# 根力模式與含根土壤剪力強度增量之研究

## The Study of the Root Strength Models and the Shear Strength Increment on the Soil-Root System

Hsin-Wan Yu	Chu-hui Chen	Ray-Shyan Wu	Hsin-Ting Chen
游新旺*	陳主愿	吳 瑞 賢	陳 秀 婷
副教授	教授	教授	博士班
土木工程系	土木工程系	土木工程系	土木工程系
中國科技大學	中國科技大學	國立中央大學	國立中央大學

### 摘 要

根力模式將土壤之剪力強度增量視為根在力學上之加勁行為,根之埋置長度與 剪力帶厚度變化將影響含根土壤之剪力強度。本研究依據大麥及松樹根之彈性變 形、斷裂現象及根與土壤間握裹滑移作用等力學行為,建立含根土壤之根力模式, 探討根系對土壤剪力強度增量之影響。研究中發現,考慮實際錨錠機制所增加之根 埋置長度,在土-根握裏強度低時,可提高含根土壤之剪力強度增量及其位移-抗剪應 力增量關係之初期勁度,但在握裏強度高時,根之埋置長度增加,對含根土壤之剪 力強度增量貢獻不大。另對於剪力帶厚度之研究,本研究模擬剪力帶厚度與土壤側 向位移關係分別為常數、線性及二次曲線,探討剪力帶厚度變化對土壤剪力強度增 量之影響,分析結果顯示,合理的剪力帶發展機制模擬,確可改善剪力帶厚度為定 値之缺點。

**關鍵詞**:根力模式,剪力強度,剪力帶,錨錠。

#### ABSTRACT

The shear strength increment of the soil is taken as the reinforcement on root mechanism in the root-strength models, and different root embedment lengths and shear zone thicknesses may influence the shear strength of rooted soil. An analytical model responds to the loading of root stretching, root breaking, and soil-root slipping is established in this study to discuss how the root systems influence the increment of the shear strength of the pine and barley rooted soil. It is found that the larger root embedment length according to actual anchoring mechanism did improve the soil shear strength increment

<sup>\*</sup>通訊作者,中國科技大學土木系副教授,11695 北市興隆路3段56號,yuthin@cute.edu.tw

and the initial stiffness in the displacement- shear stress increment curves at the low bond strength of root, but has a slight effect on the shear strength increment by increasing the root embedment length at the high bond strength of root. We also simulated the shear zone thickness versus lateral displacement with different approaches in constant, linear, and quadratic relation as the shear stress progresses to investigate the relation between the thickness of the shear zone and the corresponding shear strength increment of the soil. The results showed that with reasonable simulation for the shear zone development mechanism is able to improve the defects on assuming constant shear zone thickness.

Keywords: Root strength model, Shear strength, Shear zone, Anchored.



植生對土壤抗剪應力之影響,Waldron 等人 (1977, 1981)提出根力模式,將抗剪應力增量視為 根在力學上之加勁行為,考慮根之應力與應變關 係、根與土壤界面間之應力傳遞及根之斷裂強度 等力學行為,探討植根對土壤剪力強度增量之影 響。國內學者林信輝等人(2005)採用本土性優勢 植物九芎(Lagerstroemia subcostata)植生木椿,逐 月調查植生木樁之萌芽率與生長狀況,並進行根 系力學特性試驗配合根力模式理論,尋求含根土 壤剪力強度增量,提供了本土崩塌地植生土壤抗 剪強度預測之系列推估方法。林德貴等人(2006) 則配合根力模式提出數值模式分析程序,模擬室 內及現地根系力學試驗之邊界條件,推究含根土 壤之應力行為及變形模式,提高了根系模擬之真 實度。馬國宸等人(2006)利用吳正雄(1990)「植生 根力與坡面穩定關係之研究」中,以台灣杉 (Taiwania cryptomerioides) 及 山 黃 麻 (Trema orientalis)所作根系力學的分析結果為基礎,探討 飽和及不飽和土壤邊坡在不同深度下之穩定性 分析。由於學者們對根力模式之接續研究,使得 植根對土壤剪力強度增量之計算,呈現明朗而具 體化。

對於不同根系結構之模擬,Wu 等人(1988) 假設根系由垂直主根與兩個側向支根組成,盡可 能模擬根系之真實力學行為;Denis 等人(2000) 則模擬不同根系結構配合實驗量測數據,提出根 系埋置長度及側向支根數的增加,將使土-根界面 之握裹強度(the strength of the soil-root bond)亦隨 之增加: Dupuy 等人(2005)則取根系直徑、側向 支根數目、支根分佈角度及土壤凝聚力等為變 數,以二維有限元素分析,決定根在土壤中抗拉 強度之影響參數。綜上所述,土-根界面間之握裹 強度將受根系是否具有根毛、側向支根數及支根 分佈角度等不同根系結構所影響。本研究將引用 Waldron 等人(1977, 1981)對大麥(Barley, Hordeum vulgare)及松樹(Pine, Pinus ponderosa)含根土壤 在飽和狀態下所作試驗試體之分析資料,取理想 根系為垂直主根段,配合不同土-根界面握裏強度 模擬大麥及松樹之根系結構。

對於剪力帶厚度之決定,Abe and Ziemer (1991)提出不同根-土面積比,在側移過程中對剪 力帶厚度變化有顯著影響,認為剪力帶厚度將隨 側向位移量之增加而增加,Waldron and Dakessian (1981)曾對不同剪力帶厚度假設,探討含根土壤 之側向位移與抗剪應力增量關係,其研究中亦認 為實際土壤在受剪過程中剪力帶厚度並不會維 持常數。周正旻等人(2007)在五節芒(Miscanthus floridulus)含根土壤試體之側向位移過程觀測根 之變形發展,發覺側向位移量增加將使根受擾動 之總長度亦隨之增加,且在其側移與剪力帶厚度 變化關係圖中顯示側向位移量的增加,剪力帶厚 度增量變化有逐漸變緩的趨勢。本研究將依據不 同根面積比修正剪力帶之厚度,另在含根土壤受 剪過程初期,模擬剪力帶厚度與側向位移關係分



圖 1 剪力帶厚度 Z 範圍內根之位移變化及受力狀況(參考自 Waldron, 1977)

別為常數、線性及二次曲線變化,探討不同土-根界面握裏強度下,含根土壤之側向位移與剪應 力增量之關係。研究之目的在於探討根之錨錠 (the anchorage of roots)與剪力帶厚度等根系變形 發展機制的改變,對含根土壤剪力強度評估之影 響,並提出根對土壤抗剪應力增量計算之分析程 序,期能提供植生力學分析之參考。

### 二、植生土壤剪力強度增量之探討

#### 2.1 土壤剪力強度增量公式

Waldron 等人(1977, 1981)假設實根垂直於 剪斷面且錨錠於剪力帶上、下兩側之土壤中,提 出根因變形受力、根斷裂之拉力強度(tensile strength)及根與土壤間之握裹傳遞等力學行爲對 土壤剪力強度增量之影響。其中土壤因受剪產生 側向位移,造成剪力帶厚度Z範圍內根之位移變 化及受力狀況,如圖1所示。

當根因側移承受拉力時,其對土壤抗剪力增 量除了受根之直接拉力影響外,土壤亦將因根變 形承受正向壓力而增加摩擦力,故根系中直徑屬 於第 i 級之單根因土壤側向位移所增加之抗剪力 增量表示如下。

$$\delta = \sin \beta + \cos \beta \tan \phi' \dots (2)$$

式中:

 $\Delta V_i$  為直徑屬於第i 級之單根所提供之抗剪力 增量 $(g_f)$ 。



- δ 爲根剪力增量之位移係數。
- δ T<sub>i</sub> 為直徑屬於第 i 級之單根受剪側移
   後,因變形所承受之拉應力(g<sub>f</sub>/cm<sup>2</sup>)。
- $a_{ri} = \pi d_i^2 / 4$  為直徑屬於第 i 級之單根截面積 ( $cm^2$ )。
- d<sub>i</sub> 爲根系中根徑屬於第 i 級之根直徑(cm)。
- β 為根在剪力帶厚度範圍因側向位移所產 生之傾斜角。
- φ′ 為含根土壤之有效摩擦角。

經由直接拉力試驗及資料之數值處理後,取 根之彈性係數與直徑成指數關係如下(Operstein and Frydman, 2000; Fan and Su, 2008):

式中: E<sub>i</sub> 為直徑屬於第 i 級之根彈性係數(g<sub>f</sub>/cm<sup>2</sup>)。 a,b 為經由迴歸分析所取得之參數。

假設根與剪斷面垂直,圖 2 說明根將因土壤 側移而變形產生張應力,由於根在土壤發生側向 位移初期,其剪斷面向上、下兩側土-根界面之應 力傳遞長度(transmission length)為變量,且隨著 側向位移量( $\Delta$ )之增加,其應力傳遞長度亦隨之增 加。Waldron and Dakessian (1981)和 Fan and Su (2008)均假設由剪斷面向上及向下兩側之應力傳 遞長度各為 l/2,且在傳遞長度內根與土壤間各點 之握裹應力(shear bond stress)  $\tau$ 均等於握裹強度 (shear bond strength)  $\tau'$ ,如圖 2 所示,則該根系 在握裹應力作用下,根位於 N 點之拉應力  $T_i$ 為:

- 式中:au' 為根與土壤界面間之握裏強度,即最 大握裏應力 $(g_f/cm^2)$ 。
  - 1 為剪斷面向上及向下兩側之應力傳遞 長度總和(cm)。

當土-根界面握裏強度為常數時,根內部應 力由兩端 M, Q 至 N 點之應力大小呈線性分佈。 令應力傳遞長度兩端 M, Q 之長為 l,當根在產生 側移至斷裂之前,其應力-應變關係假設在彈性 範圍且滿足虎克定理(Van Beek 等人,2005),則 其平均拉應力 T 與剪斷面下方 N 點之拉應力(T<sub>i</sub>) 可計算如下:

$$T_i = 2T$$
 .....(5.b)

- 式中: $\overline{T}$ 為直徑屬於第i級之單根位於M, Q兩點間拉應力的平均值 $(g_f/cm^2)$ 。
  - Z 爲剪力帶厚度(cm)。
  - Δl 為根因側移受拉之伸長量(cm)。

將式(4)及式(5)相乘可消去變數 *l*,得到根在 彈性範圍內,對應於握裹及伸長變形下,根位於 剪斷面處之拉應力値(*T<sub>i</sub>*)表示如下(Waldron and Dakessian, 1981; Fan and Su, 2008):

在經由直徑量測、拉力試驗及資料之數值處 理後,文獻顯示根之斷裂強度(rupture strength, Tei) 與直徑(d<sub>i</sub>)呈指數關係(Operstein and Frydman, 2000; Tosi, 2006; Fan and Su, 2008),另對於根長 度(L)與直徑(d)關係, Waldron and Dakessian (1981)亦建議呈成指數關係,則根達斷裂之拉力 強度、長度與直徑的關係式表示如下:

 $T_{F,i} = c_1 d_i^f \tag{7}$ 

 $L_i = Rd_i^g \tag{8}$ 

- 式中: $T_{F,i}$  為直徑屬於第 i 級之單根達斷裂 之拉力強度 $(g_f/cm^2)$ 。
  - $L_i$  爲根之長度(cm)。
  - c1, f, r, g 為經由迴歸分析所取得之參數。

定義根直徑  $d_i$ 達斷裂之拉力強度  $T_{Ei}$ 所需最 小埋置長度(the embedment length of stressed root required to mobilize  $T_{Ei}$ )為錯錠長度,則根徑  $d_i$ 欲 達斷裂所需埋置長度  $l_{di}$ 表示如下:

$$l_{d,i} = \frac{T_{F,i}d_i}{4\tau} \tag{9}$$

式中: $l_{d,i}$  為根達斷裂所需埋置長度,即錨錠長度(cm)。

若剪斷面以下根埋置長度 L<sub>1,i</sub>小於錨錠長度 I<sub>di</sub>,則在持續側移過程中,該根系將在應力達到 斷裂強度之前即產生握裹滑移,此時根系對應於 滑移之應力(T<sub>slipi</sub>)表示如下:

$$T_{slip,i} = \frac{2\tau' L_i}{d_i} \tag{10}$$

式中: *T<sub>slip,i</sub>* 為根徑第 i 級單根在土-根間產生滑 移時,根之拉力強度(*g<sub>f</sub>/cm<sup>2</sup>*)。

若剪斷面上、下埋置長度 L<sub>i</sub>/2 均大於錨錠 所需長度 l<sub>d,i</sub> 時,則根徑 d<sub>i</sub> 在滑移前將產生斷 裂。考慮根與土壤間因側移變形受力、握裹滑移 及根斷裂時,根系中直徑 d<sub>i</sub> 之根拉應力計算値 T<sub>i</sub><sup>a</sup>,定義如下:

當 $T_i < T_{F,i}$ 時,  $T_i^a = \min(T_i, T_{slip,i})$ ......(11.a)

當 $T_i \ge T_{F,i}$ 時,  $T_i^a = 0$  .....(11.b)

式中: $T_i^a$  為根徑第i級之根拉應力計算值( $g_f/cm^2$ )。

經由式(11)取得根拉應力計算值 $T_i^a$ 後,即可 得到直徑屬於第 i 級單根對土壤之抗剪應力增量 ( $\Delta S_i$ )的貢獻如下式表示:

- 式中: A。 爲剪斷面處之土壤截面積(cm<sup>2</sup>)。
  - $\Delta S_i$  為根徑第i級單根提供土壤之抗剪應 力增量 $(g_f/cm^2)$ 。

則根系中所有等級之根對受剪試體之土壤所提 供的抗剪應力增量公式如下:

- 式中: n<sub>i</sub> 為對應於根徑屬於第 i 級的根數量。 i(=1~m) 為根徑之等級,根系中根徑共 分 m 個等級。
  - $\Delta S$  為根提供土壤之抗剪應力增量 $(g_f / cm^2)$ 。

### 2.2 修正之根力模式

林德貴等人(2006)針對含根土壤在不同邊界 條件模擬得到根、土之不同變形模式,分析結果 認為根系之分佈狀況對土壤剪力強度增量有不 同評估值,且愈接近根實際生長型態之數值模 擬,其分析成果與試驗結果之吻合度愈高。本研 究將模擬含根土壤產生滑移時,根系之實際錨錠 行為及剪力帶厚度範圍內根之實際側向位移變 化,尋求植根對土壤抗剪應力增量之影響。

由於含根土壤承受剪力過程,其根與土壤間 之接觸剪應力 $\tau$ ,於受剪初期並非沿握裹長度範 圍內各點均達握裏強度 $\tau'$ 值,即其剪應力大小之 分佈並不為常數;另十-根界面之應力傳遞長度, 並非一開始即達到根錨錠所需埋置長度*l*<sub>4</sub>,或根 實際埋置長度(L<sub>1</sub>,或L<sub>2</sub>,),且將隨著側向位移之 增加而逐漸增加。因此式(4)及式(5)中,根受拉之 應力傳遞總長度l並不容易決定, Waldron and Dakessian (1981)為解決此項困擾,乃假設根和土 壤界面間各點之接觸剪應力於受剪初始狀態即 達握裏強度  $\tau'$ ,並將式(4)及式(5)相乘消去變數 l 得到式(6),以解決含根土壤在受剪過程中,土-根界面之實際應力傳遞長度不易決定之困擾。本 研究將就土-根界面間之應力傳遞行為、錯錠機制 及剪力帶厚度變化,探討大麥及松樹根系對土壤 剪力強度增量之影響。



圖 3 錨錠機制與埋置長度關係之假設

2.2.1 根之錨錠

若所有根皆等分於剪斷面上、下兩側,則在 此假設下其所選植物樣本之所有根長度均已達 到剪斷面以下,此時將高估剪斷面處實際受剪之 根數目,同時將忽略剪斷面以上根、莖相接處之 根頸(root collar)及其側向支根協助錨錠之功用及 低估剪斷面以下深根系植物根之實際埋置長 度,由於Waldron and Dakessian (1981)文獻之根 力模式具有以上不合乎實際之假設。本研究則依 據一般根系具有根頸及其側向支根協助錨定之 實際狀況,重新推導根力模式,並就以下三種情 形,探討根在土壤不同埋置狀況,對含根土壤剪 力強度增量評估之影響,以了解根系受剪下之力 學行為。

- 就實際根系之長度配置,考慮根頸及其側 向支根協助錨錠,剪斷面以上根實際埋置 長度為 L<sub>2</sub>,且已達錨錠要求,則剪斷面以 下根埋置長度 L<sub>1</sub> = L - L<sub>2</sub>,如圖 3(a)。
- 取剪斷面上、下兩側根之埋置長度相等, 即 L<sub>1</sub> = L<sub>2</sub> = L/2,如圖 3(b),然此假設並非 實際的剪斷面位置。
- 考慮根頸及其側向支根協助錨錠,剪斷面 以上根埋置長度為L<sub>2</sub>,且已達錨錠要求, 剪斷面下根埋置長度取L<sub>1</sub> = L/2,如圖 3(c)。

假設扣除根頸長度後,剪斷面上側根之有效 埋置長度為L<sub>2</sub>,當剪斷面上、下試體產生相對側



圖 4 根因 側移受力之外力與内力關係自由體圖

向位移,則土-根界面間之握裹強度與根內力關 係如圖 4。

再者,如圖 4(a),若不考慮根之斷裂現象, 當剪力帶土壤之側向位移量持續增加時,根徑第 *i*級之根位於剪斷面兩側土-根界面的應力傳遞長 度將分別達到埋置長度 *L*<sub>1,i</sub>與 *L*<sub>2,i</sub>。此時,參考圖 4(b)所示,根總伸長量公式推導如下:

式中: $\Delta L_i$  為根之總伸長量(cm)。

 $L_{1,i}$  為根位於剪斷面下之埋置長度(cm)。  $L_{2,i}$  為根位於剪斷面上之埋置長度(cm)。

如圖 4(b)所示,取剪斷面以下之根段為自由 體,由力平衡可得該根段位於剪斷面處之截面所 承受內力 *F*<sub>i</sub>。

 $F_i = \tau' \pi \ d_i L_{1,i}$  .....(15)

式中: F<sub>i</sub> 為根徑第 i 級位於剪斷面處單根所承 受的內力(g<sub>f</sub>)。 消去式(14)及式(15)之變數τ',可得到根在彈性 範圍內,對應於伸長變形下拉應力值 T<sub>i</sub>可表示 如下:

$$T_{i} = \frac{F_{i}}{a_{ri}} = E_{i} \left( \frac{Z}{\cos \beta} - Z \right) \left( \frac{2L_{1,i}}{L_{1,i}^{2} + 2L_{1,i}L_{2,i} - L_{2,i}^{2}} \right)$$
.....(16)

同理,如圖 4(b)所示,該根系在握裏強度作用下, 位於剪斷面處之根拉應力 T<sub>i</sub>為:

將式(16)及式(17)相乘,可得到根在彈性範圍內位 於剪斷面處拉應力之上限值 T<sub>i</sub>。

其中修正因子λ 以下式表示:

$$\lambda = \left(\frac{2}{1 + 2(L_{1,i} / L_{2,i})^{-1} - (L_{1,i} / L_{2,i})^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (19)$$

基於 Waldron 等人對於土-根界面間握裹 **強度之傳遞行為,係假設傳遞長度將隨著側向** 位移量之增加而沿剪斷面下方及上方等量增加  $(l_1 = l_2)$ 。當剪斷面下方根埋置長度 $L_{1i}$ 大於上方 根埋置長度 L<sub>2,i</sub>,若根與土壤間未產生滑移或根 斷裂,則剪斷面上方之握裹傳遞長度L將先達到  $L_{2i}$ ,之後,隨著側向位移的增加,根之內力將由 根頸及其側向支根等協助支撐,然剪斷面下方土 -根界面應力傳遞長度 l<sub>1</sub> 則隨側向位移量之增加 而繼續向下延伸,若發生斷裂則式(19)之 L<sub>1</sub> = L<sub>di</sub>, 若產生滑移則取式(19)之 L<sub>1i</sub> = L<sub>i</sub> - L<sub>2i</sub>。此 時,因應力傳遞達到之長度L<sub>1</sub>>L<sub>2i</sub>,故修正因 子 λ >1;但當剪斷面下方根埋置長度 L<sub>1.i</sub>小於上 方根埋置長度 L<sub>2i</sub>時,等量增加之上、下應力傳 遞長度將先達 L1,i 而產滑移,根頸及其側向支根 並未發揮協助支撐之功能,此時根系之受力行為 將與 Waldron 等人假設相同,取修正因子 $\lambda = 1$ 。



圖 5 不同  $L_{1,i}/L_{2,i}$ 比值對修正因子 $\lambda$ 之影響

今考慮根頸及其側向支根等具有協助錨錠 功能之情形,在 $L_{1,i} > L_{2,i}$ 前提下,探討剪斷面兩 側不同埋置長度 $L_{1,i} \supset L_{2,i}$ 長度比值對修正因子 $\lambda$ 之影響如圖 5 所示。

2.2.2 剪力帶厚度

Waldron and Dakessian (1981)取不同剪力帶 厚度,在土-根界面握裹強度  $\tau' = 25g_f/cm^2$  情形 下,探討松樹之側向位移與含根土壤之抗剪應力 增量關係,該文獻中分別取剪力帶厚度 Z = 0.2, 0.5, 1.0 及 2.0 cm,所得結果認為,不同剪力帶厚 度 Z 雖然對載重位移之初期勁度有甚大之影響, 但對於含根土壤之剪力強度增量的影響則不 大。因此該文獻對於松樹或大麥在受剪過程中均 假設剪力帶厚度維持定値,取 Z = 0.5 cm,並未 探討根-土間面積比及側向位移增加對剪力帶厚 度變化之影響,此與含根土壤之實際受剪行爲顯 然不符。根據 Ekanayake and Phillips (1999)取松 樹等之現地實驗,得到含根土壤最大抗剪應力所 對應之側向位移量之經驗公式如下:

$$\Delta_{RP} = 0.072 \frac{A_r}{A_s} \times 10^4 + 1.33 \dots (20)$$

- 式中: $\Delta_{RP}$  為含根土壤達最大抗剪應力所對應 之位移(cm)。
  - Ar 為剪斷面處根之總斷面積(cm<sup>2</sup>)。

針對每一個植生試體之根面積比( $A_{dA}$ )可得 到含根土壤最大抗剪應力所對應之位移 $\Delta_{RP}$ ,且根 在滑移過程中,剪力帶厚度 Z 將隨著側向位移量  $\Delta$ 的增加而增大(Abe and Ziemer, 1991)。另根據 Waldron and Dakessian (1981)與林信輝(2005)研 究,當土壤摩擦角在 $\phi' = 30°$ 時,根側移至傾斜 角 $\beta$ 約在 60°左右,可得到含根土壤最大剪力增 量之位移係數 $\delta$ 。假設含根土壤最大抗剪力增量 所對應之側向位移量等於含根土壤最大抗剪力 所對應之側向位移量時,取 $\beta = 60°$ 代入以下公 式,得到含根土壤達最大抗剪應力增量時所對應 之剪力帶厚度  $Z_{RP}$ 。

式中:*Z*<sup>RP</sup>為含根土壤達最大抗剪應力增量所對應 之剪力帶厚度(*cm*)。

在側向位移Δ未達最大抗剪應力增量所對應 側向位移Δ<sub>RP</sub>之前,假設剪力帶厚度 Z 與側向位 移Δ之關係分別為線性及二次曲線。

當側向位移 $\Delta < \Delta_{RP}$ 時,剪力帶厚度與側向位 移關係呈線性時:

$$Z = Z_{RP} \times \frac{\Delta}{\Delta_{RP}} \quad for \quad \Delta \le \Delta_{RP} \quad \dots \dots \quad (23.a)$$

當側向位移 $\Delta < \Delta_{RP}$ 時,剪力帶厚度與側向位移關 係呈二次曲線時:

 $Z = Z_{RP}$  for  $\Delta > \Delta_{RP}$  .....(24.b)

今取剪力帶厚度 Z = 0.5 cm 與式(23)及式(24) 相比較,繪製側向位移增加時,剪力帶厚度變化 歷程如圖 6 所示。



圖 6 剪力帶厚度 Z 與側向位移Δ關係之模擬

依據 Waldron and Dakessian (1981)所取大麥 及松樹含根試驗試體之根面積比代入式(20)及 式(22),可得到大麥及松樹含根土壤達最大抗剪 應力增量之剪力帶厚度 Z<sub>RP</sub>。再經由式(23)及式 (24)計算,可得不同側向位移所對應之剪力帶厚 度值 Z。

2.2.3 求解程序

對於含根土壤剪力強度增量評估,本研究將 就植根土壤之根錨錠機制、埋置長度及剪力帶厚 度改變分別探討含根土壤之剪力強度增量,其 求解程序大致可分為下列九個步驟。

- 1. 選取含根土壤之側向位移值 $\Delta$  (初始値假設  $\Delta = 0$ )。
- 計算直徑屬於第 i 級之根彈性係數 E<sub>i</sub>,根斷 裂強度 T<sub>F,i</sub>,根總長度 L<sub>i</sub>,土-根產生握裹 滑移之根抗拉應力 T<sub>slip,i</sub>及根產生斷裂所需 根最小埋置長度 l<sub>di</sub>。
- 針對不同側向位移Δ及剪力帶厚度 Z,依據 式(2)計算根之剪力增量係數δ。
- 依據根徑 d<sub>i</sub> 位於剪斷面上、下不同入土埋 置長度 L<sub>1,i</sub> 及 L<sub>2,i</sub>,計算根拉應力修正因子λ 及拉應力 T<sub>i</sub>。
- 5. 由式(11), 求根之拉應力計算值 $T_i^a$ 。
- 由式(12),計算直徑 d<sub>i</sub>之單根對土壤之抗剪 應力增量ΔS<sub>i</sub>。
- 7. 重覆步驟 1-6, 達根徑等級數 m 次。
- 經由式(13)計算根系組合中,所有根對應於 選取側向位移之土壤抗剪應力增量ΔS。

表1 拉力試驗取得根力模式分析所需參數

參數符號	大麥	松樹
試驗根數 n1	56	44
а	$8.32\times10^3$	$5.88\times10^{5}$
b	-1.21	-0.389
試驗根數 n2	65	49
$C_1$	$7.85  imes 10^3$	$6.89  imes 10^4$
f	-0.944	-0.116

9. 改變側向位移 $\Delta = \Delta + d\Delta$  (取  $d\Delta = 0.1 cm$ ), 重覆步驟 1-8。

#### 2.2.4 輸入參數

Waldron and Dakessian (1981)將大麥種植在 一個直徑為 0.10 m,長度 0.61 m 盛裝黏土層的塑 膠試驗箱內,生長 10 週後進行直接剪力試驗; 另將松樹幼苗種植於黏質壤土 52 個月後,移植 盛裝於斷面直徑為 0.25m 的試驗箱內,於飽和狀 態下進行直接剪力試驗。另取大麥根數 56 支與 松樹根數 44 支作直徑、長度量測及拉伸試驗後, 經由統計迴歸分析得到根力模式所需參數列於 表 1。同理,得到式(8)之參數大麥根系 R = 200, g = 0.5; 松樹根系 R = 500, g = 1.0。在相同種植 環境下,另取大麥根系總數 139 支與松樹根系總 數 144 支作根徑分佈分析,結果如圖 7 所示。

取相同生長條件下之大麥土壤試體,在距離試體頂面下深度 30 cm 處(即剪斷面)以每分鐘 2.5 mm 之剪位移速率,進行直接剪力試驗,並於直剪試驗完成後,計算剪斷面處大麥之總根數





N = 71。另取松樹土壤試體,在距離試體深度 0.3 m 處,以每分鐘 2.7 mm 剪位移速率進行直接 剪力試驗,同樣於直剪試驗完成後計算剪斷面處 松樹之總根數 N = 27,對於大麥及松樹土壤試體 經由直接剪力試驗後,得其含根土壤之位移-剪 應力增量之關係曲線,如圖 10。

在根與土壤間之握裏拉力試驗中,Waldron and Dakessian (1981)對於直立不含根毛(root hairs)之飽和土壤,得到土-根界面之握裏強度  $\tau' = 20 g_f/cm^2$ ,Stolzy and Barley (1968)對於含根 毛之飽和土壤之握裏拉力試驗,得到土-根界面之 握裏強度 $\tau' = 100 g_f/cm^2$ ,不飽和土壤之土-根界 面握裏強度則可達到 $\tau' = 600 g_f/cm^2$ 。本研究於 理論分析中將取握裏強度分別為 $\tau' = 25 g_f/cm^2$ 、  $\tau' = 100 g_f/cm^2$ 和 $\tau' = 200 g_f/cm^2$ ,模擬大麥及松 樹之根系結構,並與Waldron and Dakessian (1981) 在飽合狀態下所作大麥及松樹含根土壤試體之 試驗資料作比較。

### 三、分析結果與討論

Waldron and Dakessian (1981)之分析模式, 係假設剪斷面上、下根系埋置長度均為 L<sub>i</sub>/2,與 實際根在土壤內之埋置情形並不符。本文首先取 根數 n = 1 支,在改變土-根界面握裏強度及埋置 長度條件下,探討含根土壤側向位移與抗剪應力 增量關係:另為與 Waldron and Dakessian 之分析 結果進行比較,研究中假設大麥或松樹根系在剪 斷面處之根數均與其試驗試體之根數相同,並就 土-根界面握裏強度、埋置長度與剪力帶厚度改 變,探討含根土壤之剪力強度增量評估。

#### 3.1 土壤與根間握裹強度及根埋置長度之影響

圖 8 假設土-根界面之握裹強度分別為 τ′=  $25g_f/cm^2 \sim \tau' = 100 g_f/cm^2 \pi \tau' = 200 g_f/cm^2$ , U 松樹根直徑  $d_i = 0.25 \ cm$  之根系為例,依據根力 模式理論,探討剪斷面以下不同根的埋置長度 L1. 對植生土壤剪力強度增量之影響。若根系在 土-根界面握裏強度  $\tau' = 200 g_f / cm^2$ ,圖 8(a)顯示 該根系在埋置長度 Lu≥50 cm 時會產生斷裂;同 理,若土-根界面握裏強度  $\tau' = 100 g_f/cm^2$ 時,圖 8(b)顯示該根系在埋置長度 Lu≥100 cm 時,亦會 有斷裂發生。又圖 8(a)及圖 8(b)均說明,當根對 植生土壤之剪力強度增量係由彈性變形與斷裂 破壞所控制時,根埋置長度 L 的增加對植生土 壤剪力強度增量之貢獻不大,此係因根在不滑移 月斷裂發生之前,根之拉應力T,值係由根之彈性 伸長變形所控制之故。圖 8(c)則發現,當根與土 壤之裹強度  $\tau' = 25 g_f / cm^2$ 時,該根系之根在土壤 中沒有斷裂現象,根對植生土壤之剪力強度增量 係由彈性變形與滑移破壞所控制,此時,含根土 壤之剪力強度增量將受剪斷面以下根埋置長度 L1之增加而增加。

當剪斷面以上根之根頸、側向支根及埋置 長度等機制已達錨錠要求,則含根土壤抗剪應 力增量將由剪斷面以下根埋置長度所控制。



圖 8 改變土-根界面握裹強度,探討植生土壤在不 同埋置長度下土壤側向位移與抗剪應力增量 關係

圖 9 松樹根直徑  $d_i = 0.25 \ cm$  之根系, 假設位於 剪斷面以上部份已達錨錠要求,今改變剪斷面 以下根之埋置長度,探討含根土壤在不同握裹 強度下,土壤側向位移與剪應力增量關係。當 剪斷面以下根之埋置長度  $L_{1,i} \ge l_{d_i}$ 時, 隨著土 壤側向位移的增加,根會有斷裂現象發生,此 時土-根界面握裹強度增加,並不會使含根土壤 之抗剪應力增量增加,反而會使剪斷面下方土-根界面之應力傳遞長度」提早到達錨錠所對應 埋置長度 l<sub>di</sub>, 而致根提早斷裂, 如圖 9(a)及圖 9(b)所示。當剪斷面以下根之埋置長度  $L_{1,i} < l_{d,i}$ 時,根系將產生滑移,隨著土-根界面握裏強度 變小,含根土壤剪力強度增量不但隨之變小, 且含根土壤最大抗剪應力增量所對應之側向位 移量(滑移點)亦提前到達,如圖 9(c)及圖 9(d) 所示。



圖 9 改變剪斷面以下根之埋置長度,探討植生土壤 在不同握裹強度下土壤側向位移與抗剪應力 增量關係

### 3.2 不同錨錠機制之比較

針對剪斷層上方根頸及其側向支根協助錨 錠及剪斷面下根埋置長度改變對土壤剪力強度 增量及位移-抗剪應力增量關係圖變化。圖 10 之 實例中將分別就圖 3(a)、3(b)及 3(c)三種情況, 作含根土壤剪力強度增量之評估及比較。

情況 1. 剪斷面以下根系埋置長度 L<sub>1,i</sub> = L<sub>i</sub> - L<sub>2,i</sub>,
 經由 Waldron and Dakessian (1981)的實驗試體觀察,其剪斷面在試體頂面下 30cm,在扣除根頸長度(假設 5 cm)後,
 取剪斷面以上根系埋置長度 L<sub>2,i</sub> = 25 cm。





- 情況 2. 取剪斷面上、下兩側,根系之埋置長度 均為 L<sub>i</sub>/2。
- 情況 3. 剪斷面以下根系埋置長度 L<sub>1,i</sub> = L<sub>i</sub>/2, 剪 斷面以上根系埋置長度取 L<sub>2,i</sub> = 25 cm。

經根力模式分析得圖 10(a),發現在  $\tau' = 25$  $g_f/cm^2$ 或  $\tau' = 200 g_f/cm^2$ 情況下,植生大麥之側向 位移與土壤抗剪應力增量關係,並未受剪斷面以 上根埋置長度  $L_{2,i}$ 分別取 25 cm 或  $L_i/2$  變化之影 響。其中,在  $\tau' = 25 g_f/cm^2$ 情況下,當根系產生 滑移之前,根應力受式(18)控制,由位移-抗剪應 力增量圖在位移靠近 1.7 cm 處,斜率逐漸變小, 可知有部份根系已產生滑移,但無斷裂現象; 另在側向位移大於 1.7 cm 以後,所有根系皆產 生滑移,故分析之抗剪應力增量趨向常數。在 τ'= 200 g<sub>f</sub>/cm<sup>2</sup>情況下,當側向位移小於 2.55 cm 時,根應力仍受式(18)控制,且根無斷裂現象; 另在側向位移大於 2.55cm 時,部份根系開始斷 裂,因而造成側向位移-土壤抗剪應力增量關係圖 呈鋸齒狀圖形。

本研究因假設大麥或松樹根系在剪斷面處 之總根數均與 Waldron and Dakessian (1981)所 取根數相同,其中大麥樣本之根徑 d;的對應長 度 L; 值經由式(8)之計算結果均小於 50 cm。 實 例中,情況1取剪斷面以下大麥根系埋置長度  $L_{1,i} = L_{i} - L_{2,i}$  見不得小於  $L_{i}/2$ ,此時圖 3 所敘述 三種情況之 $L_{1,i}$ 值均等於 $L_i/2$ ,因此直徑 $d_i$ 之根 產生滑移所對應於握裹之拉應力 T<sub>slin</sub>; 並未因 圖 3 之三種錨錠機制改變而有不同; 另對應於斷 裂之根抗拉強度  $T_{Fi}$ 則為根系直徑 d 函數,亦不 因錯錠機制改變而變化, 故圖 10(a)中顯示大麥 側向位移與土壤抗剪應力增量之關係,並不受剪 斷面以上根埋置長度 L, 改變的影響。又含根土 壤抗剪應力增量分析值與直接剪力試驗值在試 驗初期(即側向位移較小時)之位移-抗剪應力增 量圖不同,應係分析模式之剪力帶厚度假設為定 值所造成。

對於松樹根系含根土壤之側向位移與抗剪 應力增量關係中,在土-根界面握裏強度 $\tau'=25 g_f$  $/cm^2$ 時,若剪斷面以下根埋置長度  $L_1$ 相同,剪 斷面以上之根埋置長度 L2; 分別取情況 2 之 L/2 或情況3之錨錠長度25cm,圖10(b)顯示,在側 移-抗剪應力增量值關係圖中,針對同一側向位 移,情況3之抗剪應力增量值均大於情況2之對 應抗剪應力增量值,並使情況3較情況2提前到 達含根土壤之剪力強度增量平台,此乃根系於滑 動或斷裂前,根因側移伸長所產生之應力係由式 (18)所控制,其中情況3因L<sub>1</sub>/L<sub>2</sub>,值大於1,故 修正因子 $\lambda$  值亦大於 1 所造成; 又情況 1 取剪斷 面以下根段之埋置長度為 $L_{1i} = L_i - L_{2i}$ 目 $L_{2i} = 25$ cm,對松樹之長根系而言,埋置長度 L<sub>1,i</sub>值將增 加,使得根系因滑移所需握裹拉應力 T<sub>slin,i</sub>亦將增  $加,圖 10(b)
 顯示當側向位量\Delta = 5 cm 時,情況 1$ 松樹含根土壤之剪力強度增量達 $\Delta S = 81.7 g_f$  $/cm^2$ ,明顯大於剪斷面以下根段埋置長度取  $L_{1i}$ =

 $L_i/2$ 之情況 2 ( $\Delta S = 54.7 g_f / cm^2$ )及情況 3 ( $\Delta S = 55.9 g_f / cm^2$ )。故 Waldron and Dakessian (1981)根 力模式假設,將低估剪斷面以上根頸及側向支根 等機制協助錨錠之功用,及低估剪斷面以下根實 際埋置長度增長之貢獻。然 Waldron 等人之根力 模式係假設所有根均通過剪斷面(即剪斷面上、下 之根系埋置長度均為 $L_i/2$ ),將高估含根土壤受剪 斷面處之實際受剪根數;另對於松樹根系的土-根界面握裏強度,Waldron 等人並未就松樹根做 握裏試驗,而係直接給予定值,方使得其根力模 式對松樹植根土壤之剪力強度增量評估值在 $\tau'=$ 25  $g_f / cm^2$ 時,尙能得到與直接剪力試驗值相近的 分析結果。

當土-根界面握裏強度在 $\tau' = 200 g_f/cm^2$ 時, 根系達斷裂所對應埋置長度 lai 將變小。剪斷 面以上根段埋置長度L2,相同時,圖10(b)顯示, 改變剪斷面以下根段埋置長度 L1,(如情況1和 情況3),松樹根系之土壤剪力強度增量不變(ΔS  $= 127.5 g_{f} / cm^{2}$ ),乃因對本例所取松樹根系之 所有根而言, Waldron 等人所取  $L_{1,i} = L_{2,i} = L_i$ /2 與考慮實際錨錠狀況所取  $L_{1,i} = L_i - L_{2,i}$ , 剪 斷面以下根段埋置長度  $L_{1i}$  均已達到  $\tau' = 200 g_f$  $/cm^2$ 之對應錨錠長度 $l_{d,i}$ ,此時情況 1 和情況 3 之 Lui均等於 lai,故剪斷面以下根段埋置長度 改變並未影響式(18)之修正因子λ值;又當剪斷 面以下根段埋置長度L,相等時,圖10(b)情況2 及情況 3 顯示松樹根系對土壤剪力強度增量貢 獻,Waldron等人假設下之錨錠機制(情況2), 取  $L_{2,i}(=L_{1,i}) = L_i/2$  之剪力強度增量為S =125.0 gf /cm<sup>2</sup>。而考慮根頸等實際錨錠機制 (情況 3),取 L<sub>2,i</sub> = 25 cm 之剪力強度增量為  $\Delta S = 127.5 g_f / cm^2$ 。其中,情況3增加之剪力 強度增量,亦係來自於某些根系之 L<sub>1,i</sub> (=L<sub>i</sub> - $L_{2,i}$  或  $l_{d,i}$ )大於  $L_{2,i}$  (= 25 cm)時,情況 3 之修 正因子 $\lambda > 1$ ,而情況 2之修正因子 $\lambda = 1$ 之故。

由於同等級根系直徑 d<sub>i</sub>之不同根,在模式分 析中有關回歸公式之相關參數係以定值處理,故 對於根之材料性質如式(3)彈性係數 E<sub>i</sub>、式(7)斷裂 強度 T<sub>Ei</sub>及式(8)長度 L<sub>i</sub>等,在相同等級直徑下均 爲定值,導致同等級之不同根將在同一側向位移

量時,產生相同應力並同時斷裂;又對於另一等 級根系直徑之不同根,也將在另一側 向 位 移 量 時同時斷裂。方使得圖 10(a)及圖 10(b) 在  $\tau' = 200 g_f / cm^2$ 時,其含根土壤之側向位移-抗剪 應力增量關係之理論模式分析解呈現鋸齒狀。其 中圖 10(a)有 8 次滯動恰等於圖 7 大麥根系之根 徑等級數,圖 10(b)亦顯示有 8 次滯動,比圖 7 松樹根系之根徑等級數9個少,此在側向位移量 增加過程中,可能有兩個不同等級之根徑其斷裂 所對應之側向位移甚爲靠近,或某一根系根數太 少月太細使其根系斷裂對土壤剪應力增量影響 太小,而致兩次滯動之分開現象不明顯。另由圖 10 之位移-抗剪應力增量關係圖中發現,隨著側 向位移量之增加,位移-抗剪應力增量之關係曲線 漸趨緩和,此乃因側向位移增加時,某些根系在 土壤中將逐漸產生滑移或斷裂,使得根對土壤剪 力強度增量之貢獻逐漸減小。

#### 3.3 剪力帶厚度之影響

由於 Waldron and Dakessian (1981)所取大 麥及松樹之土壤試體,係在 $\tau' = 25 g_f/cm^2$ 情形及 剪斷面處之剪力帶厚度為定值條件下,探討不同 剪力帶厚度假設對含根土壤剪力強度增量之影 響。本研究分別就大麥及松樹根之根面積比 (Ar/As),依據 Ekanayake and Phillips (1999)文獻 所建議公式即式(20),可得到大麥及松樹根系達 最大抗剪應力增量時所對應之側向位移ΔRP分別 為 1.59 cm 及 2.53 cm, 並依據式(22)求得剪力帶 厚度 ZRP 分別為 0.92 cm 及 1.46 cm。當側向位移 未達最大抗剪應力增量時,分別考慮剪力帶厚度 Z與側向位移 $\Delta$ 呈線性與二次曲線關係,並假 設側向位移達到最大抗剪應力增量後,剪力帶厚 度 Z 維持常數。依據以上假設與 Waldron and Dakessian (1981)所取剪力帶厚度模擬值 Z = 0.5 cm 進行比較,並就不同剪力帶發展機制進行模 擬,探討對含根土壤受剪側移與抗剪應力增量關 係繪於圖 11。

由圖 11(a)及圖 11(b)發現,當側向位移Δ未 達Δ<sub>RP</sub>之前,假設剪力帶厚度 Z 與位移Δ之關係呈 線性(式(23))或二次曲線(式(24))變化,確能改善



圖 11 不同剪力帶厚度模擬對含根土壤剪應力增量 之影響

側向位移與抗剪應力增量關係中,初期勁度偏低 之缺點。其中又以剪力帶厚度與位移關係為線 性,且當側向位移Δ達到最大抗剪應力增量所對 應位移Δ&P後,剪力帶厚度 Z維持常數之模擬所 得位移-抗剪應力增量變化,最接近實驗結果。 當大麥及松樹根與土壤間握裏強度  $\tau' = 200 g_f/cm^2$ 時,由圖 11 植生土壤之位移-抗剪應力增量關係 圖中發現,考慮最大側向位移所修正之剪力帶厚 度,大麥之抗剪強度對應位移與抗剪強度由(2.8  $cm,94.0 g_f/cm^2$ )增加至(3.1  $cm,96.5 g_f/cm^2$ ),松樹 根則由(2.0  $cm,125.0 g_f/cm^2$ )增加至(2.6  $cm,129.0 g_f/cm^2$ )。故土-根界面握裏強度在  $\tau' = 200 g_f/cm^2$ 時,考慮最大側向位移所修正之剪力帶厚度,對 含根土壤有較高之最大抗剪應力增量評估值,同 時最大抗剪應力增量所對應之側向位移評估值 亦較大。

### 四、結論與建議

經由本研究之分析結果可得到以下結論:

- 本研究考慮剪斷面以上根頸及其側向支根協助錯錠情況下所推導之根力模式,當土-根界面握裹強度低時,在相同側向位移量下,可得到較高之含根土壤抗剪應力增量,進而使含根土壤在側移-抗剪應力增量關係圖中,提前到達含根土壤之剪力強度增量平台,並使側移-抗剪應力增量歷程之初期勁度較 Waldron and Dakessian 假設為大,分析結果亦較接近試驗之量測值。
- 2. 剪斷面以上根段之錨錠機制已達錨錠前提下,當土-根界面握裏強度低時,含根土壤剪力強度將由剪斷面以下根段之滑移行為所控制,此時,考慮根頸協助錨錠所增加剪斷面以下之根埋置長度,將增加根系對土壤之剪力強度增量:但在土-根界面握裏強度高時,由於剪斷面以下根與土壤界面之應力傳遞長度將很快達到錨錠長度而斷裂,此時埋置長度增加對含根土壤剪力強度增量貢獻不大,且將造成土壤達最大抗剪應力增量所對應之側向位移量變小。
- 3. 剪斷面以下根段埋置長度固定前提下,當土-根界面握裏強度低時,含根土壤剪力強度將由 滑移行為控制,考慮根頸協助錨錠而減小剪斷 面以上之根段長度,可提高如松樹等深根系含 根土壤之側向位移與抗剪應力增量歷程之初 期勁度,但對於剪力強度增量之影響有限;但

在土-根界面握裹強度高時,考慮根頸協助錨錠 而減小剪斷面以上之根段長度,對含根土壤剪 力強度增量貢獻及位移-抗剪應力關係歷程之 初期勁度改變均不明顯。

4. 在根力模式分析與試驗結果比較後,合理之剪 力帶發展機制模擬,確能改善含根土壤在側向 位移-抗剪應力增量歷程中,初期勁度評估偏低 的缺點。

### 誌 謝

本文承國科會 96-2221-E-163-002 給予經費 支持,使得本文得以順利完成,特此致謝。

### 參考文獻

- 吳正雄,「崩塌地草本植物根力特性之研究」 中華水土保持學報,第二十一卷,第一期, 第47-54頁,(1990)。
- 林信輝、楊宏達、陳意昌,「九芎植生木椿 之生長與根系力學之研究」,中華水土保持 學報,第三十六卷,第二期,第123-132頁, (2005)。
- 林德貴、黃伯舜、林信輝,「土-根系統之力 學模式及試驗分析」,中華水土保持學報, 第三十七卷,第二期,第157-172頁,(2006)。
- 周正旻、游新旺、陳主惠,「五節芒根錨錠 機制對含根土壤剪力帶厚度變化之試驗研 究」,第十六屆水利工程研討會,第1243-1250 頁,(2007)。
- 5. 馬國宸,李奕達,陳主惠,譚義績,「生態 工程中植生根系對飽和-未飽和邊坡穩定影響 之模式分析」,農業工程學報,第五十二卷, 第二期,第 30-45 頁,(2006)。
- Abe, K. and Ziemer, R. R., "Effect of Tree Roots on a Shear Zone: Modeling Reinforced Shear Stress," *Canadian Journal of Forest Research 21*, pp. 1012-1019, (1991).
- Denis, S., Bremand, F. and Herbert, Y., "An Experimental Study on the Mechanical Behavior of the Maize Root System: Analysis of the Soil/Root Bond and Determination of Rigidity

Modulus," *The Supporting Roots of Trees and Woody Plants: Form, Function and Physiology,* pp. 295-304, Kluwer Academic Publishers, (2000).

- Dupuy, L., Fourcaud, T. and Stokes, A., "A Numerical Investigation into Factors Affecting the Anchorage of Roots in Tension," *European Journal of Soil Science*, 56, pp. 319-327, (2005).
- Ekanayake, J. C. and Phillips, C. J., "A Method for Stability Analysis of Vegetated Hillslopes: An Energy Approach," *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 36, pp. 1172-1184, (1999).
- Fan, C. C. and Su, C. F., "Role of roots in the shear strength of root-reinforced soils with high moisture content," *Ecological Engineering Journal*, Vol. 33, pp. 157-166, (2008).
- 11. Operstein, V. and Frydman, S., "The influence of vegetation on soil strength," Ground Improvment, Vol. 4(2), pp. 81-89, (2000).
- Stolzy, L. H. and Barley, K. P., "Mechanical Resistance Encountered by Roots Entering Compact Soils," *Soil Science*, 105, pp. 297-301, (1968).
- Tosi, M., "Root tensile strength relationships and their slope stability implications of three shrub species in the Northern Apennines (Italy)," *Geomorphology Journal*, Vol. 87, pp. 268-283, (2006).
- Van Beek, L. P. H., Wint, J., Cammeraat, L. H. and Edwards, J. P., "Observation and Simulation of Root Reinforcement on Abandoned Mediterranean Slopes," *Plant and Soil Journal*, Vol. 278. pp. 55-74, (2005).
- Waldron, L. J., "The Shear Resistance of Root-Permeated Homogeneous and Stratified Soil," *Soil Science, Soc. Am. J.*, 41(3), pp. 843-849, (1977).
- Waldron, L. J. and S. Dakessian., "Soil Reinforcement by Roots, Calculation of Increased Soil Shear Resistance from Root Properties," *Soil Science*, 132(6), pp. 427-435, (1981).

- Wu, T. H., McOmber, R. M., Erb, R. T. and Beal, P. E., "Study of Soil-Root Interaction," *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, Vol.114, No.12, pp.1351-1375, (1988).
- 收稿日期:民國 97年6月12日 修正日期:民國 97年7月23日 接受日期:民國 97年8月1日