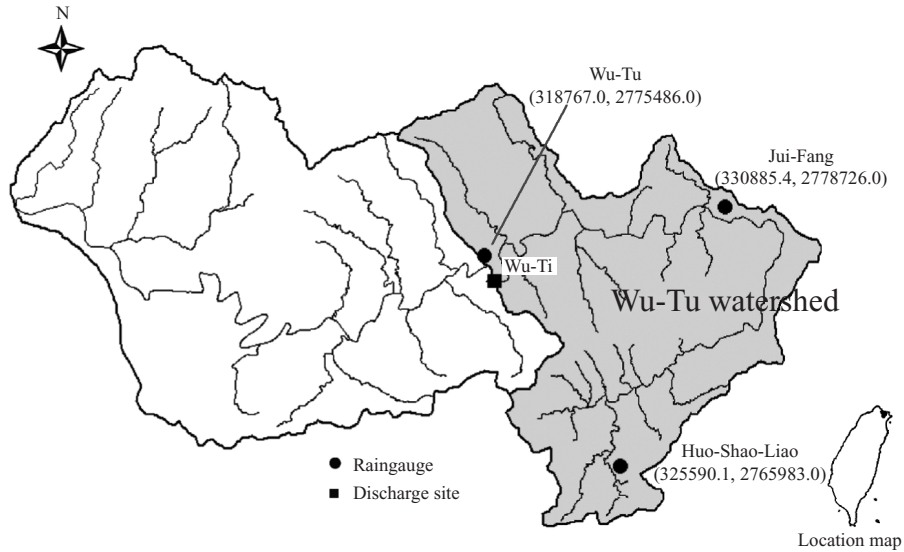


圖 1 五堵集水區示意圖

均雨量則選取五堵集水區內經濟部水利署隸屬之瑞芳、五堵與火燒寮等三站予以計算求得，雨量測站示如圖 1。雨量站與流量站均選取 1966~1994 年共計 29 年之日降雨量及日逕流量進行研析，其中 1966~1980 年資料用於模式之檢定，而其餘 1981~1994 年則用於模式之驗證。

### 4.3 模式合適性之校驗

為探討模式分析結果之合適性，本研究以體積誤差百分比 EV (error of total volume)、效率係數 CE (coefficient of efficiency)、峰值誤差  $EQ_p$  (error of peak discharge) 及峰值到達時刻誤差  $ET_p$  (error of time to peak discharge) 等四項為校驗之標準。各項校驗標準定義如下：

#### (1) 體積誤差百分比(EV)

$$EV = \frac{\sum_{i=1}^n [Q_{est}(i) - Q_{obs}(i)]}{\sum_{i=1}^n Q_{obs}(i)} \dots\dots\dots (15)$$

式中， $Q_{est}$  為模式推估之流量， $Q_{obs}$  為觀測之流量。當 EV 值愈小時，表示模擬結果與實際資料愈密合，精確度愈高。

#### (2) 效率係數(CE)

$$CE = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n [Q_{est}(i) - Q_{obs}(i)]^2}{\sum_{i=1}^n [Q_{obs}(i) - \bar{Q}_{obs}(i)]^2} \dots\dots\dots (16)$$

式中， $Q_{est}$  為模式推估之流量， $Q_{obs}$  為觀測之流量， $\bar{Q}_{obs}$  為觀測流量之平均值。當 CE 值愈趨近於 1 時，表示模擬結果與實際資料愈密合，精確度愈高。

#### (3) 洪峰流量誤差( $EQ_p$ )

$$EQ_p(\%) = \frac{Q_{p,est} - Q_{p,obs}}{Q_{p,obs}} \times 100\% \dots\dots\dots (17)$$

式中， $Q_{p,est}$  為模式推估之洪峰流量， $Q_{p,obs}$  為觀測之洪峰流量。當  $EQ_p$  為正值時，表示模式推估之洪峰值大於觀測之洪峰值；而  $EQ_p$  為負值時，表示模式推估值小於觀測值。

#### (4) 洪峰到達時刻誤差( $ET_p$ )

$$ET_p = T_{p,est} - T_{p,obs} \dots\dots\dots (18)$$

式中， $T_{p,est}$  為推估之洪峰到達時刻， $T_{p,obs}$  為觀測之洪峰到達時刻。 $ET_p$  值愈小，表示模式洪峰到達時刻之估算愈準確。

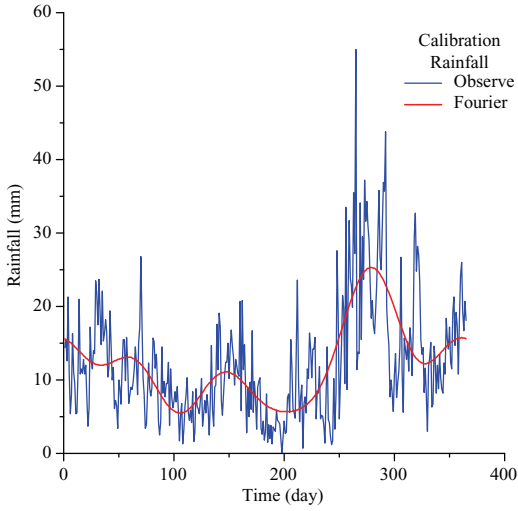


圖 2 應用傅立葉級數於檢定之日降雨量平滑化

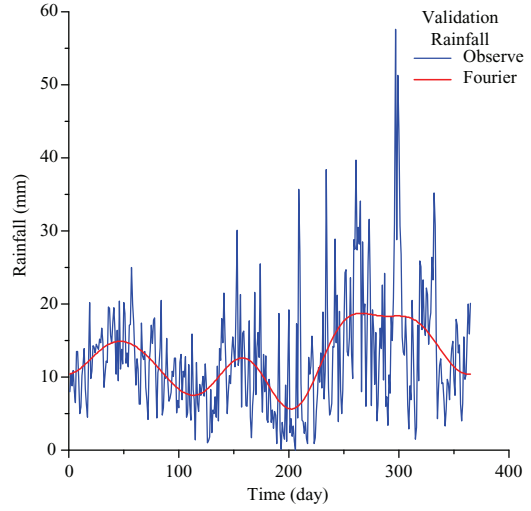


圖 4 應用傅立葉級數於驗證之日降雨量平滑化

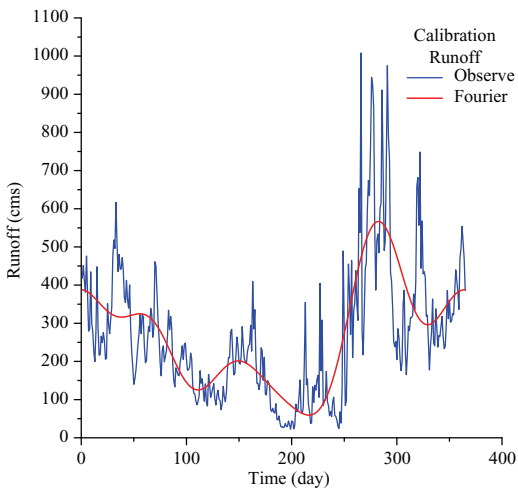


圖 3 應用傅立葉級數於檢定之日逕流量平滑化

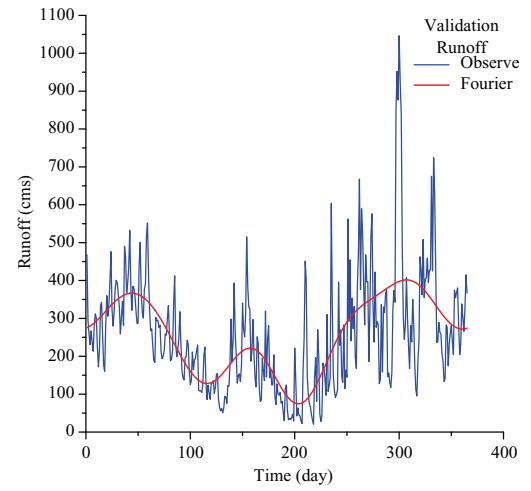


圖 5 應用傅立葉級數於驗證之日逕流量平滑化

## 五、結果與討論

### 5.1 LPRM 與 WT-LPRM

在傳統 LPRM 中，將使用於檢定及驗證之日降雨量及日逕流量之季節平均值，以傅立葉級數進行平滑化之結果，如圖 2~圖 5 中之 Fourier 歷線所示。由圖 2 檢定之日降雨量及圖 3 檢定之日逕流量資料，可知經傅立葉級數平滑化後，輸入與輸出之季節平均值變化趨勢大致相同。同樣地，由圖 4 驗證之日降雨量及圖 5 驗證之日逕流

量資料，亦可知經傅立葉級數平滑化後，輸入與輸出之季節平均值變化趨勢亦大致相同。

本研究採用 DAUB4 正交小波分別針對檢定及驗證之日降雨量及日逕流量進行 3 層小波分解，可獲致不同尺度下之低頻成分(S1~S3)及高頻成分(W1~W3)，示如圖 6~圖 13，其中 S0 為原始日降雨量或日逕流量。由圖 6 檢定之日降雨量低頻部份及圖 8 檢定之日逕流量低頻部份資料，可知經小波分解後之季節平均值變化趨勢，不論在第一層 S1、第二層 S2 或第三層 S3，日降雨量低



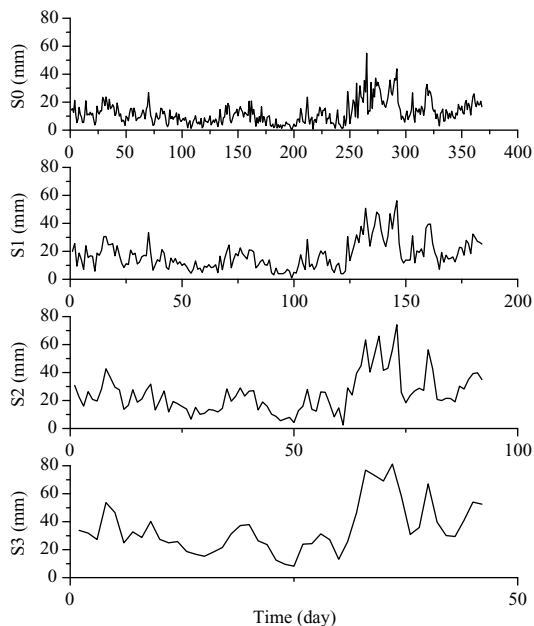


圖 6 檢定之日降雨量之小波分解(低頻)

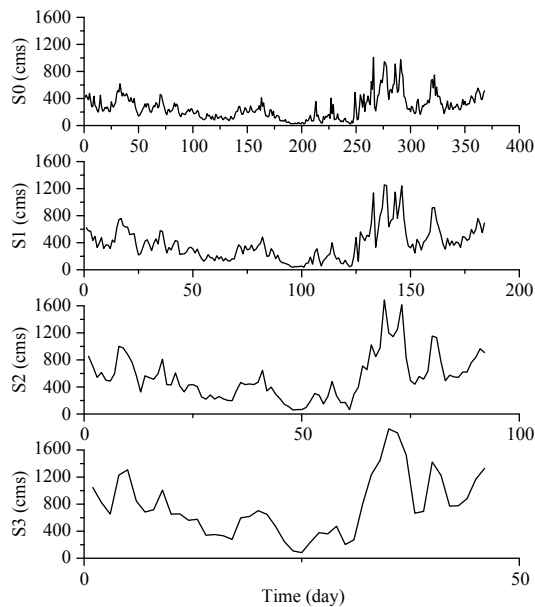


圖 8 檢定之日逕流量之小波分解(低頻)

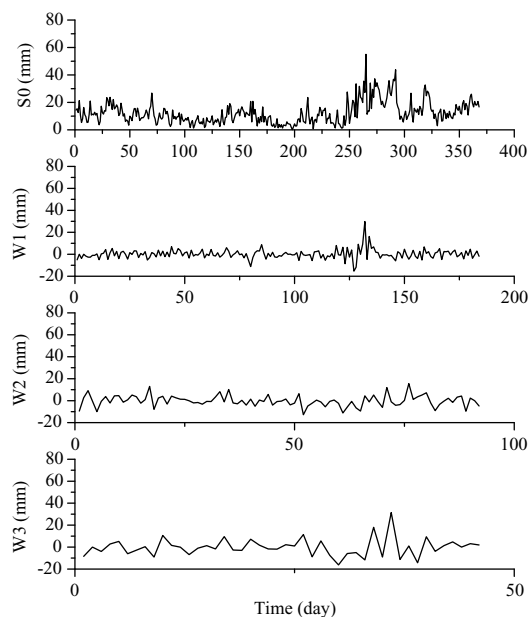


圖 7 檢定之日降雨量之小波分解(高頻)

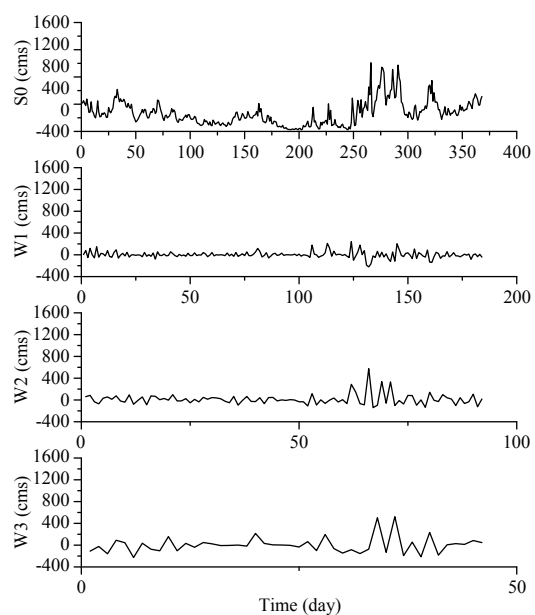


圖 9 檢定之日逕流量之小波分解(高頻)

頻變化之趨勢與日逕流量低頻變化之趨勢大致相同。同樣地，由圖 10 驗證之日降雨量低頻部份及圖 12 驗證之日逕流量低頻部份資料，亦可知經小波分解後之季節平均值變化趨勢，不論在

第一層 S1、第二層 S2 或第三層 S3，日降雨量低頻變化之趨勢與日逕流量低頻變化之趨勢亦大致相同。以上說明小波分解不僅可以取代傅立葉級數之平滑化，且依分解層數之不同，可顯示不

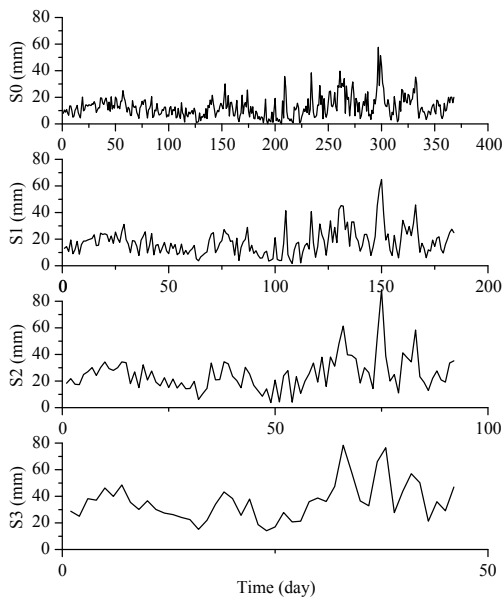


圖 10 驗證之日降雨量之小波分解(低頻)

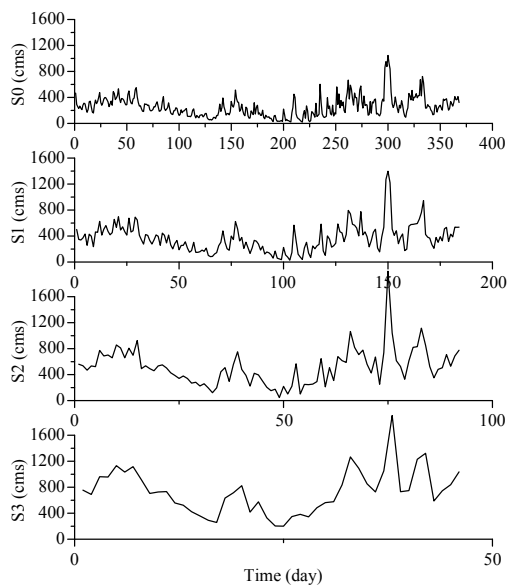


圖 12 驗證之日逕流量之小波分解(低頻)

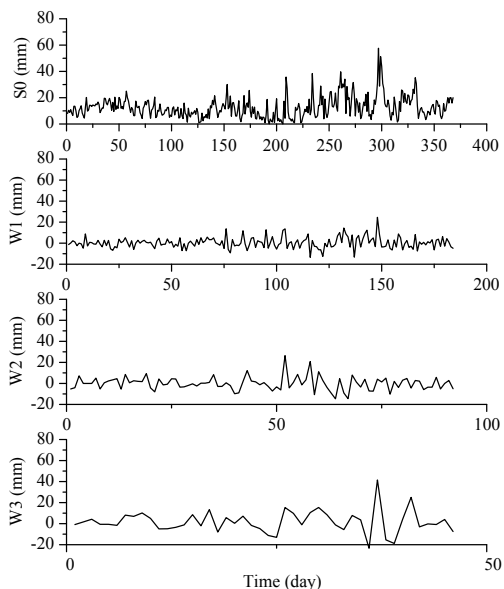


圖 11 驗證之日降雨量之小波分解(高頻)

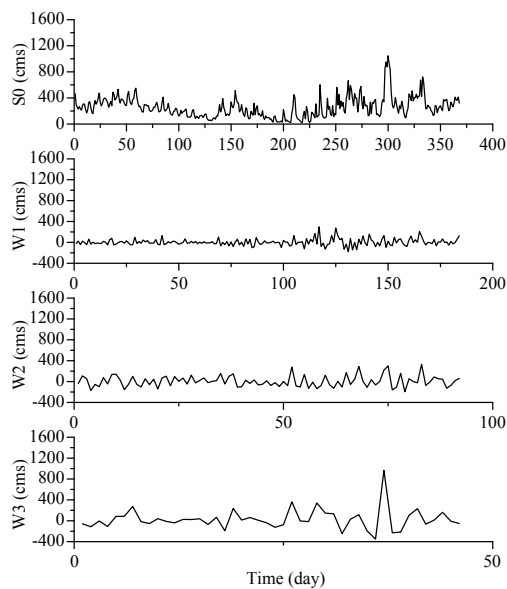


圖 13 驗證之日逕流量之小波分解(高頻)

同程度之平滑化效果。

使用 LPRM 之檢定結果，如表 1 左半部及圖 14~圖 16 中之 LPRM 歷線所示，從圖 14~圖 16 可知 LPRM 所推估之歷線產生較多震盪之結果。使用 LPRM 之驗證結果，如表 1 右半部及圖 17~圖 19 中之 LPRM 歷線所示。

分解層數為  $M$ ，使用分解層數分別為 1、2 及 3 層之 WT-LPRM 之檢定結果，如表 2 左半部圖 14~圖 16 中之 WT-LPRM 歷線所示。使用分解層數分別為 1、2 及 3 層之 WT-LPRM 之驗證結果，如表 2 右半部及圖 17~圖 19 中之 WT-LPRM 歷線所示。

表 1 LPRM 之檢定及驗證結果表

檢定				驗證			
EV (%)	CE	EQ <sub>p</sub> (%)	ET <sub>p</sub>	EV (%)	CE	EQ <sub>p</sub> (%)	ET <sub>p</sub>
0.41	0.914	-6.90	0	0.50	0.862	-4.06	0

表 2 WT-LPRM 之檢定及驗證結果表

分解層數	檢定				驗證			
	EV (%)	CE	EQ <sub>p</sub> (%)	ET <sub>p</sub>	EV (%)	CE	EQ <sub>p</sub> (%)	ET <sub>p</sub>
M = 1	-0.05	0.962	-1.49	0	-0.05	0.903	6.15	0
M = 2	-0.11	0.895	-7.44	10	-0.11	0.817	18.66	0
M = 3	-0.16	0.877	-13.14	25	-0.16	0.761	3.79	0

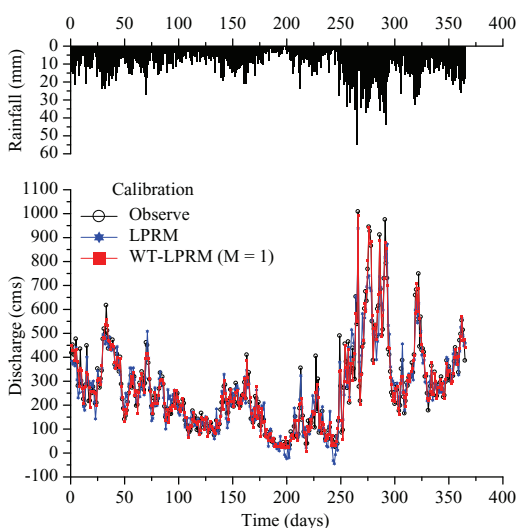


圖 14 WT-LPRM 之檢定結果(M = 1)

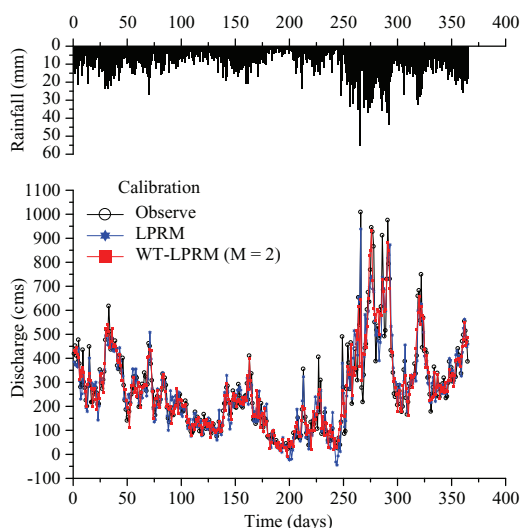


圖 15 WT-LPRM 之檢定結果(M = 2)

基於四種校驗標準，比較表 1 (LPRM)及表 2 (WT-LPRM)之結果。當分解層數為 1 層(即 M = 1)時，在檢定結果部份，於體積誤差百分比方面，WT-LPRM 之絕對值為 0.05，低於 LPRM 之 0.41。就效率係數而言，WT-LPRM 之值為 0.962，明顯地高於 LPRM 之值 0.914。此外，於洪峰流量誤差百分比方面，WT-LPRM 之絕對值為 1.49 也低於 LPRM 之絕對值 6.90，另於洪峰流量到達時刻，兩者相等。

當分解層數為 1 層(即 M = 1)時，在驗證結果部份，於體積誤差百分比方面，WT-LPRM 之絕對值為 0.05，低於 LPRM 之 0.50。就效率係數而言，WT-LPRM 之值為 0.903，明顯地高於

LPRM 之值 0.862。此外，於洪峰流量誤差百分比方面，WT-LPRM 之值為 6.15 約略高於 LPRM 之絕對值 4.06，另於洪峰流量到達時刻，兩者相等。

當分解層數為 2 層(即 M = 2)時，在檢定及驗證結果部份，除了於體積誤差百分比方面，WT-LPRM 之絕對值低於 LPRM 之 0.41 外，其餘 WT-LPRM 之效率係數、洪峰流量誤差百分比及洪峰流量到達時刻大都較 LPRM 為差。當分解層數為 3 層(即 M = 3)時，在檢定及驗證結果部份亦如同 M = 2 之情形。

由上述檢定及驗證結果可知將傳統 LPRM 中用於平滑之傅立葉級數，改採小波分解進行處理時，當分解層數為 1 層(即 M = 1)時，所獲致

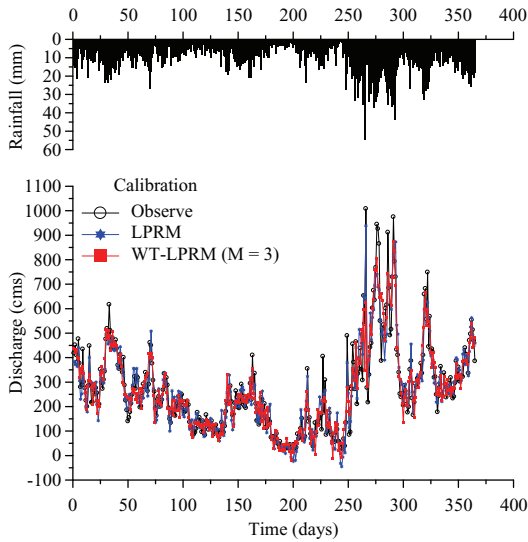


圖 16 WT-LPRM 之檢定結果(M = 3)

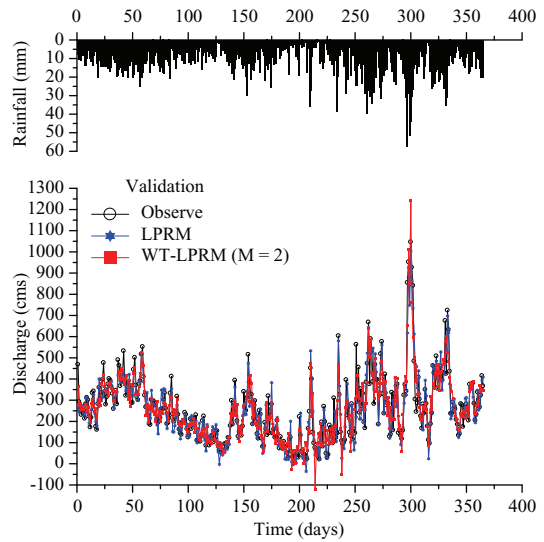


圖 18 WT-LPRM 之驗證結果(M = 2)

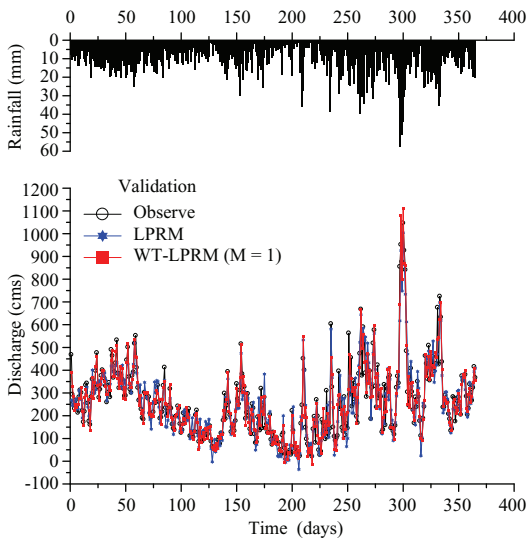


圖 17 WT-LPRM 之驗證結果(M = 1)

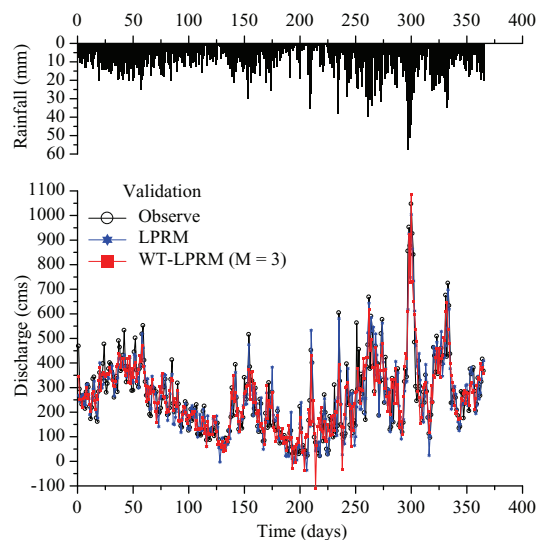


圖 19 WT-LPRM 之驗證結果(M = 3)

之結果幾乎都較 LPRM 為佳。此由於小波分析能分離出訊號之高頻成分與低頻成分，可以有效地計算季節平均值及相對應之擾動項，進而提高降雨一逕流歷程模擬之精確度。

應用小波轉換於水文時間序列之分析，存在著分解層數如何確定之問題。小波分解具有越往較低分辨層進行分解，則近似訊號與細節訊號之平滑性與平穩性也越好之特性。但由於在分解過

程中必然會產生計算誤差，因此分解層數越多，誤差亦越大。所以，本研究中當分解層數為 2 層(即  $M = 2$ )時，WT-LPRM 之檢定及驗證結果比 LPRM 稍差，而當分解層數為 3 層(即  $M = 3$ )時，產生更大之誤差結果。此外，輸入擾動項與輸出擾動項之間假設為線性，與實際非線性之關係不同，亦造成模擬之誤差來源。

由於小波轉換是一種褶積運算，在小波計

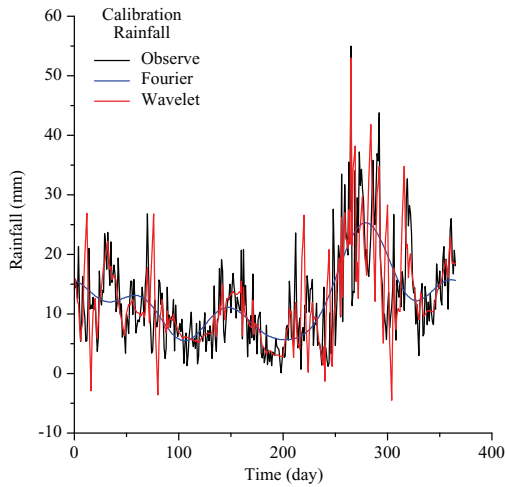


圖 20 檢定之日降雨量平滑化結果

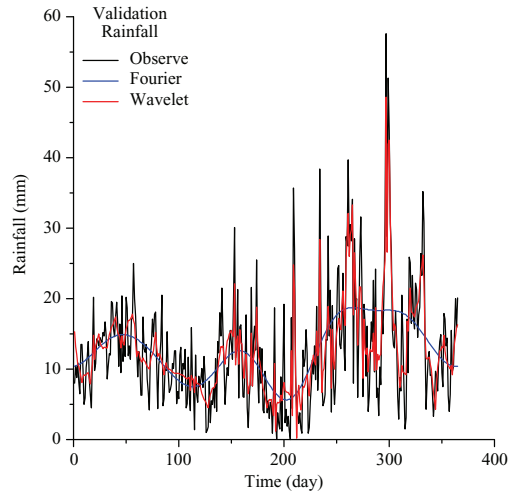


圖 22 驗證之日降雨量平滑化結果

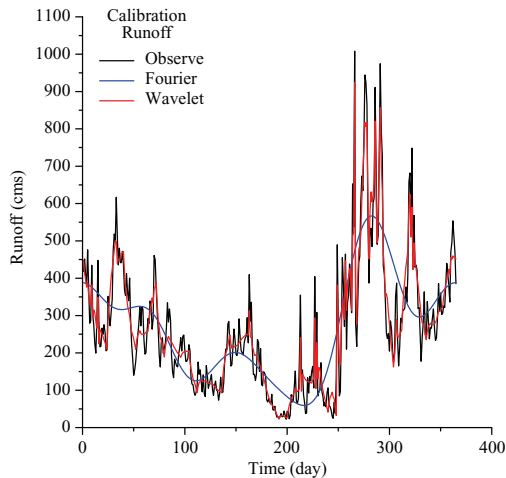


圖 21 檢定之日逕流量平滑化結果

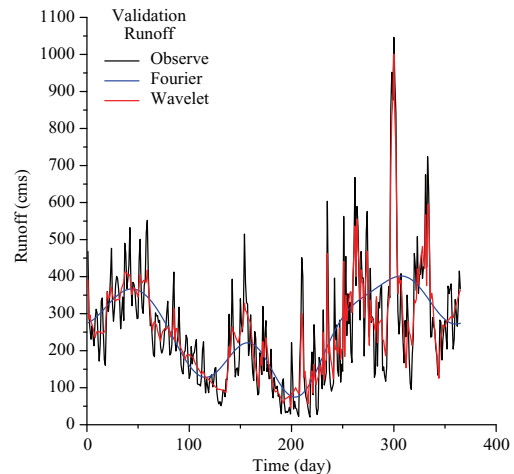


圖 23 驗證之日逕流量平滑化結果

算過程中，無法保證整個計算過程都有足夠長之資料。若資料不夠長，則整個變換過程都受到邊界效應之影響。本研究中因研析資料長度為 365 個，進行小波分解與重構時會產生邊界效應，因此利用對稱延伸法(林與鄭，1999)之鏡射方式將資料個數延伸至 368 個。

## 5.2 LPRM 與 WD-LPRM

在傳統 LPRM 模式中，以傅立葉級數進行平滑化之結果，以檢定之日逕流量平滑化結果為例，如圖 20~23 中之 Fourier 歷線所示。在

WD-LPRM 中，係將原始時間序列減去消噪後時間序列之噪音值視為擾動項，因此，本研究直接採用較複雜之三層小波分解進行分析。以小波消噪進行平滑化之結果，如圖 20~23 中之 Wavelet 歷線所示。由圖 20~23 可知小波消噪效果優於傅立葉級數，且不易產生失真現象。

使用 LPRM 模式之檢定結果，如表 1 左半部及圖 24 中之 LPRM 歷線所示，從圖 24 可知 LPRM 模式所推估之歷線產生較多震盪之結果。使用 LPRM 模式之驗證結果，如表 1 右半部及圖 25 中之 LPRM 歷線所示。

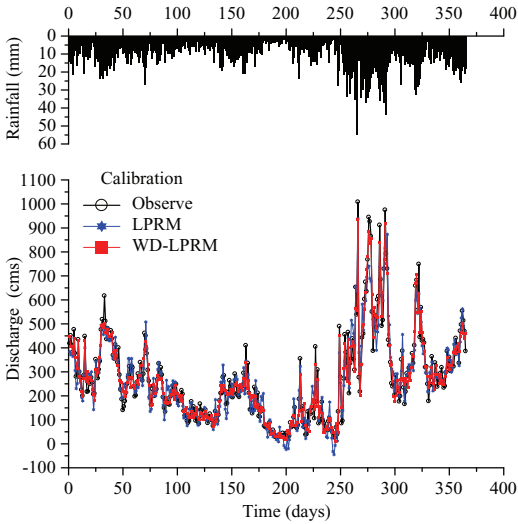


圖 24 LPRM 及 WD-LPRM 之檢定結果

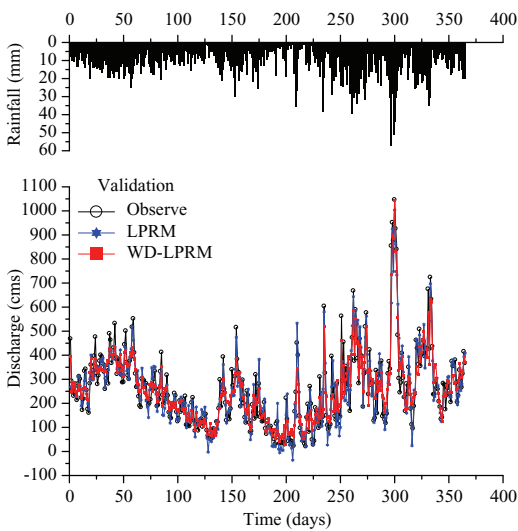


圖 25 LPRM 及 WD-LPRM 之驗證結果

使用 WD-LPRM 模式之檢定結果，如表 3 第 2 列及圖 24 中之 WD-LPRM 歷線所示。使用 WD-LPRM 模式之驗證結果，如表 3 第 3 列及圖 25 中之 WD-LPRM 歷線所示。

基於四種校驗標準，比較表 1 (LPRM) 及表 3 (WD-LPRM) 之結果。在檢定結果部份，於體積誤差百分比方面，WD-LPRM 之絕對值為 0.03，低於 LPRM 之 0.41。就效率係數而言，WD-LPRM 之值為 0.934，明顯地高於 LPRM 之

表 3 WD-LPRM 模式之檢定及驗證結果表

事件	EV (%)	CE	EQ <sub>P</sub> (%)	ET <sub>P</sub>
檢定	-0.03	0.934	-13.11	0
驗證	0.06	0.877	13.27	0

值 0.914。此外，於洪峰流量誤差百分比方面，WD-LPRM 之絕對值為 13.11，高於 LPRM 之絕對值 6.90，另於洪峰流量到達時刻，兩者相等。

在驗證結果部份，於體積誤差百分比方面，WD-LPRM 之絕對值為 0.06，低於 LPRM 之 0.50。就效率係數而言，WD-LPRM 之值為 0.877，略高於 LPRM 之值 0.862。此外，於洪峰流量誤差百分比方面，WD-LPRM 之絕對值為 13.27，高於 LPRM 之絕對值 4.06，另於洪峰流量到達時刻，兩者相等。

由上述檢定及驗證結果可知將傳統 LPRM 模式中用於消噪之傅立葉分析，改採小波分析進行消噪處理，所獲致之結果幾乎都較 LPRM 模式為佳。此由於小波分析能分離出訊號之高頻成分與低頻成分，並針對高頻部份進行消噪處理，可以有效地計算季節平均值及相對應之擾動項，進而提高降雨—逕流歷程模擬之精確度。

## 六、結 論

在 WT-LPRM 中，以小波轉換取代傅立葉級數可獲致平滑之季節平均值，且依小波分解層數之不同，可顯示不同程度之平滑化效果。當分解層數為 1 層(即  $M = 1$ )時，其結果於檢定及驗證方面均能獲致較佳之結果。此乃由於小波分析為一種多尺度分析方法，能有效分離高頻成分與低頻成分，進而可提高降雨—逕流歷程模擬之精確度。

應用小波轉換於水文時間序列之分析，存在著分解層數如何確定之問題。小波分解具有越往較低分辨層進行分解，則近似訊號與細節訊號之平滑性與平穩性也越好之特性。但由於在分解過程中必然會產生計算誤差，因此分解層數越多，誤差亦越大。所以，於選擇分解層數時，不宜過多也不宜過少。本研究在 WT-LPRM 中藉由實際檢定與驗證結果來判斷最合適之小波分解層

數，能解決分解層數如何確定之問題。

在 WD-LPRM 模式中，以小波消噪取代傅立葉級數，其結果於檢定及驗證方面均能獲致較佳之結果。此乃由於傅立葉級數分析方法之消噪技術僅適合於平穩水文時間序列之消噪。如暴雨、洪水與逕流等水文時間序列常為非平穩隨機過程，因而傅立葉消噪範圍有限。小波分析為一種多尺度分析方法，能有效分離高頻成分與低頻成分，並獲致比傅立葉分析更強之消噪效果。

本研究倡議之 WT-LPRM 及 WD-LPRM，雖然輸入與輸出之擾動項間假設為線性關係，但輸入與輸出之平滑季節平均值間之關係並未作任何假設。因為計算之輸出推估值是平滑季節平均值與擾動項之和或重構，因此，WT-LPRM 及 WD-LPRM 均為考慮季節平均值變化之非線性系統方法，適用於實際水文系統之非線性關係。而經應用於基隆河流域五堵上游集水區之日降雨—逕流歷程分析，研究結果顯示應用小波轉換及小波消噪，均可以有效地計算平滑之季節平均值及相對應之擾動項，進而提高降雨—逕流歷程模擬之精確度。

### 參考文獻

1. 王文聖、丁晶、李躍清：水文小波分析，中國化學工業出版社，2005。
2. 王如意、王志雄：「小波複解析法之理論解析及其應用於淡水河感潮河段水位—流量率定曲線之修正」，台灣水利，第 46 卷第 4 期，1-21 頁，1998。
3. 王如意、李宗穆：「小波分析方法應用於坡地集水區水文模擬之研究」，台灣水利，第 45 卷第 4 期，1-23 頁，1997。
4. 王仲民、戴士杰、岳宏：「基於小波變換的信號消噪」，河北工業大學學報，第 29 卷第 5 期，48-51 頁，2000。
5. 李賢彬、丁晶、李后強：「基於子波變換序列的人工神經網絡組合預測」，中國水利學報，第 2 期，1-4 頁，1999。
6. 林振山、鄭自旺：子波氣候診斷技術的研究，中國氣象出版社，1999。
7. 胡昌華、張軍波、夏軍：基於 Matlab 的系統分析與設計—小波分析，西安電子科技大學出版社，2000。
8. 魏永霞、王麗學：工程水文學，中國水利水電出版社，2005。
9. Bayazit, M. and H. Aksoy, "Using wavelets for data generation," *J. Appl. Statist.*, 28(2), 157-166, 2001.
10. Chou, C.M., "Efficient nonlinear modeling of rainfall-runoff process using wavelet compression," *Journal of Hydrology*, 332, 442- 455, 2007.
11. Daubechies, I., "Orthonormal bases of compactly supported wavelets," *Communication on Pure and Applied Mathematics*, 41(7), 909-996, 1988.
12. Donoho, D.H., "Denosing by soft-thresholding," *IEEE Transactions on inform theory*, 41(3), 613-617, 1995.
13. Grewal, M.S. and A.P. Andrews, *Kalman Filtering – Theory and Practice*, Prentice Hall, New Jersey, USA, 1993.
14. Labat, D., R. Ababou and A. Mangin, "Rainfall-runoff relations for karstic springs. Part II: continuous wavelet and discrete orthogonal multiresolution analyses," *Journal of Hydrology*, 238, 149-178, 2000.
15. Labat, D., "Recent advances in wavelet analyses: Part 1. A review of concepts," *Journal of Hydrology*, 314, 275-288, 2005.
16. Nash, J.E. and B.I. Barsi, "A hybrid model for flow forecasting on large catchments," *Journal of Hydrology*, 65, 125-137, 1983.
17. Partal, T. and Ö. Kişi, "Wavelet and neuro-fuzzy conjunction model for precipitation forecasting," *Journal of Hydrology*, 342, 199-212, 2007.

收稿日期：民國 99 年 3 月 31 日

修正日期：民國 99 年 5 月 31 日

接受日期：民國 99 年 6 月 4 日