

線性動差比適合度檢定之檢定力測試

Assessing Power of Test for Goodness-of-Fit Test Using L-Moment-Ratios Diagram

國立台灣大學
生物環境系統工程學系
博士候選人

劉俊志

Jun-Jih Liou

國立台灣大學
生物環境系統工程學系
博士研究生

吳宜珍

Yii-Chen Wu

國立屏東科技大學
水土保持系
助理教授

江介倫

Jie-Lun Chiang

國立台灣大學
生物環境系統工程學系
教授

鄭克聲*

Ke-Sheng Cheng

摘要

水文頻率分析為水利工程設計的重要依據。傳統上利用卡方(χ^2)檢定和科司(Kolmogorov-Smirnov)檢定等適合度檢定法來決定水文頻率分析之最適機率分佈。近年來所發展之線性動差法，於母體參數之推估表現上，幾近不偏推估，同時，不同機率分佈之出象樣本散佈圖，呈現高分辨率之特質，因此國內外學者廣泛使用線性動差比圖，作為選定水文機率分佈之依據。

本研究使用序率模擬法，進行線性動差比值適合度檢定、卡方檢定與科司檢定之檢定力比較。結果顯示，線性動差比值適合度檢定之檢定力明顯優於傳統之適合度檢定方法。

關鍵詞：頻率分析，適合度檢定，卡方檢定，科司檢定，線性動差法。

ABSTRACT

Hydrological frequency analysis is one of the essential tasks in hydrological engineering design. Conventional methods of goodness-of-fit test, including χ^2 test and Kolmogorov-Smirnov (KS) test, are used to determine the best-fit probability distribution for hydrological data. Recently, L-moment method is widely used in frequency analysis in that it is almost unbiased in parametric estimation, and L-moment-ratio diagram has a high discriminability among parent distributions. Consequently, L-moment-ratios diagrams have been suggested as a useful tool for selecting a best-fit distribution among candidate ones.

Using stochastic simulation, recent studies had established a new method for

*通訊作者，國立台灣大學生物環境系統工程系教授，106 台北市大安區羅斯福路 4 段 1 號，rslab@ntu.edu.tw

goodness-of-fit test by acceptance regions of several distributions, including Normal, Extreme Value I, and Pearson Type III distribution, on L-moment diagram. However, only few studies have so far been made at comparisons of power of tests among the new method and conventional ones. Therefore, the purpose of this study is to compare the power of test of several goodness-of-fit tests, including χ^2 test, KS test, and a new method based on L-moment diagram. It is found that the new L-moment-ratios based test is superior to other conventional ones.

Keywords: Frequency analysis, Goodness-of-fit test, χ^2 test, KS test, L-moment method.

一、緒 論

堤防或水壩等水利工程結構物，經常以五十年或一百年的洪水量為結構設計之依據，其特定重現期洪水量之準確估計就是水文頻率分析最重要之目的。水文頻率分析步驟包括：年最大值序列之收集、水水量最適分佈之選定、分佈之參數推估與極端條件下水水量之推估。其中，卡方(χ^2)檢定或科司(Kolmogorov-Smirnov, KS)檢定經常被使用於水水量最適分佈之選定工作。

機率分佈之選定，常遭遇記錄長度過短或是高偏態特性之樣本分佈，致使分佈型態之選定與參數推估存在高度不確定性。線性動差法 (linear moment method; Hosking, 1990)具有參數幾近不偏推估之特性，偏全值(outliers)對於線性動差比值之推估影響小，且不同分佈之樣本散佈於線性動差比圖(Linear-Moment-Ratios Diagram, LMRD)上，呈現高度辨別性，有利於選定最適機率分佈之工作。因此，近年來線性動差法已成為決定最適分佈重要工具之一。

過去利用線性動差比圖輔助判斷最適分佈之繪圖法可概分為以下三種：中心點法(Vogel et al., 1993; Hosking & Wallis, 1995)、曲線最適法(Vogel & Wilson, 1996)與接受區間(Acceptance Region, AR)法(Chow & Watt, 1994; Cheng et al., 2006; 鄭等人, 2007)。其均利用線性動差比圖上，樣本點之散佈位置與機率分佈理論線之相對接近距離，判斷何者為最適機率分佈。中心越接近或者樣本點分佈情形越靠近某一機率分佈之理論線，則其機率分佈之歸屬性就越高。然而，前

兩種繪圖法未嚴謹處理不同樣本長度之影響，於小樣本時經常有迥異之結論出現。因此，本研究認為，以線性動差比圖適合度檢定法(L-Moment-Ratios goodness-of-Fit Test)能有效糾正樣本長度之影響，能提供統計上較嚴謹、精確之結論。

由於線性動差比值接受區間適合度檢定法自鄭等人(2007)才被完整地提出，其與傳統適合度檢定法之比較研究至今仍屬不足。因此本研究利用序率模擬方法，進行線性動差比值、卡方與科司適合度檢定法之檢定力測試。

二、理論介紹

本章說明各種適合度檢定(Goodness-of-fit test, GOF test)，包括卡方檢定、科司檢定與線性動差比圖法之理論與計算流程。其次，亦分述研究中所使用之蒙地卡羅技巧，統計之假設檢定。

2.1 卡方檢定

卡方適合度檢定之應用範圍很廣，能進行許多單變量以及多變量機率分佈之適合度檢定，對於母體參數已表明與否皆能進行。其檢定統計量為卡方統計量，如式(1)，

$$\hat{\chi}_p^2 = \sum_{i=1}^I \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \dots\dots\dots (1)$$

由 Pearson (1900)首度提出，又名為 Pearson 近似式。其中 O_i 與 E_i 分別為第 i 區間之觀察個數與個數期望值。 n 為樣本總個數。 I 為區間總個數，本研究設定 I 之計算方式如式(2)(許, 2004)，

$$I = \text{Int}(\sqrt{n}) \dots\dots\dots (2)$$

p 為檢定統計量之自由度，由於總區間期望個數之和與總觀察個數相等，因此需喪失一個自由度，此時檢定統計量之自由度為 $(I-1)$ ，後續如應用於母體參數未表明之適合度檢定時，需再扣除待估計參數之個數。研究中訂定各 E_i 值皆相等，並依此條件配合分位數函數(Quantile Function, QF)可得各區間之邊界，用以計算 O_i 。

當 O_i 與 E_i 之差異越大則式(1)之檢定統計量越大，有越多證據可拒絕 H_0 (經驗機率分佈與理論機率分佈相同)。此檢定為右尾檢定，當顯著水準為 α ，若

$$\hat{\chi}_p^2 > \chi_{\alpha,p}^2 \quad \dots\dots\dots(3)$$

則拒絕 H_0 之虛無假設。

顏(2001)指出卡方檢定唯一限制條件為，當樣本長度過小，無法符合式(4)時，則不恰當以此法進行適合度檢定。當樣本過短導致由式(2)得出之區間總個數(I)，其無法滿足各 E_i 值均大於等於 5(如式(4))，

$$E_i \geq 5 \quad \dots\dots\dots(4)$$

此時採用逐漸減少區間總個數(I)直至滿足式(4)為止。同時，當檢定統計量之自由度(p)為 1 時，需對檢定統計量進行修正。

2.2 科司檢定

科司檢定能克服卡方檢定無法進行小樣本長度之缺憾。科司檢定統計量之定義為理論累積分佈函數與經驗累積分佈函數之最大絕對差值，吾人利用 $\{D^+, D^-, D_n\}$ 之定義，如式(5~7)，

$$D^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \{i/n - F(X_{(i)})\} \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$D^- = \max_{0 \leq i \leq n} \{F(X_{(i)}) - (i-1)/n\} \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$D_n = \max(D^+, D^-) \quad \dots\dots\dots(7)$$

計算該檢定統計量(D_n)，其屬於科司分佈需查表始得臨界值($d_{\alpha n}$)。其中， n 為樣本長度， $F(x)$ 為理論之累積分佈函數， $X_{(i)}$ 為隨機樣本中第 i 個順序統計量。

當經驗累積分佈函數與理論累積分佈函數

相差越大時， D_n 越大，有越多證據可以拒絕 H_0 (經驗累積分佈函數與理論累積分佈函數相同)。以 D_n 為檢定統計量之科司檢定為雙尾檢定，當顯著水準為 α ，若

$$D_n > d_{\alpha/2,n} \quad \dots\dots\dots(8)$$

則拒絕 H_0 之虛無假設。科司檢定只適用於母體參數已被表明之檢定，而卡方檢定除適用於母數已知者之外，還適用於以統計量估計母數的檢定(顏，1992)。

2.3 線性動差比圖法

2.3.1 線性動差

Hosking (1990) 首先為線性動差(Φ_r)定名，其定義如下所示：

$$\Phi_r = r^{-1} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} EY_{r-k:r}, \quad r=1, 2, \dots \quad (9)$$

其中 Y 為隨機變數、 $Y_{r-k:r}$ 為其順序統計量($Y_{1:n} \leq Y_{2:n} \leq \dots \leq Y_{n:n}$)。

線性偏態係數(Linear Coefficient of Skewness, LCS ; Π_3)以及線性峰態係數(Linear Coefficient of Kurtosis, LCK ; Π_4)為最常使用之兩個參數，做為線性動差比圖之兩變數軸，其樣本估計方式習慣使用機率權重動差(Probability Weighted Moments, $PWMs$; Ψ_j)，可表示如下：

$$\Pi_b = \Phi_b / \Phi_2, \quad b=3, 4 \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$\Phi_1 = \Psi_0 \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$\Phi_2 = 2\Psi_1 - \Psi_0 \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$\Phi_3 = 6\Psi_2 - 6\Psi_1 + \Psi_0 \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$\Phi_4 = 20\Psi_3 - 30\Psi_2 + 12\Psi_1 - \Psi_0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$\psi_j^{UE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(n-i)(n-i-1) \cdots (n-i-j+1)}{(n-1)(n-2) \cdots (n-j)} y_i \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$\psi_j^{PPE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-0.35}{n} \right)^j y_i; \quad j=0, 1, \dots, n-1; \quad y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n \quad \dots\dots\dots(16)$$

其中估計機率權重動差方法又有 *UE (Unbiased Estimator; Landwehr, 1979)*與*PPE (Plotting-Position Estimator; Hosking, 1993)*兩種。*Hosking* 與 *Wallis* (1995)進行 *UE* 與 *PPE* 之比較研究，其結果顯示由於 *PPE* 為偏差估計元且其統計量無法維持尺度不變性(*invariant*)，又於不同機率分佈條件下其估計偏差量(*bias*)一般較大於 *UE* 之偏估量，因此進行線性動差比圖繪點工作時，建議採用 *UE* 進行樣本線性動差比之估計工作。線性動差法之詳細計算步驟與理論推演可參考 *Hosking* 與 *Wallis* (1997)，此外，*Juha* (2005)與 *William* (2006)均提供線性動差相關計算之程式工具。

2.3.2 線性動差比值適合度檢定法

Cheng et al. (2006)，鄭等人(2007)與 *Liou et al.* (2007)提出以線性動差比值進行適合度檢定。其認為任意機率分佈之隨機樣本所計算得樣本線性偏態係數(π_3)與樣本線性峰態係數(π_4)為

二元常態分佈，藉此可定義檢定統計量(如式(17))，

$$\hat{\chi}_2^2 = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'(\boldsymbol{\Sigma})^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \dots\dots\dots (17)$$

以及其接受域(AR)，

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'(\boldsymbol{\Sigma})^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \leq \chi_{\alpha,2}^2 \dots\dots\dots (18)$$

用以進行適合度檢定。其中 $\mathbf{x}$ 為(π_3, π_4)之矩陣向量、 $\boldsymbol{\mu}$ 與 $\boldsymbol{\Sigma}$ 為各種機率分佈(π_3, π_4)之期望值向量與變異共變矩陣。表 1~3 分別為常態、*EV1* 與 *PT3* 分佈之線性動差比圖適合度檢定法 $\boldsymbol{\mu}$ 與 $\boldsymbol{\Sigma}$ 經驗公式(*Liou et al.*, 2007)。該檢定統計量為 χ_2^2 分佈，當顯著水準為 α ，若

$$\hat{\chi}_2^2 > \chi_{\alpha,2}^2 \dots\dots\dots (19)$$

則拒絕其虛無假設(H_0 ：經驗分佈與理論分佈均等)。

表 1 常態分佈樣本長度與接受區間參數之經驗公式

(迴歸公式為 $\hat{\theta}(n) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + c$ ；理論值(Π_3, Π_4)=(0, 0.1226))

$\hat{\theta}$	Unbiased Estimator				Plotting-Position Estimator			
	a	b	c	R^2	a	b	c	R^2
$\hat{\mu}_{\pi_3}$	0.015408	-0.24443	0	0.29801	0.901271	0.081504	0	0.999941
$\hat{\mu}_{\pi_4}$	0.025842	0.023783	0.1226	0.911105	-0.57639	-2.38489	0.1226	0.999911
$\hat{\sigma}_{\pi_3}^2$	0.185019	0.880504	0	0.999965	0.187095	-0.00278	0	0.99998
$\hat{\sigma}_{\pi_4}^2$	0.084689	0.987506	0	0.999954	0.088334	-0.15724	0	0.999967
$\hat{\sigma}_{\pi_3, \pi_4}$	0.000824	-0.02833	0	0.576252	-0.00026	0.289535	0	0.9985

表 2 極端值第一型分佈樣本長度與接受區間參數之經驗公式

(迴歸公式為 $\hat{\theta}(n) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + c$ ；理論值(Π_3, Π_4)=(0.1699, 0.1504))

$\hat{\theta}$	Unbiased Estimator				Plotting-Position Estimator			
	a	b	c	R^2	a	b	c	R^2
$\hat{\mu}_{\pi_3}$	-0.20453	0.346623	0.1699	0.9971	0.355621	0.779004	0.1699	0.999
$\hat{\mu}_{\pi_4}$	-0.0461	0.181851	0.1504	0.9965	-0.54196	-2.65128	0.1504	0.99999
$\hat{\sigma}_{\pi_3}^2$	0.231485	0.718086	0	0.99999	0.232073	-0.31629	0	1
$\hat{\sigma}_{\pi_4}^2$	0.13157	1.019635	0	0.9999	0.136162	-0.28472	0	0.999975
$\hat{\sigma}_{\pi_3, \pi_4}$	0.107625	0.192062	0	0.9999	0.107635	-0.18832	0	0.99997

表 3 皮爾遜第三型機率分佈樣本長度與接受區間參數之經驗公式

(a) Plotting-Position Estimator

$\theta(n)$	$0 < \gamma \leq 1$				$1 < \gamma \leq 2$				$2 < \gamma \leq 3$				$3 < \gamma \leq 5$			
$\mu_{\pi_3}^{(PI)}$	a	b	c	R^2	a	b	c	R^2	a	b	c	R^2	a	b	c	R^2
	0.5315	-0.2121	$\Pi_3(\gamma)$	0.9811	0.4667	-2.1731	$\Pi_3(\gamma)$	0.9643	-0.0021	4.4645	$\Pi_3(\gamma)$	0.9597	-0.0892	1.1735	$\Pi_3(\gamma)$	0.9892
$\mu_{\pi_4}^{(PI)}$	a	b	c	R^2					a	b	c	R^2				
	0.4833	-0.092	$\Pi_4(\gamma)$	0.9909					0.1991	1.2241	$\Pi_4(\gamma)$	0.9949				
$\sigma_{\pi_3}^{2(PI)}$	a	b	c	R^2												
	0.2133	0.1018	0	0.9933												
$\sigma_{\pi_4}^{2(PI)}$	a	b	c	R^2	a	b	c	R^2								
	0.107	0.1077	0	0.9936	0.103	1.0407	0	0.9919								
$\sigma_{\pi_3}^{(PI), \pi_4}^{(PI)}$	a	b	c	R^2												
	0.0928	0.8986	0	0.9861												

套配模式： $\theta_i(n, \gamma) = \frac{a \cdot \gamma^b}{n} + c$

(b) Unbiased Estimator

$\theta(n)$	$0 < \gamma \leq 0.5$				$0.5 < \gamma \leq 0.9$				$0.9 < \gamma \leq 4.5$				$4.5 < \gamma \leq 5$			
$\mu_{\pi_3}^{(UE)}$	a	b	c	R^2	a	b	c	R^2	a	b	c	R^2				
	-0.1575	0.9892	$\Pi_3(\gamma)$	0.9597	-0.1513	0.9186	$\Pi_3(\gamma)$	0.9898	-0.1845	0.1573	$\Pi_3(\gamma)$	0.9541				
$\mu_{\pi_4}^{(UE)}$	a	b	c	R^2	a	b	c	R^2	a	b	c	R^2	a	b	c	R^2
	0.0246	-0.0664	$\Pi_4(\gamma)$	0.9124	0.0018	-3.7835	$\Pi_4(\gamma)$	0.7545	-0.0323	1.6822	$\Pi_4(\gamma)$	0.9747	-0.8945	-1.02	$\Pi_3(\gamma)$	0.9754
$\sigma_{\pi_3}^{2(UE)}$	a	b	c	R^2												
	0.2282	0.1009	0	0.9917												
$\sigma_{\pi_4}^{2(UE)}$	a	b	c	R^2	a	b	c	R^2								
	0.1094	0.0318	0	0.9858	0.1391	0.8617	0	0.9882								
$\sigma_{\pi_3}^{(UE), \pi_4}^{(UE)}$	a	b	c	R^2												
	0.0945	0.9908	0	0.9882												

套配模式： $\theta_i(n, \gamma) = \frac{a \cdot \gamma^b}{n} + c$

表 4 水文頻率分析常用分佈之線性動差比圖理論線公式、累積分佈函數、分位數函數及其隨機變數之值域

Distribution, X	Theoretical value of (Π_3, Π_4)	Cumulative Distribution Function, F_X(x)	Quantile Function x(F)	Domain of x
Normal	(0, 0.1226)	$F_X(x) = \Phi(x)$ $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x (2\pi)^{-1/2} e^{(-t^2/2)} dt$	$x(F) = \Phi^{-1}(x)$	$-\infty < x < \infty$
Log Normal	$ \Pi_3 < 0.9$, $\Pi_4 = 0.1228 + 0.77518 * \Pi_3^2 + 0.12279 * \Pi_3^4$ $- 0.13638 * \Pi_3^6 + 0.11368 * \Pi_3^8$	$F_X(x) = \Phi(y)$ $y = \ln(x)$	$x(F) = e^{\Phi^{-1}(y)}$	$0 < x < \infty$
Extreme Value Type I	(0.1699, 0.1504)	$F_X(x) = e^{-e^{-\alpha(x-\beta)}}$	$x(F) = \frac{-\ln(-\ln(F))}{\alpha} + \beta$	$-\infty < x < \infty$
Uniform	(0, 0)	$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$	$x(F) = (b-a)F + a$	$a \leq x \leq b$
Exponential	(1/3, 1/6)	$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$	$x(F) = -\ln(1 - F)$	$0 \leq x < \infty$
Pearson Type III	$ \Pi_3 < 0.9$, $\Pi_3 = 6I_{1/3}(\beta, 2\beta) - 3$ $I_x(p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$ $\Pi_4 = 0.1224 + 0.30115 * \Pi_3^2 + 0.95812 * \Pi_3^4$ $- 0.57488 * \Pi_3^6 + 0.19383 * \Pi_3^8$	$F_X(x) = \text{Gamma}(y; \beta, 1)$ $y = \frac{x-\xi}{\alpha}$	$x(F) = \alpha \cdot \text{Gamma}^{-1}(y; \beta, 1) + \xi$ $\text{Gamma}(y; \alpha, \lambda) = \int_0^y \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt$	$\xi \leq x < \infty$
Generalized Extreme Value	$ \Pi_3 < 0.9$, $\Pi_3 = \frac{2(1-3^{-k})}{1-2^{-k}} - 3$ $\Pi_4 = \frac{5(1-4^{-k}) - 10(1-3^{-k}) + 6(1-2^{-k})}{1-2^{-k}}$	$F_X(x) = e^{-e^{y^k}}$	$x(F) = \begin{cases} \xi + \frac{\alpha\{1 - (-\ln F)^k\}}{k}, & k \neq 0 \\ \xi - \alpha \ln(-\ln F), & k = 0 \end{cases}$	If $k=0$: $-\infty < x < \infty$ If $k>0$: $-\infty < x \leq \xi + \frac{\alpha}{k}$ If $k<0$: $\xi + \frac{\alpha}{k} < x < \infty$

2.4 蒙地卡羅模擬技巧

本研究使用機率積分轉換技巧(Mood *et al.*, 1974)進行模擬。首先假設某一機率分佈之累積機率函數為已知，第二，進行均勻分佈 $U(0,1)$ 之出象(realization)樣本，最後將均勻分佈之出象樣本視為該模擬分佈之發生機率，進行反函數運算，代入其分位數函數，求得欲模擬分佈之出象。水文常用機率分佈之特性(Cheng *et al.*, 2007)整理如表 4 所示。

2.5 假設檢定

前人研究(Yue *et al.*, 2002；徐，2004；許，2004；吳，2005)均指出經由序率模擬方法所計算之模擬檢定力能有效比較出不同檢定法之優劣。研究中進行檢定力比較之三種方法皆為適合度檢定法，其虛無假設 H_0 均為經驗分佈與理論分佈相等。型 I 錯誤之定義為當 H_0 為真而拒絕 H_0 之錯誤，亦稱為顯著水準(α)，即 $\alpha = P\{\text{拒絕 } H_0 \mid \text{當 } H_0 \text{ 為真}\}$ 。研究中並以式(20)，

$$\hat{\alpha} = \frac{N_{\text{rejected}}}{N_{\text{total}}} \Bigg|_{H_0 = \text{true}} \quad \dots\dots\dots (20)$$

作為顯著水準之估計方式。其中 N_{total} 為特定機率分佈之總繁衍次數， N_{rejected} 為各適合度檢定法之拒絕次數。

型 II 錯誤之定義為當 H_0 為偽而接受 H_0 之錯誤，常以 β 表示。而檢定力則為當 H_0 為偽而拒絕 H_0 之機率，以 $1-\beta$ 表示，即 $1-\beta = P\{\text{拒絕 } H_0 \mid \text{當 } H_0 \text{ 為偽}\}$ 。由定義可以式(21)，

$$(1 - \hat{\beta}) = \frac{N_{\text{rejected}}}{N_{\text{total}}} \Bigg|_{H_0 = \text{false}} \quad \dots\dots\dots (21)$$

作為檢定力之估計式。

三、研究流程

水文上經常使用於頻率分析之機率分佈包括，常態(Normal)、極端值第一型(Extreme Value Type I, EV1)、皮爾遜第三型(Pearson Type III, PT3)、對數常態(Log Normal, LN)、廣義極端值(Generalized Extreme Value, GEV)等機率分佈，其

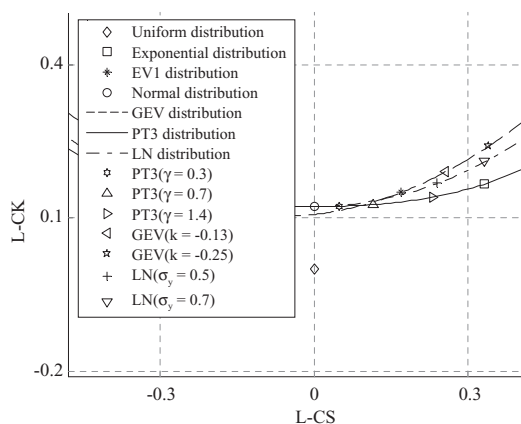


圖 1 各種機率分佈之線性動差比值理論線

它尚有均勻分佈(Uniform)與指數分佈(Exponential, Exp)。

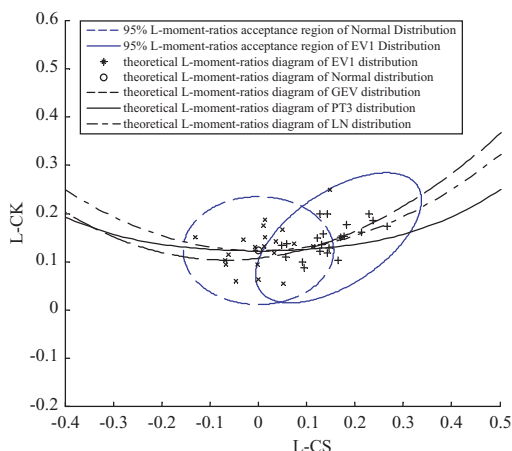
本研究流程包括數個步驟，首先進行 11 種標準化機率分佈之序率繁衍樣本 {Uniform, Exp, EV1, Normal, PT3($\gamma=0.3$), PT3($\gamma=0.7$), PT3($\gamma=1.4$), GEV($k=-0.13$), GEV($k=-0.25$), LN($\sigma_y=0.5$), LN($\sigma_y=0.7$) }，其樣本長度分別為 20、30、40、50、60、75、100、150、250、500、1000，每組產生 1,000 次出象；其次，分別計算各檢定法之檢定統計量，其理論分佈可為 Normal、EV1、或 PT3 分佈，並計數於顯著水準(α)時之拒絕次數。

依據顯著水準(α)與檢定力($1-\beta$)之定義，可由本試驗流程，估算各適合度檢定法之顯著水準($\hat{\alpha}$)，如式(20)與檢定力($1-\hat{\beta}$)，如式(21)。

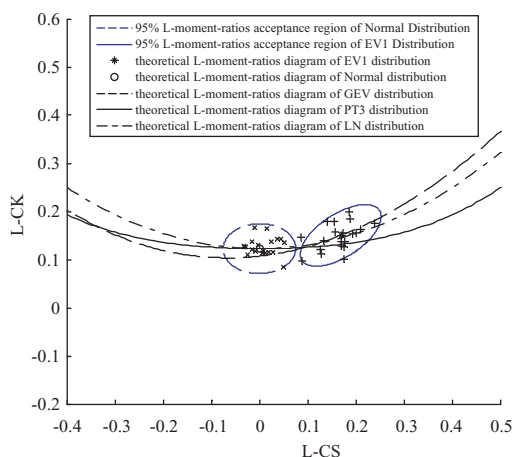
四、結果討論

4.1 線性動差接受區間繪圖法應用於適合度檢定

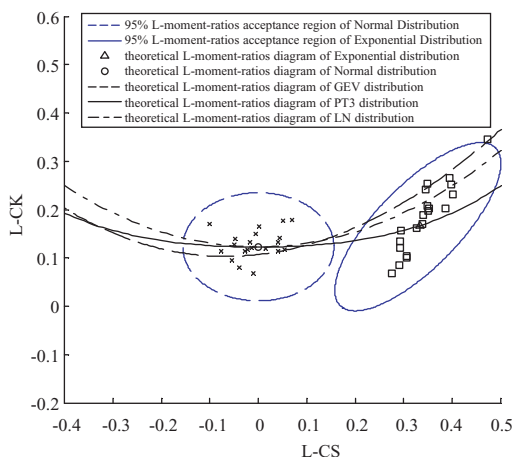
本研究所設定 11 種機率分佈之線性動差理論線如圖 1。進行隨機試驗後，使用機率權重動差不偏估計式(UE)進行線性動差比之推估，點繪於線性動差比圖上，並套配特定線性動差比值 95% 接受區間如圖 2，其(a)(b)顯示，當任一樣本線性動差比值座落於常態機率分佈接受區間之外時，拒絕該樣本為常態機率分佈之假設。接受區間隨著樣本長度增加而變小，而隨機樣本於線性動差比圖上之散佈圖亦隨著樣本長度增加更趨集中，會減少母體機率分佈之誤判率；再者由



(a)樣本長度為50



(b)樣本長度為200



(c)樣本長度為50

圖 2 使用 UE 進行線性動差比值接受區間繪圖法之適合度檢定(+、x、□分別為 EV1、Normal、Exp 分佈之隨機樣本)

圖 2 (a)(c)之比較可得知，當兩機率分佈於線性動差圖上之理論線距離增加時，將減少母體機率分佈之誤判率，由此配合圖 1 之理論線可預測得，線性動差比圖上距離較遠之兩機率分佈，其母體分佈之誤判率小，檢定力高。

比較以傳統之卡方檢定與科司檢定，線性動差比值接受區間繪圖法提供更直接之視覺效果，可以繪圖法進行適合度檢定；且其接受區間隨著樣本增加而明顯縮小，同時，機率分佈之隨機樣本線性動差比值更趨集中於理論線，會減少母體機率分佈之誤判率；當兩機率分佈於線性動差比圖之距離增加則其母體機率分佈誤判率減小，顯示線性動差比值適合度檢定法之優點。

4.2 顯著水準之驗證

各種適合度檢定法顯著水準之驗證方式採用式(20)計算之。配合線性動差比值接受區間法之適用範圍(包括 Normal、EV1、PT3)， H_0 之母體分佈可有 5 種機率分佈 (Normal, EV1, PT3($\gamma=0.3$), PT3($\gamma=0.7$), PT3($\gamma=1.4$))進行變換，因此每一種適合度檢定法有 5 個驗證模擬顯著水準之結果，如圖 3。其顯示三種適合度檢定法顯著水準之驗證結果均接近預設值(5%)。

4.3 檢定力比較

本研究提出之接受區間適合度檢定法與傳統適合度檢定法進行檢定力比較，其結果如表 5，其計算過程採用式(21)。當虛無假設之 H_0 母體分佈與替代假設 H_1 之母體分佈相同時，該模擬檢定力即為模擬顯著水準，由表 5 可印證其數值與預設顯著水準(5%)相當接近；科司檢定相較與卡方檢定，於小樣本時有顯著之應用範圍，表 5(a)顯示當樣本長度為 20 時科司檢定之檢定力局部優於卡方檢定，而線性動差比值接受區間之適合度檢定法顯著優於傳統適合度檢定法。

研究中以 11 種機率分佈代表所有參數空間，用以計算 5 種 H_0 母體機率分佈之檢定力曲線，如圖 4。其明確顯示出線性動差比值接受區間適合度檢定法之檢定力高於傳統法。另一方面，線性動差比圖具有一次進行數種適合度檢定

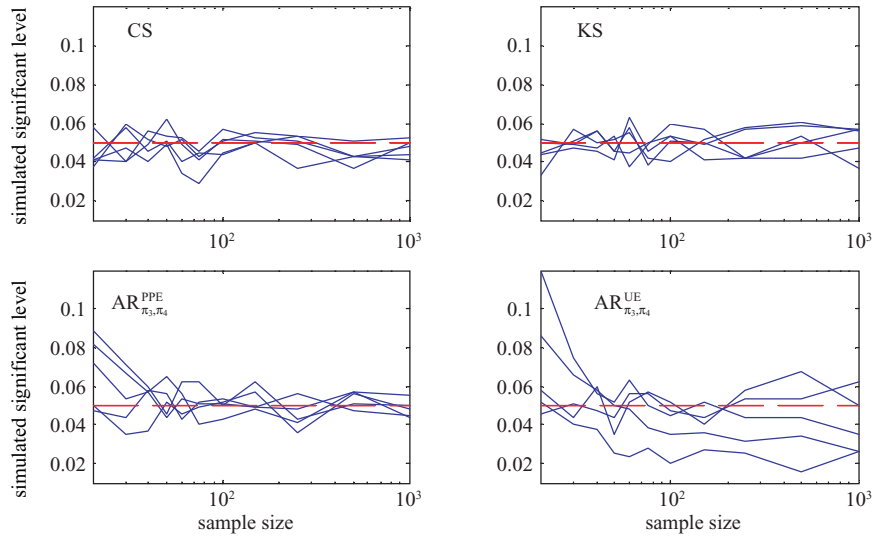


圖 3 三種適合度檢定法之模擬顯著水準

(顯著水準設為 5%，模擬次數為 1000， H_0 之母體分佈分別為 *Normal*、*EV1*、*PT3*($\gamma=0.3$)、*PT3*($\gamma=0.7$)、*PT3*($\gamma=1.4$)；*CS*：卡方檢定、*KS*：科司檢定、 AR_{π_3, π_4}^{PPE} ：使用 *PPE* 進行線性動差比直接接受區間適合度檢定、 AR_{π_3, π_4}^{UE} ：使用 *UE* 進行線性動差比直接接受區間適合度檢定)

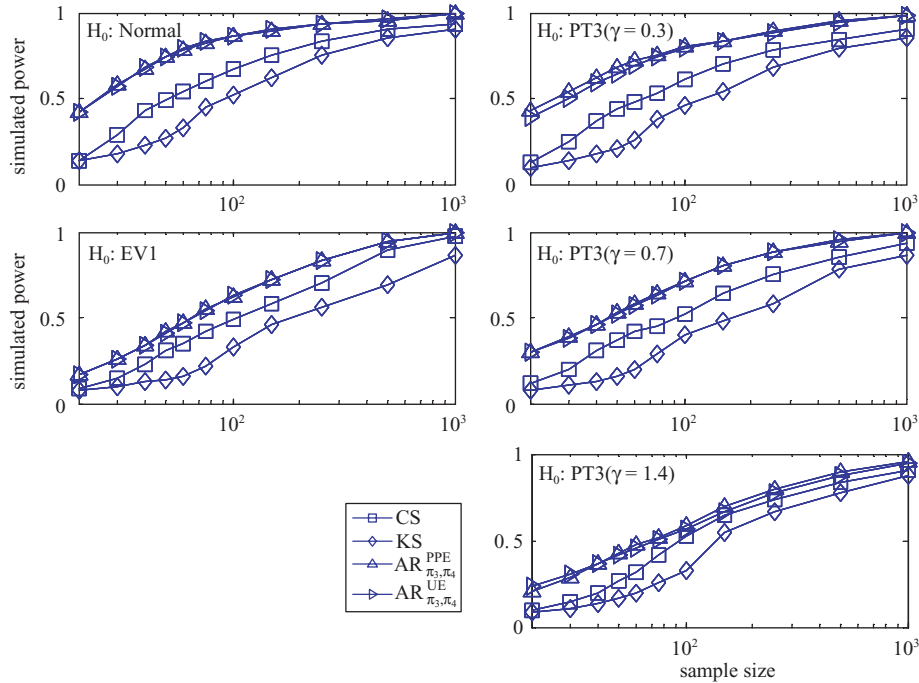


圖 4 各種適合度檢定法之檢定力曲線圖

(*CS*：卡方檢定、*KS*：科司檢定、 AR_{π_3, π_4}^{PPE} ：使用 *PPE* 進行線性動差比直接接受區間適合度檢定、 AR_{π_3, π_4}^{UE} ：使用 *UE* 進行線性動差比直接接受區間適合度檢定； $H_0 \cup H_1 = \{Uniform, Exp, EV1, Normal, PT3(\gamma=0.3), PT3(\gamma=0.7), PT3(\gamma=1.4), GEV(k=-0.13), GEV(k=-0.25), LN(\sigma_y=0.5), LN(\sigma_y=0.7)\}$)

表 5 適合度檢定之模擬檢定力百分比(模擬次數為 1000，顯著水準設為 5%)

(a)樣本長度設為 20																					
H_1 :	H_0 : Normal				H_0 : EV1				H_0 : PT3($\gamma=0.3$)				H_0 : PT3($\gamma=0.7$)				H_0 : PT3($\gamma=1.4$)				
	CS	KS	$AR^{PPE}_{\pi_3, \pi_4}$	$AR^{UE}_{\pi_3, \pi_4}$	CS	KS	$AR^{PPE}_{\pi_3, \pi_4}$	$AR^{UE}_{\pi_3, \pi_4}$	CS	KS	$AR^{PPE}_{\pi_3, \pi_4}$	$AR^{UE}_{\pi_3, \pi_4}$	CS	KS	$AR^{PPE}_{\pi_3, \pi_4}$	$AR^{UE}_{\pi_3, \pi_4}$	CS	KS	$AR^{PPE}_{\pi_3, \pi_4}$	$AR^{UE}_{\pi_3, \pi_4}$	
Normal	4	5	5	5	7	11	25	23	4	5	9	10	5	6	16	21	8	13	38	55	
EV1	6	9	26	29	4	4	5	6	5	6	22	23	5	5	9	14	4	5	9	14	
PT3($\gamma=0.3$)	5	5	7	5	5	7	14	15	6	5	9	9	5	6	9	16	8	10	24	37	
PT3($\gamma=0.7$)	6	8	14	14	6	6	6	7	4	7	14	12	4	5	8	12	5	7	11	22	
PT3($\gamma=1.4$)	8	12	44	44	4	6	6	5	7	8	44	37	5	6	26	20	4	3	7	5	
Uniform	9	11	16	18	16	16	23	24	9	10	54	31	13	12	49	38	17	22	52	42	
Exp	13	20	76	76	7	8	26	27	13	16	78	73	9	11	61	54	6	7	25	13	
GEV($k=-0.13$)	14	14	50	48	6	5	10	10	11	10	42	43	10	6	22	27	7	5	7	13	
GEV($k=-0.25$)	40	23	67	67	21	9	24	24	38	16	64	58	35	11	45	44	25	7	16	18	
LN($\sigma_1=0.5$)	10	12	48	47	5	6	7	7	10	10	41	41	6	6	19	24	4	5	7	10	
LN($\sigma_1=0.7$)	23	20	67	68	11	5	22	22	23	15	65	62	20	8	45	45	11	5	15	14	
(CS：平方檢定、KS：科司檢定、 $AR^{PPE}_{\pi_3, \pi_4}$ ：使用 PPE 進行線性動差比值接受區間適合度檢定、 $AR^{UE}_{\pi_3, \pi_4}$ ：使用 UE 進行線性動差比值接受區間適合度檢定)																					
(b)樣本長度設為 50																					
H_1 :	H_0 : Normal				H_0 : EV1				H_0 : PT3($\gamma=0.3$)				H_0 : PT3($\gamma=0.7$)				H_0 : PT3($\gamma=1.4$)				
	CS	KS	$AR^{PPE}_{\pi_3, \pi_4}$	$AR^{UE}_{\pi_3, \pi_4}$	CS	KS	$AR^{PPE}_{\pi_3, \pi_4}$	$AR^{UE}_{\pi_3, \pi_4}$	CS	KS	$AR^{PPE}_{\pi_3, \pi_4}$	$AR^{UE}_{\pi_3, \pi_4}$	CS	KS	$AR^{PPE}_{\pi_3, \pi_4}$	$AR^{UE}_{\pi_3, \pi_4}$	CS	KS	$AR^{PPE}_{\pi_3, \pi_4}$	$AR^{UE}_{\pi_3, \pi_4}$	
Normal	5	5	6	4	15	17	62	57	7	5	10	10	8	9	31	39	24	30	90	92	
EV1	17	15	63	61	6	4	5	4	11	8	41	38	7	6	13	15	6	6	14	17	
PT3($\gamma=0.3$)	6	6	9	11	10	10	36	35	5	5	5	5	5	5	8	12	16	16	74	76	
PT3($\gamma=0.7$)	9	8	36	34	6	6	7	9	7	6	16	14	5	5	7	5	12	9	34	37	
PT3($\gamma=1.4$)	41	25	90	89	9	7	14	13	27	15	79	77	14	10	46	40	5	5	4	3	
Uniform	18	16	74	72	42	33	86	86	22	14	85	71	26	22	87	81	52	46	96	90	
Exp	100	44	100	100	75	15	76	74	98	33	99	99	96	22	94	90	41	8	40	25	
GEV($k=-0.13$)	57	30	91	90	13	8	20	18	45	23	82	73	26	13	44	44	9	7	13	15	
GEV($k=-0.25$)	97	58	98	98	72	23	52	51	96	53	95	92	88	38	76	77	61	25	30	29	
LN($\sigma_1=0.5$)	48	26	89	88	9	7	15	13	36	18	78	73	21	9	42	41	6	4	8	7	
LN($\sigma_1=0.7$)	96	44	99	99	57	13	52	56	94	37	96	95	80	24	83	81	39	9	27	28	
(CS：平方檢定、KS：科司檢定、 $AR^{PPE}_{\pi_3, \pi_4}$ ：使用 PPE 進行線性動差比值接受區間適合度檢定、 $AR^{UE}_{\pi_3, \pi_4}$ ：使用 UE 進行線性動差比值接受區間適合度檢定)																					

之可能，且無須對一、二階線性動差進行估計，相對於傳統方法必須估計所有參數之限制，更凸顯線性動差比值接受區間適合度檢定法之優勢。同時，線性動差比值可進行繪圖法之適合度檢定，具備視覺解釋能力，有助於區域化最適分佈之選取，未來進行水文頻率分析之工作時，應以線性動差比值接受區間法取代傳統適合度檢定法。

本研究基於取自同一母體之樣本進行檢定力分析，然而，實際水文分析時難確保分析樣本來自同一母體，因此可接續進行當樣本來自不同母體之延伸性研究。

五、結 論

本研究認為，以線性動差比值接受區間法能有效糾正樣本長度之影響，能提供較嚴謹、精確之結論，同時增加水文頻率分析選定最適機率分佈之精確性。

本研究主要結論有以下各點：

1. 線性動差比值接受區間繪圖法提供直接之視覺效果，可以繪圖法進行適合度檢定。
2. 線性動差比值接受區間隨著樣本增加而明顯縮小，同時，機率分佈之隨機樣本線性動差比值更趨集中於理論線，會減少母體機率分佈之誤判率。
3. 兩機率分佈於線性動差比圖上理論線之距離增加時，其母體機率分佈之誤判率減小。
4. 三種適合度檢定法顯著水準之驗證結果均接近預設值(5%)。
5. 樣本長度為 20 時，科司檢定之檢定力局部優於卡方檢定。
6. 線性動差比值接受區間適合度檢定法之檢定力顯著高於傳統法。
7. 線性動差比圖具有一次進行數種適合度檢定之可能，且無須對一、二階線性動差進行估計，而傳統方法必須估計所有參數之限制。同時，線性動差比值可進行繪圖法之適合度檢定，具備視覺解釋能力，有助於區域化最適分佈之選取，未來進行水文頻率分析之工作時，應以線性動差比值接受區間法取代傳統適合

度檢定法。

參考文獻

1. 吳宜珍，2005，「序率模擬應用於水文分佈檢定信賴區間之建立」，國立臺灣大學生物環境系統工程學研究所碩士論文。
2. 徐宏瑋，2004，「降雨量變遷趨勢檢定與分析」，國立臺灣大學生物環境系統工程學研究所碩士論文。
3. 許介維，2004，「序率模擬應用於機率分佈適合度檢定之評估」，國立臺灣大學生物環境系統工程學研究所碩士論文。
4. 鄭克聲、劉俊志、吳宜珍、陳品妤，2007，「序率模擬應用於線性動差信賴區間建立及機率分佈檢定之研究」，國科會計畫報告。
5. 顏月珠，1992，無母數統計方法，第 38~39 頁
6. 顏月珠，2001，應用統計學，第 513 頁。
7. Cheng, K. S., Chiang, J. L., and Hsu, C. W., 2007, "Simulation of probability distributions commonly used in hydrological frequency analysis", *Hydrological Processes*, Vol. 21(1), pp. 51-60.
8. Cheng, K. S., Wu, Y. C., and Liou, J. J., 2006, "Establishing Confidence Interval for Goodness-of-Fit Test by Stochastic Simulation", *The 6th Japan-Taiwan Joint Seminar on Natural Hazard Mitigation*, Japan.
9. Chow, K. C. and Watt, W. E., 1994, "Practical use of the L-moments", Stochastic and Statistical Methods in Hydrological and Environmental Engineering, Vol. 1 (ed. by K. W. Hipel), pp. 55-69. Kluwer Academic Publishers, Boston, Massachusetts, USA.
10. Juha, K. 2005, "The Lmoments package in R: L-moments and Quantile Mixtures". URL (<http://mirrors.dotsrc.org/cran/src/contrib/Descriptions/Lmoments.html>)
11. Hosking, J. R. M., 1990, "L-moment: Analysis and Estimation of Distribution Using Linear Combinations of Order Statistics", *Journal of*

- the Royal Statistical Society Series B*, 52(1), pp. 105-24.
12. Hosking, J. R. M. and Wallis, J. R., 1993, "Some Statistics Useful in Regional Frequency Analysis", *Water Resources Research*, 29(2), pp. 271-81.
 13. Hosking, J. R. M. and Wallis, J. R., 1995, "A comparison of unbiased and plotting-position estimators of L-Moments", *Water Resources Research*, 31(8), pp. 2019-25.
 14. Hosking, J. R. M. and Wallis, J. R., 1997, Regional Frequency Analysis: An Approach Based on L-Moment, Cambridge, England: Cambridge University Press.
 15. Landwehr, J. M., Matalas, N. C. and Wallis, J.R., 1979, "Probability Weighted Moments Compared with Some Traditional Techniques in Estimating Gumbel Parameters and Quantiles", *Water Resources Research*, 15(5), pp. 1055-64.
 16. Liou, J. J., Wu, Y. C., and Cheng, K. S., 2007, "Establishing Acceptance Regions for L-moments Based Goodness-of-Fit Tests by Stochastic Simulation", *Journal of Hydrology* (in revision).
 17. Mood, A. M., Graybill, F. A. and Boes, D. C., 1974, Introduction to the Theory of Statistics, McGraw-Hill: New York.
 18. Vogel, R. M., McMahon, T. A. and Chiew, H. S., 1993, "Floodflow Frequency Model Selection in Australia", *Journal of Hydrology*, 146, pp. 421-49.
 19. Vogel, R. M. and Wilson, I., 1996, "Probability Distribution of Annual Maximum, Mean, and Minimum Streamflows in the United States", *Journal of Hydrologic Engineering*, 1(2), pp. 69-76.
 20. William, H. A., 2006, "The lmomco package in R: L-moments, Trimmed L-moments, L-comoments, and many distributions". URL (<http://cran.cnr.berkeley.edu/src/contrib/Descriptions/lmomco.html>)
 21. Yue, S., Pilon P., and Cavadias, G., 2002, "Power of the Mann-Kendall and Spearman's rho tests for detecting monotonic trends in hydrological series", *Journal of Hydrology*, 259, pp. 254-71.

收稿日期：民國 96 年 10 月 17 日

修正日期：民國 96 年 11 月 9 日

接受日期：民國 96 年 11 月 13 日