

溶質在均質飽和土壤中運移之一維解析解

Analytical Solutions of Solute Transport in Homogeneous Saturated Soil with Input Sources

屏東科技大學
土木工程系
副教授

鍾文貴*

Wen-Guey Chung

屏東科技大學
土木工程系
副教授

王裕民

Yu-Min Wang

屏東科技大學
土木工程系
教授

丁澈士

Cheh-Shyh Ting

屏東科技大學
土木工程系
研究生

陳侑佐

You-Tzuo Chen

摘要

本文應用拉普拉斯轉換推導得具 Dirichlet 與 Neumann 條件的一維污染傳輸數學模式之基本解，然後將溶質在地表面瞬間排放、連續排放與定時段連續排放等三種常見的排放模式，給定初始值後代入基本解，運用積分技巧推求得溶質在均質飽和土壤中運移之解析解，再進一步給予文獻相同的求解條件來驗證推演解析解的正確性。這些溶質排放模式的解析解，可應用於分析溶質在均質飽和土壤中運移的濃度分佈情形，具有實用價值，亦可作為驗證電腦模擬複雜污染傳輸模式數值解的合理性。

關鍵詞：解析解，污染傳輸，點源。

ABSTRACT

With the aid of Laplace transform, the fundamental solution for the solute transport problems with Dirichlet and Neumann conditions in a semi-infinite saturated, homogeneous soil is derived. Three types of point sources with specific time drop in the soil surface were considered. The analytical solutions for solute concentration distribution with these source inputs are presented. The validity of each solution is analyzed and discussed, individually. The derived solutions are helpful to soil amelioration and other similar computing simulations of solute transport in soil systems.

Keywords: Analytical solution, Solute transport, Point source.

*通訊作者，國立屏東科技大學土木工程系副教授，91201 屏東縣內埔鄉學府路 1 號，wenguey@mail.npust.edu.tw

一、前言

污染傳輸方程的應用領域非常廣泛，通常可以通過求解此方程來得到江河、湖泊、海洋等水體及土體中污染物質濃度、溫度等物理量的運移擴散現象，因此，研究污染傳輸方程的求解技術為處理環境污染問題必須具備的基本概念。目前，在污染傳輸方面的研究工作仍然非常的活躍，因而發展出許多傳輸模式的數值解與解析解，例如參考文獻[7,8,10]。一個數學模式解析解的獲得，通常是把問題假設處於理想狀態，且把複雜的數學模式與求解條件予以適度地簡化，這樣才可能運用數學技巧得到解答，此即為解析解，其經常扮演著兩個重要的角色：(1)作為電腦模擬複雜問題，驗證數值解是否正確的工具；(2)用於對數學模型中各種影響因素的敏感度分析。簡言之，數學模型的解析解可用來分析與驗證複雜問題的某些基本行為。本文在考慮地表下某深度為透水層或不透水層的限定條件下，推導得溶質在地表面排放入均質飽和土壤中運移一維數學模型之基本解，並分別討論溶質在地表面排放的三種類型：(1)地表面瞬間排放；(2)地表面連續排放；(3)地表面定時段連續排放等常見排放模式，運用積分技巧分別推求得相對應的解析解，再給予文獻相同的求解條件，比較驗證解析解的正確性。這些推演得溶質排放模式的解析解，可應用於分析溶質在均質飽和土壤中運移的濃度分佈情形，具有實用價值。

二、數學模型

在穩定水流條件下，溶質在均質飽和土壤中運移的一維傳輸控制方程式可由如下偏微分方程描述：

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - kC \quad \dots\dots\dots(1)$$

式中 $C(y, t)$ 為溶質濃度(g/cm^3)； V 為一維穩定流速(cm/min)； D 為溶質的擴散係數(cm^2/min)； k 為溶質的一階降解反應係數($1/\text{min}$)； y 是座標位置(cm ，向下為正)； t 為時間(min)。考慮以下的求解條件：

初始條件(initial condition)：

$$C(y, 0) = 0, \quad y > 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

邊界條件(boundary condition)：同時考慮兩種情況

$$(I) C(0, t) = \psi(t), \quad C(d, t) = 0 \quad \dots\dots\dots(3a)$$

$$(II) C(0, t) = \psi(t), \quad \frac{\partial C(d, t)}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots(3b)$$

(3a)、(3b)兩式可合併寫為：

$$(1-\mu)C(d, t) + \mu \frac{\partial C(d, t)}{\partial y} = 0, \quad \dots\dots\dots(3c)$$

當 $\mu = 0$ 時(即為(3a)式)，屬於 Dirichlet condition，表示地表下 $y = d$ 處為透水層； $\mu = 1$ (即為(3b)式)，屬於 Neumann condition，表示地表下 $y = d$ 處為不透水層。

三、數學模型基本解之分析與討論

令 $C(y, t) = e^{\alpha y + \beta t} u(y, t)$ ，其中 α, β 為待求之函數，對 t, y 取偏導數後代入(1)式可整理得

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (V - 2D\alpha) \frac{\partial u}{\partial y} = D \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (D\alpha^2 - k - \beta - V\alpha)u \quad \dots\dots\dots(4)$$

若令

$$V - 2D\alpha = 0, \quad D\alpha^2 - k - \beta - V\alpha = 0, \quad \dots\dots(5)$$

則可將(1)式簡化為純擴散方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \dots\dots\dots(6)$$

由(5)式可解得

$$\alpha = \frac{V}{2D}, \quad \beta = -k - \frac{V^2}{4D} = -K, \quad \dots\dots\dots(7)$$

換言之，經由變數變換 $C(y, t) = e^{\alpha y + \beta t} u(y, t)$ ，可將(1)式簡化為(6)式，因此，只要找出(6)式的解答，就可求得(1)式的基本解。以下我們就從推求(6)式的解答出發，首先將求解條件(2)(3c)改寫為

(A)初始條件：

$$u(y, 0) = 0 \quad ; \quad \dots\dots\dots(8)$$

(B)邊界條件：

$$(I) u(0,t) = \psi(t)e^{-\beta t} = \phi(t), \dots\dots\dots (9a)$$

$$(II) \frac{\partial C(d,t)}{\partial y} = 0 = (1 - \mu + \alpha\mu)u(d,t) + \mu \frac{\partial u(d,t)}{\partial y} \dots\dots\dots (9b)$$

對(6)式取變數 t 的拉普拉斯轉換(Laplace Transform, t 轉換為 s), 即

$$\bar{f}(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt,$$

則(6)式可改寫為：

$$\frac{d^2 \bar{u}(y,s)}{dy^2} - \frac{s}{D} \bar{u}(y,s) = 0, \dots\dots\dots (10)$$

此為二階常微分方程式，其通解為

$$\bar{u}(y,s) = A \exp(y\lambda) + B \exp(-y\lambda), \quad \lambda = \sqrt{\frac{s}{D}}. \dots\dots\dots (11)$$

對邊界條件(9a,b)式取拉普拉斯轉換得

$$\bar{u}(0,s) = \bar{\phi}(s) \dots\dots\dots (12a)$$

$$(1 - \mu + \alpha\mu)\bar{u}(d,s) + \mu \frac{\partial \bar{u}(d,s)}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (12b)$$

引用(11)(12a)兩式可得：

$$A + B = \bar{\phi}(s) \dots\dots\dots (13)$$

由(11)(12a,b)(13)式可整理得：

$$A = \frac{-a\bar{\phi}(s)\exp(-2\lambda d)}{1 - a\exp(-2\lambda d)}, B = \frac{\bar{\phi}(s)}{1 - a\exp(-2\lambda d)},$$

$$a = \frac{(1 - \mu + \alpha\mu - \mu\lambda)}{(1 - \mu + \alpha\mu + \mu\lambda)} \dots\dots\dots (14)$$

將(14)式代入(11)式得

$$\bar{u}(y,s) = \frac{-a\bar{\phi}(s)\exp(-2\lambda d)}{1 - a\exp(-2\lambda d)} \exp(y\lambda)$$

$$+ \frac{\bar{\phi}(s)}{1 - a\exp(-2\lambda d)} \exp(-y\lambda) \dots\dots\dots (15)$$

由麥克勞林級數(Maclaurin series)： $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^\infty x^n$ ，

可得

$$\frac{1}{1 - a\exp(-2d\lambda)} = \sum_{n=0}^\infty [a\exp(-2d\lambda)]^n = \sum_{n=0}^\infty a^n \exp(-2nd\lambda) \dots\dots\dots (16)$$

(16)式代入(15)式可整理得

$$\bar{u}(y,s) = -\bar{\phi}(s) \sum_{n=0}^\infty a^{n+1} \exp(y\lambda - 2\lambda d - 2nd\lambda) + \bar{\phi}(s) \sum_{n=0}^\infty a^n \exp(-2nd\lambda - y\lambda) \dots\dots\dots (17a)$$

令 $\Lambda_0 = 2nd + y$, $\Lambda_1 = 2nd + 2d - y$ ，則可將(17a)式改寫為

$$\bar{u}(y,s) = \bar{\phi}(s) \sum_{n=0}^\infty [a^n \exp(-\Lambda_0\lambda) - a^{n+1} \exp(-\Lambda_1\lambda)] \dots\dots\dots (17b)$$

由於 a 為 s 的函數，因此，無法直接由(17b)式取拉普拉斯反轉換求得解答，但若分別考慮 $\mu = 0$ 與 $\mu = 1$ 的情況，則可直接引用拉普拉斯反轉換而獲得解答，以下分別討論此兩種情況的基本解：

(I)當 $\mu = 0$ 時，由(14)式得 $a = 1$ ，代入(17b)式可得

$$\bar{u}^{(1)}(y,s) = \bar{\phi}(s) \sum_{n=0}^\infty [\exp(-\Lambda_0\lambda) - \exp(-\Lambda_1\lambda)] \dots\dots\dots (18)$$

由拉普拉斯反轉換函數對照表知[2,3]：

$$L^{-1}\{-k\sqrt{s}\} = \frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right) \dots\dots\dots (19a)$$

對(18)式取拉普拉斯反轉換，引用(19a)式與褶積定理(convolution theorem)即可得地表下 $y = d$ 處為透水層濃度分佈之基本解為

$$u^{(I)}(y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{\phi(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \left\{ \Lambda_0 \exp\left[-\frac{\Lambda_0^2}{4D(t-\tau)}\right] - \Lambda_1 \exp\left[-\frac{\Lambda_1^2}{4D(t-\tau)}\right] \right\} d\tau \dots\dots\dots(19b)$$

此與 Wu & Yang [10]的結果一致。

(II) 當 $\mu = 1$ 時，由(14)式得 $a = \frac{\alpha - \lambda}{\alpha + \lambda}$ ，代入(17b)式可得

$$\bar{u}^{(II)}(y,s) = \bar{\phi}(s) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\alpha - \lambda}{\alpha + \lambda} \right)^n \exp(-\Lambda_0 \lambda) - \left(\frac{\alpha - \lambda}{\alpha + \lambda} \right)^{n+1} \exp(-\Lambda_1 \lambda) \right\} \dots\dots\dots(20)$$

對(20)式取拉普拉斯反轉換可得

$$u^{(II)}(y,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st} \left\{ \bar{\phi}(s) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\alpha - \lambda}{\alpha + \lambda} \right)^n \exp(-\Lambda_0 \lambda) - \left(\frac{\alpha - \lambda}{\alpha + \lambda} \right)^{n+1} \exp(-\Lambda_1 \lambda) \right] \right\} ds \dots\dots\dots(21)$$

顯然地，(21)式需用數值方法才能求得解答，此部分可參考 Hong & Hirdes [4]，但若令 $\alpha = 0$ ，則(20)式可化為簡為

$$\bar{u}^{(III)}(y,s) = \bar{\phi}(s) \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \exp(-\Lambda_0 \lambda) - (-1)^{n+1} \exp(-\Lambda_1 \lambda) \right], \dots\dots\dots(22)$$

對(22)式的拉普拉斯反轉換，引用(19a)式與褶積定理可得

$$u^{(III)}(y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{\phi(\tau)}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)^3}} \left\{ (-1)^n \Lambda_0 \exp\left[-\frac{\Lambda_0^2}{4D(t-\tau)}\right] - (-1)^{n+1} \Lambda_1 \exp\left[-\frac{\Lambda_1^2}{4D(t-\tau)}\right] \right\} d\tau \dots\dots\dots(23)$$

此即為無滲流情況下 ($V = 0$) 且假設地表下 $y = d$ 處為不透水層條件之溶質濃度分佈基本解。

將(19b)(23)兩式合併寫為

$$u(y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{\phi(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \left\{ (\text{sgn})^n \Lambda_0 \exp\left[-\frac{\Lambda_0^2}{4D(t-\tau)}\right] - (\text{sgn})^{n+1} \Lambda_1 \exp\left[-\frac{\Lambda_1^2}{4D(t-\tau)}\right] \right\} d\tau \dots\dots\dots(24)$$

式中 $\text{sgn} = 1$ ，當 $\mu = 0$ ； $\text{sgn} = -1$ ，當 $\mu = 1$ 且 $\alpha = 0$ 。

再將 $C(y,t) = e^{\alpha y + \beta t} u(y,t)$ 與(8)(9a,b)式代入(24)式，即可得(1)式的基本解為：

$$C(y,t) = \frac{e^{\alpha y}}{\sqrt{4\pi D}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \left\{ (\text{sgn})^n \Lambda_0 \exp\left[\beta(t-\tau) - \frac{\Lambda_0^2}{4D(t-\tau)}\right] - (\text{sgn})^{n+1} \Lambda_1 \exp\left[\beta(t-\tau) - \frac{\Lambda_1^2}{4D(t-\tau)}\right] \right\} d\tau \dots\dots\dots(25)$$

此即為溶質在土壤中運移濃度分佈之基本解。

當 $d \rightarrow \infty$ 且 $\mu = 0$ ($\text{sgn} = 1$) 時，(25)式可化簡為

$$C(y,t) = \frac{ye^{\alpha y}}{\sqrt{4\pi D}} \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \exp\left[\beta(t-\tau) - \frac{y^2}{4D(t-\tau)}\right] d\tau \dots\dots\dots(26)$$

此與 Polyanin [6, chap.1 sec.1.1.5-4]的結果相同。

(a) 考慮純擴散情況時($V=0$ 且 $k=0$)， $\alpha=\beta=0$ ，則(26)式可簡化為

$$C(y,t) = \frac{y}{\sqrt{4\pi D}} \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \exp\left[-\frac{y^2}{4D(t-\tau)}\right] d\tau \dots\dots\dots(27)$$

此為純擴散方程： $\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$ 的基本解，與 Polyanin[6, chap.1 sec.1.1.2-2]的結果一致。

(b) 考慮無降解反應時($k=0$)，則(26)式可簡化為

$$C(y,t) = \frac{ye^{\frac{Vy}{2D}}}{\sqrt{4\pi D}} \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \exp\left[-\frac{(t-\tau)V^2}{4D} - \frac{y^2}{4D(t-\tau)}\right] d\tau \dots\dots\dots(28)$$

此為 $\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$ 的基本解，與 Polyanin[6, chap.1 sec.1.1.4-4]的結果相同。

(c) 考慮無滲流情況時($V=0$)，則(26)式可簡化為

$$C(y,t) = \frac{y}{\sqrt{4\pi D}} \int_0^t \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \exp\left[-k(t-\tau) - \frac{y^2}{4D(t-\tau)}\right] d\tau \dots\dots\dots(29)$$

此為 $\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - kC$ 的基本解，與 Polyanin[6, chap.1 sec.1.1.3-4]的結果相同。

四、溶質排放類型之解析解與驗證

前節各式中的函數 $\psi(t)$ 代表在地表面 $y=0$ 處之溶質排放函數(source function)，在實務應用上，可依排放溶質的型態給定其函數值，進而應用積分技巧求得解析解。以下討論在地表面排放溶質的三種常見類型：地表面瞬間排放、地表面

連續排放與地表面定時段連續排放等排放模式，分別先給定函數值，再運用積分技巧求得其對應的解析解。

(1) 地表面瞬間排放：假設 $\psi(t) = C_0 \delta(t-t_0)$ ，即強度 C_0 的溶質於時間 $t=t_0$ 時刻，在地表面 $y=0$ 處瞬間排放。

將 $\psi(t) = C_0 \delta(t-t_0)$ 代入(25)式，可得此求解條件之濃度分佈解析解為：

$$C(y,t) = \frac{C_0 \exp(\alpha y)}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)^3}} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (\text{sgn})^n \Lambda_0 \exp\left[\beta(t-t_0) - \frac{\Lambda_0^2}{4D(t-t_0)}\right] - (\text{sgn})^{n+1} \Lambda_1 \exp\left[\beta(t-t_0) - \frac{\Lambda_1^2}{4D(t-t_0)}\right] \right\} \dots\dots\dots(30)$$

當 $d \rightarrow \infty, \mu=0$ ($\text{sgn}=1$) 且考慮純擴散情況時，(30)式可化簡為

$$C(y,t) = \frac{C_0}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)^3}} \exp\left[-\frac{y^2}{4D(t-t_0)}\right] \dots\dots\dots(31)$$

此為 $C_t = DC_{yy}$ ， $C(y,0)=0$ ， $C(0,t)=C_0$ ， $C(\infty,t)=0$ 的解析解與 Carslaw & Jaeger [1]的結果一致。

(2) 地表面連續排放：假設 $\psi(t) = C_0$ ，即強度 C_0 的溶質在地表面 $y=0$ 處連續排放。

將 $\psi(t) = C_0$ 代入(25)式，可得此求解條件之濃度分佈解析解為：

$$C(y,t) = \frac{C_0 e^{\alpha y}}{\sqrt{4\pi D}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \left\{ (\text{sgn})^n \Lambda_0 \exp\left[\beta(t-\tau) - \frac{\Lambda_0^2}{4D(t-\tau)}\right] - (\text{sgn})^{n+1} \Lambda_1 \exp\left[\beta(t-\tau) - \frac{\Lambda_1^2}{4D(t-\tau)}\right] \right\} d\tau \quad (32)$$

$$\text{積分公式[2]} : \int_0^t \frac{1}{\sqrt{x^3}} e^{-a^2 x - b^2/x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2b} \left\{ e^{-2ab} \text{erfc}\left(\frac{b-at}{\sqrt{t}}\right) + e^{2ab} \text{erfc}\left(\frac{b+at}{\sqrt{t}}\right) \right\} \quad (33)$$

式中 $\text{erfc}(\cdot)$ 為 complement error function，其定義為： $\text{erfc}(z) = 1 - \text{erf}(z)$ ，其中 $\text{erf}(z)$ 為 error function， $\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta$ 且 $\text{erf}(0) = 0$ ， $\text{erf}(\infty) = 1$ ， $\text{erf}(-z) = -\text{erf}(z)$ 。

(32)式中右邊的積分式，可引用(33)式積分得

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \exp\left[\beta(t-\tau) - \frac{\Lambda_1^2}{4D(t-\tau)}\right] d\tau &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{T^3}} \exp\left[-KT - \frac{\Lambda_1^2}{4DT}\right] dT \\ &= \frac{\sqrt{\pi D}}{\Lambda_1} \left\{ e^{-\frac{\sqrt{K}\Lambda_1}{\sqrt{D}}} \text{erfc}\left(\frac{\Lambda_1 - t\sqrt{4DK}}{\sqrt{4Dt}}\right) + e^{\frac{\sqrt{K}\Lambda_1}{\sqrt{D}}} \text{erfc}\left(\frac{\Lambda_1 + t\sqrt{4DK}}{\sqrt{4Dt}}\right) \right\} \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t-\tau)^3}} \exp\left[\beta(t-\tau) - \frac{\Lambda_0^2}{4D(t-\tau)}\right] d\tau &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{T^3}} \exp\left[-KT - \frac{\Lambda_0^2}{4DT}\right] dT \\ &= \frac{\sqrt{\pi D} e^{-\frac{\sqrt{K}\Lambda_0}{\sqrt{D}}}}{\Lambda_0} \left\{ \text{erfc}\left(\frac{\Lambda_0 - t\sqrt{4DK}}{\sqrt{4Dt}}\right) + e^{\frac{2\sqrt{K}\Lambda_0}{\sqrt{D}}} \text{erfc}\left(\frac{\Lambda_0 + t\sqrt{4DK}}{\sqrt{4Dt}}\right) \right\} \quad (35) \end{aligned}$$

將(34)(35)兩式代入(32)式整理可得

$$\begin{aligned} C(y,t) &= \frac{C_0 e^{\alpha y}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -(\text{sgn})^{n+1} \left[e^{-\frac{\sqrt{K}\Lambda_1}{\sqrt{D}}} \text{erfc}\left(\frac{\Lambda_1 - t\sqrt{4DK}}{\sqrt{4Dt}}\right) + e^{\frac{\sqrt{K}\Lambda_1}{\sqrt{D}}} \text{erfc}\left(\frac{\Lambda_1 + t\sqrt{4DK}}{\sqrt{4Dt}}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + (\text{sgn})^n \left[e^{-\frac{\sqrt{K}\Lambda_0}{\sqrt{D}}} \text{erfc}\left(\frac{\Lambda_0 - t\sqrt{4DK}}{\sqrt{4Dt}}\right) + e^{\frac{\sqrt{K}\Lambda_0}{\sqrt{D}}} \text{erfc}\left(\frac{\Lambda_0 + t\sqrt{4DK}}{\sqrt{4Dt}}\right) \right] \right\} \quad (36) \end{aligned}$$

當 $d \rightarrow \infty$ 且考慮 $\mu = 0$ (即 $\text{sgn} = 1$) 的情況，則(36)式可化簡為

$$C(y,t) = \frac{C_0 e^{\alpha y}}{2} \left\{ e^{\frac{y\sqrt{K}}{\sqrt{D}}} \text{erfc}\left(\frac{y + t\sqrt{4DK}}{\sqrt{4Dt}}\right) + e^{-\frac{y\sqrt{K}}{\sqrt{D}}} \text{erfc}\left(\frac{y - t\sqrt{4DK}}{\sqrt{4Dt}}\right) \right\} \quad (37)$$

此為半無限域溶質運移問題： $C_t + VC_y = DC_{yy} - kC$ ，初始條件： $C(y,0) = 0$ ，邊界條件： $C(0,t) = C_0$ ， $C(\infty,t) = 0$ 的解析解，與 Sun et al [8]、Wu & Yang [10] 的結果一致。

(a) 當考慮純擴散情形時 ($V = 0$ 且 $k = 0$)，則(37)式可改寫

$$C(y,t) = C_0 \text{erfc}\left(\frac{y}{\sqrt{4Dt}}\right) \quad (38)$$

上式與 Eagleson [3]、Rudakov & Ovcharov [7]、Carslaw & Jaeger [1, p.60]的結果相同。
 (b) 當考慮無降解反應情況時($k=0$)，代入(37)式整理後可得

$$C(y,t) = \frac{C_0}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{y-Vt}{\sqrt{4Dt}} \right) + e^{\frac{yV}{D}} \operatorname{erfc} \left(\frac{y+Vt}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] \dots\dots\dots (39)$$

上式與 Willis & Yeh [9]、Ogata & Banks [5]的結果相同。Ogata & Banks 亦指出若 $\frac{yV}{D} < 0.002$ 時，(39)式右邊的第二項可以忽略不計。
 (c) 當考慮無滲流情況時($V=0$)，則(37)式可化簡得

$$C(y,t) = \frac{C_0}{2} \left\{ e^{-y\sqrt{\frac{k}{D}}} \operatorname{erfc} \left(\frac{y-t\sqrt{4Dk}}{\sqrt{4Dt}} \right) + e^{y\sqrt{\frac{k}{D}}} \operatorname{erfc} \left(\frac{y+t\sqrt{4Dk}}{\sqrt{4Dt}} \right) \right\} \dots\dots\dots (40)$$

此與 Wu & Yang [10]的結果一致。
 (3) 地表面定時段連續排放：假設 $\psi(t) = C_0 [H(t) - H(t-t_0)]$ ，式中 $H(\cdot)$ 為 unit step function。表示強度 C_0 的溶質在地表面 $y=0$ 處，於 $0 < t < t_0$ 時段連續排放。
 將(32)式的積分區間 $[0,t]$ 改變為 $[0,t_0]$ ，則可積分整理得

$$C(y,t) = \frac{C_0 e^{\alpha y}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -(\operatorname{sgn})^{n+1} \left[e^{-\frac{\sqrt{k}\Lambda_1}{\sqrt{D}}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\Lambda_1 - (t-t_0)\sqrt{4DK}}{\sqrt{4D(t-t_0)}} \right) + e^{\frac{\sqrt{k}\Lambda_1}{\sqrt{D}}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\Lambda_1 + (t-t_0)\sqrt{4DK}}{\sqrt{4D(t-t_0)}} \right) \right] \right. \\ \left. + (\operatorname{sgn})^n \left[e^{-\frac{\sqrt{k}\Lambda_0}{\sqrt{D}}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\Lambda_0 - (t-t_0)\sqrt{4DK}}{\sqrt{4D(t-t_0)}} \right) + e^{\frac{\sqrt{k}\Lambda_0}{\sqrt{D}}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\Lambda_0 + (t-t_0)\sqrt{4DK}}{\sqrt{4D(t-t_0)}} \right) \right] \right\} \dots\dots\dots (41)$$

因此， $0 < t < t_0$ 時段溶質在土壤內的濃度分佈為(36)式， $t > t_0$ 時段的濃度分佈為(36)式減去(41)式。當 $d \rightarrow \infty, \mu = 0$ (即 $\operatorname{sgn} = 1$) 且考慮純擴散情況時($k=0$ 且 $V=0$)，則(41)式可化簡為

$$C(y,t) = C_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{\sqrt{4D(t-t_0)}} \right) \dots\dots\dots (42)$$

換言之，考慮純擴散情況時， $0 < t < t_0$ 時段溶質在土層內之濃度分佈為(38)式； $t > t_0$ 時段的濃度分佈可由(38)式減去(42)式而得到，即

$$C(y,t) = C_0 \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{y}{\sqrt{4Dt}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{\sqrt{4D(t-t_0)}} \right) \right] \dots\dots\dots (43)$$

此與 Carslaw & Jaeger [1, p.63]的結果相同。

五、應用計算與討論

假設一強度為 C_0 的溶質在地表面 $y=0$ 處連續排放，其在飽和均質土壤中運移的擴散係數為 $D = 1.0 \text{ (cm}^2/\text{hr)}$ ，降解係數為 $k = 0.05 \text{ (1/day)}$ ，土壤的平均孔隙滲透速度 $V = 1.0 \text{ (cm/hr)}$ 。我們以(36)式分別計算出地表面下 $y = 2m$ 處為不透水層或透水層的溶質濃度分佈，繪如圖 1~圖 4 所示。這些圖顯示溶質濃度分佈隨著時間的增大而由地表面逐漸往土壤深層延展擴增，直至 $y = 2m$ 處才因邊界條件的限制而異。圖 1 與圖 2 均考慮地表面下 $y = 2m$ 處為透水層的溶質濃度分佈計算結果，其中圖 1 的邊界條件為 $C(d,t) = 0$ ，而圖 2 的邊界條件為 $C(\infty,t) = 0$ 。比較此兩圖，顯示當 $t > 10 \text{ day}$ 時，圖 1 在土層厚度 $= 2m$ 處(即 $y = 2m$) 將維持等於零，而圖 2 則趨近等於一，此結果顯然符合邊界條件的要求。圖 3 是假設無滲流情況

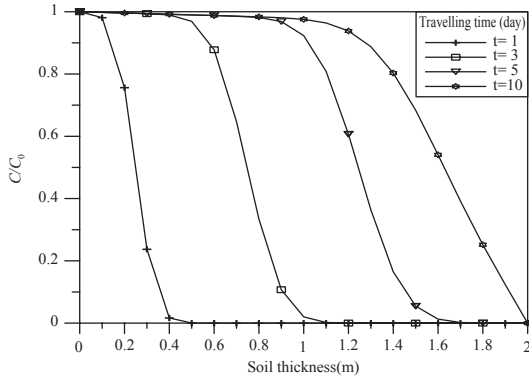


圖 1 地表面下 $y = 2m$ 處為透水層的溶質濃度分佈 (邊界條件為 $C(d,t) = 0$)

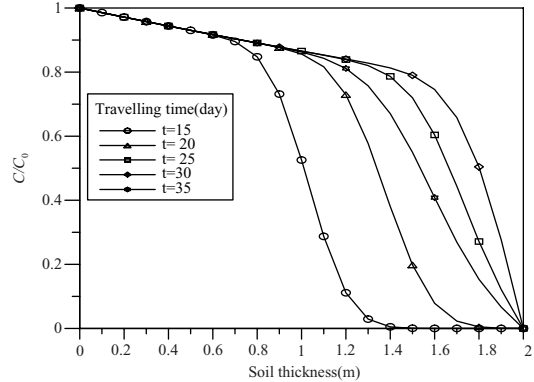


圖 3 地表面下 $y = 2m$ 處為透水層的溶質濃度分佈 (邊界條件為 $C(d,t) = 0$)

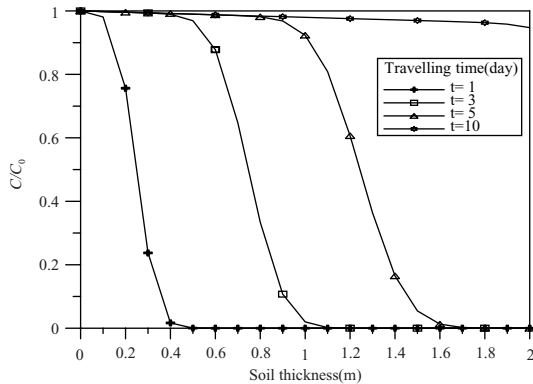


圖 2 地表面下 $y = 2m$ 處為透水層的溶質濃度分佈 (邊界條件為 $C(\infty,t) = 0$)

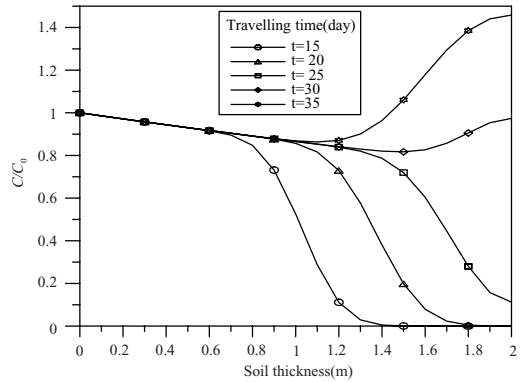


圖 4 地表面下 $y = 2m$ 處為不透水層的溶質濃度分佈 (邊界條件為 $C_y(d,t) = 0$)

下($V=0$),考慮地表面下 $y = 2m$ 處為透水層(即邊界條件為 $C(d,t) = 0$)的溶質濃度分佈情形,而圖四則是假設無滲流且考慮地表面下 $y = 2m$ 處為不透水層(即邊界條件為 $C_y(d,t) = 0$)的溶質濃度分佈。比較圖 3 與圖 4,可觀察到當 $t > 30 \text{ day}$ 時,圖 3 在 $y = 2m$ 處將維持等於零,此乃因邊界條件為 $C(d,t) = 0$ 的緣故;圖 4 則將大於一,此亦因邊界條件為 $C_y(d,t) = 0$ (即不透水層)的緣故,換言之,觀測的時間越長,在不透水層 $y = 2m$ 處的溶質濃度將會不斷地持續累積增強。

六、結 論

本文應用積分變換推導得具 Dirichlet 與 Neumann 條件的一維半無限域污染傳輸模式之

基本解,再分別代入與文獻相同的求解條件,運用積分技巧驗證了推導得基本解之正確性。溶質在地表面瞬間排放、連續排放與定時段連續排放等三種常見的溶質排放模式解析解,在本文中也逐項推演呈現與討論。數值計算結果顯示,可應用這些解析解於分析溶質在均質飽和土壤中運移的濃度分佈情形,具有實用價值,亦可作為驗證電腦模擬複雜污染傳輸模式數值解之合理性。

七、參考文獻

1. Carslaw, H. S., and Jaeger, J. C., "Conduction of heat in solids," 1959, Clarendon Press, Oxford.
2. Duffy, D. G., "Green's functions with applications," 2001, Chapman & Hall CRC, New York.

3. Eagleson, P. S., "Dynamic hydrology, Appendix C-3," 1970, McGraw-Hill, New York.
 4. Hong, G. and Hirdes, U., A method for the numerical inversion of Laplace transforms, J. Comput. & Appl. Math., 1984, v10, p.113-132.
 5. Ogata, A. and Banks, R. B., A solution of the differential equation of longitudinal dispersion in porous media, 1961, Prof. Paper No.411-A, U.S. Geological Survey, Washington, D. C.
 6. Polyanin, A. D., "Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists," 2002, Chapman & Hall CRC, New York.
 7. Rudakov, V. I. and Ovcharov, V. V., Analytical solution of the diffusion equation for an extended source of infinite extent at constant temperature gradient, Int. J. Heat Mass Transfer, 1995, v40(9), p.2231-2234.
 8. Sun, Y., Petersen, J. N., and Clement, T. P., Analytical solutions for multiple species reactive transport in multiple dimensions, J. Contaminant Hydrology, 1999, v35, p.429-440.
 9. Willis, R., and Yeh, W. G., "Groundwater systems planning and management," 1987, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
 10. Wu, Z. H. and Yang, X. M., The analytical solution of solute concentration distribution in homogeneous soil of impermeable stratum, Irrigation and Drainage (China), 2000, v19(2), p.19-21.
- 收稿日期：民國 96 年 12 月 13 日
修正日期：民國 97 年 1 月 10 日
接受日期：民國 97 年 1 月 21 日