農業工程學報　第 53 卷第 3 期
中華民國 96 年 9 月出版

Journal of Chinese Agricultural Engineering
Vol. 53, No. 3, September 2007

利用無限遠域邊界條件求解近域之壩底滲流流場 - 理論與應用

A Semi-analytical Method for Near-field Seepage Flow Problem Considering the Influence of Infinite Far-field Domain -- Theory and Application

逢甲大學水利工程學系
教授兼系主任
許 少 華*
Shaohua Marko Hsu

僑光技術學院
副教授
洪 碧 芳
Pi-Fang Hung

逢甲大學土木及水利工程
研究所碩士
陳 又 任
Yu–Jen Che

摘　　要

求解壩體基礎孔隙介質中的滲流情況，通常需取上下游一較遠的區域作為求解範圍，以避免上下游未知的邊界效應影響。然而至今並無明確準則告知多大的範圍才算恰當。於前人的試驗研究與數值模擬中發現上下游端遠距離的邊界影響仍大，不可忽視。以往在求解壩底下有限範圍內之滲流流場，在上下游邊界部分多以定水頭或斜率式方式給定，但其實根本上是未知的物理條件。有鑑於此，本文以半解析解(semi-analytical method)的方式，結合壩體底下近域範圍內的數值解與其下游的解析解來求滲流流場。先求得壩底之下游無限遠域的 Laplace 方程式解析解之通式，並將此解析解之通式的左邊界(未知水頭函數)離散成無限多項之線性組合，以其斜率式作為近域範圍之下游邊界條件並與近域數值解結合求解出全域之滲流流場。本文除了將近域範圍縮小以驗證半解析法是否正確之外，最後也模擬壩體不透水效應及不規則沖刷坑來跟前人之試驗研究比較及探討。

關鍵詞：滲流，拉普拉斯方程式，有限差分法，不規則域，近域，遠域。

ABSTRACT

In order to obtain the seepage flow field under a dam-reservoir system, it is usually acceptable that only a finite domain of near field under the dam is considered. The far field domain, although can be influential, is usually neglected as long as we assume that

*通訊作者，逢甲大學水利工程學系教授兼系主任，407 台中市西屯區文華路 100 號，shhsu@fcu.edu.tw

the near field is large enough. The boundary conditions for the near field is usually Dirichlet or Numman type, which imposes either known values or gradients on the boundary. So far, there is no clear rule to tell that how long of the near field is large enough to neglect the influence from the far away domain. Base on previous experimental studies, the downstream boundary can be very important and must not be overlooked. A semi-analytical method is proposed in this study, in which the analytical solution of the Laplace equation in the far field is solved first and to be included in one boundary condition of the near field utilizing a discretizing technique. A finite difference scheme is employed to solve the seepage flow field in the near field. The method is verified in a rectangular domain and then applied to a near-field case with an irregular geometry.

Keywords: Seepage, Laplace equation, Finite difference, Irregular domain, Near field, Far field.

一、前　言

滲流的推求是水力學與大地工程不可缺少的組成部份，也是水工結構、水文地質、地下水、農田水利等學科的部份內容。構築任何壩體必須控制通過壩身和地基的滲流，以防止土體因受滲流作用而發生危險的管湧與滑坡等破壞，或因滲漏損失過大而使工程效益降低。這種考量對於土石壩的建造尤其重要。由於土石壩壩身主體是多孔介質的土石，屬於大規模的填方，因此不論土石壩的建造技術如何的高超，必有滲流現象發生。其他種類壩體，包括混凝土壩或小型攔砂壩，也都需考慮滲流作用而可能造成的破壞威脅。水庫蓄水後，必然通過壩體、壩基和壩的兩岸而產生滲流，若此種滲流是在設計控制之下，壩任何部位的土體都不會發生滲透破壞，則為正常滲流；反之，對能引起土體滲透破壞，則為異常滲流，或稱之滲漏[1]。於土石壩運行中，可允許正常滲流的存在，而對異常滲流，則必須採取措施，以避免破壞事故的發生，而危及生命及財產的安全。

攔砂壩因具有控制沈滓輸送、穩定河床、調整河寬、控制流心及防止兩岸崩坍等功能，因此常用於山區河川之整治工程且為上游水土保持之重要手段。台灣山區攔砂壩之破壞，以副壩或護坦下游受淘刷進而危及主壩為最常見。其破壞之主因乃當水流流過副壩或護坦，因上下游水位落差造成投潭水而使水流以相當之速度衝擊下游河床，在壩的下游產生一沖刷坑，在洪水來臨時，強大的水流易造成護坦下游沖刷破壞而逐漸往上危及主壩。而沖刷坑不但會影響到壩基的穩固，更會縮短壩基下的滲流流線，因此對攔砂壩之安定性就顯得格外之重要。

滲流計算的任務在於求得滲流場內的水頭、壓力、坡降與滲流量等水力要素的分佈，以供土石壩或攔砂壩的設計。在水庫運轉管理中，也要進行滲透穩定分析，選擇合理的防滲及排滲設計方案，以有效的監控滲流。

呂(1995)[2]針對傳統防砂壩的缺點，研提改進的意見，在傳統防砂壩壩基下裝置截水牆，上游鋪設不透水布，進行沖刷坑剖面實驗，以染料顯形試驗繪得滲流流場，並利用壓力計量測沖刷坑之壓力分佈情形。其結論為沖刷坑後半部及下游皆為入滲流，且沖刷坑最深處之入滲勢能極大。許、蘇、林(1998)[3]與林(1996)[4]以 SOR 五點法解 Laplace 方程式模擬四種沖刷坑達平衡之情況並繪出四種不同條件下，於壩體上、下游土體中之等勢能線及滲流流速向量分佈。他們並分析比較沖刷坑中出滲現象之影響，以提供壩體安定性分析時之參考。文中並探討壩上游若以不透水布覆蓋，則可減低壩基附近之滲流力(能量坡降)約二至三成，然不透水布長度若增至一定限度以

上，其邊際效益即平緩下來。

許與劉(1998)[5]以染料顯形試驗與數值模擬來分析攔砂壩模型底下之滲流流場，於有投潭水條件下分三種尾水高度來討論其間之差異，並比較及探討林(1996)[4]的數值模擬結果與呂(1995)[2]之攔砂壩滲流試驗之差異，發現尾水的高低與下游邊界水位條件之影響甚大。其結論為當尾水位較高時(接近林(1996)[4]之假設)則染料分佈情形較接近林(1996)[4]的數值模擬結果，若尾水位較低時，則染料分佈與呂(1995)[2]的實驗近似，因此得知下游尾水位的影響不可忽視，其原因乃因下游邊界上的壓力分佈不同所致。此外，並認為呂(1995)[2]的結果乃因試驗控制條件中下游尾水位極低所造成的入滲現象。

Tsai 及 Lee(1991)[6]，將壩與庫水系統分成兩個結構(壩-基礎及水域)，水域亦分為兩個區域，近域及遠域，其中遠域包含至無限遠處，近域的控制方程式乃為非線性速度勢能函數式，而遠域則假設為線性式。他們並以半解析法(semi-analytical method)技巧，在二維地震力的分析上，有效地模擬了在遠域上之散射條件，並得到近域之數值解。

計算壩基孔隙介質中滲流流場之一大困擾乃上下游邊界條件之給定，因土地乃無限延伸的，且通常無明顯的水理邊界，以往的計算只得盡量取大一點的範圍來計算，以使邊界上的假設條件較不影響主要的流場型態。

從許、蘇、林(1998)[3]與林(1996)[4]的數值模擬結果以及許、蘇、林(1998)[3]與許、劉(1998)[5]的實驗比較得知，下游尾水位條件之取捨足以影響整個或大半個流場的變化。有鑑於此，為了修正實驗砂箱下游尾水位條件與實際情況不同而產生的流場差異，本文乃嘗試以半解析法的精神來求解，而半解析法求解之示意圖如圖 1 所示。由圖 1，先求解壩下游遠域 B 區到近域 A 區右邊界之解析解，再結合數值方法來求解近域 A 區內之滲流情況，最後便可求得全域滲流流場之逼近解。如此亦可補足實驗砂箱因長度不足所造成的邊界條件影響。

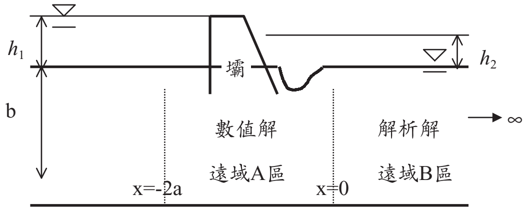

圖 1　壩體求解示意圖

二、理論分析

2.1 滲流控制方程式

二維的滲流流場在若干假設條件下，可以以不考慮速度水頭之總水頭 $h\left(=z+\dfrac{p}{\gamma}\right)$ 為變數的 Laplace 式為控制方程式。經由二維之連續方程式與達西方程式合併推導可簡化為 Laplace 方程式如下：

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0 \quad \text{or} \quad \nabla^2 h(x,y)=0 \quad \text{..............} \ (1)$$

2.2 下游遠域解析解邊界之給定與求解過程

林(1996)[4]以有限差分法求解壩底下近域不規則區域的二維 Laplace 方程式(1)，並於許、劉(1998)[5]之實驗結果發現土體下游之排水設施對沖刷坑下游之滲流流場有決定性之影響。若排水位太低將使試驗土體之下邊界壓力值太小，造成沖刷坑下游為完全入滲之情況，但若要模擬實際土體為無限延長之情況時，則尾水水位勢必要抬高，然而若抬高至將近土體高度將產生迴水現象致使沖刷坑內及其下游之流況改變也與實際情況不符。因此尾水位要抬高多少方近似現場情況乃是未知的。

由上述可知，林(1996)[4]與許、劉(1998)[5]等人之試驗研究由於下游邊界條件諸多之限制，因此得需針對不同之流量而有不同之尾水高度，才不致造成完全入滲或產生迴水現象。有鑑於此，為了克服下游邊界條件之變動而產生上述之困擾，需考慮到下游無限遠限域邊界影響到壩底下近域邊界之滲流情形，本文乃發展半解析法來求解。壩底近域區之邊界通常為不規則形狀，

故需以數值方法來模擬，下游遠域區則可先以解析解解出。

考慮一壩體下游厚度為 b 之無限遠域範圍如圖 2 所示，給定下游遠域 B 區之各邊界條件如下：

(1) 下游無限遠處假設：$h(x \to \infty, y) = h_\infty$ (有界)，$0 < y < b$

(2) 上邊界：為一定水頭，$h = h_2$，$0 \le x < \infty$，$y = b$

(3) 下邊界：為一不透水層：
$\frac{\partial h}{\partial y} = 0$，$0 \le x < \infty$，$y = 0$

(4) 左邊界與近域 A 區交界部份為一未知函數，令：$h(0, y) = g(y)$，$0 < y < b$

為了利於求解此偏微分方程式，調整下游之基準面高度，因此重新定義新變數 $H(x,y)$：

$$H(x,y) = h(x,y) - h_2 \quad \text{..................................(2)}$$

重新定義邊界，如圖 2：

(1) 右邊界 $H(x \to \infty, y) = H_\infty$ (有界)

(2) 上邊界 $H(x,b) = h_2 - h_2 = 0$

(3) 下邊界 $\frac{\partial H}{\partial y} = 0$

(4) 左邊界 $H(0,y) = g(y) - h_2 = f(y)$

由上述之邊界條件則可利用分離變數法解出壩下游之解析解如(3)式，(3)式之求解過程詳附錄 A。

$$h(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-\left[\frac{(2n-1)\pi}{2b}x\right]} \cdot \cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{2b}y\right] + h_2$$

....................................(3)

$$H(x,y) = h(x,y) - h_2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-\left[\frac{(2n-1)\pi}{2b}x\right]} \cdot \cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{2b}y\right]$$

其中

$$A_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(y) \cdot \cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{2b}y\right] \quad \text{............(4)}$$

其中 $f(y)$ 為交界面未知水頭函數，(4)式之求解過程詳附錄 B。

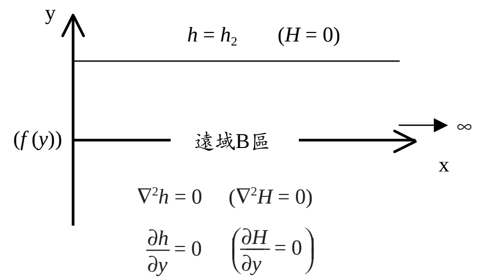

圖 2　下游遠域 B 區邊界條件示意圖

2.3 近域數值解法

欲模擬與分析的對象乃壩體周圍基礎孔隙介質附近近域之二維滲流流場。於壩基土壤附近及上下游附近的土體假設具有均一性、等向性及不可壓縮條件；水流為穩定流條件下，可應用 Laplace 方程式做為壩基近域之控制方程式。以 Laplace 五點差分法對任一特定點(i,j)之差分式 (Gerald & Wheatley,1993)[7]為：

$$\frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

.... (5)

若將其進一步化成 SOR 式 (successive overrelaxation)以加速其收斂：

$$h_{i,j}^{(k+1)} = h_{i,j}^{(k)} + \frac{\omega}{4}\left[h_{i+1,j}^{(k)} + h_{i-1,j}^{(k+1)} + h_{i,j+1}^{(k)} + h_{i,j-1}^{(k+1)} - 4\,h_{i,j}^{(k)}\right] \quad .(6)$$

其中 k 為疊代的次數，ω 取 1 至 2 之間以加速收斂的速度。

2.4 網格分割與配置

近域 A 區由於多為不規則邊界，乃採數值解法。以 Laplace 五點差分法來計算，為了求解的精確度一致起見，將計算的區間分隔成等間距，就數值運算精確度考量，若需計算一定的距離，將其分成愈多段，間距愈短則計算出來的結果也將愈精確。於實際的應用中，需考慮是否因所取的間距過大而造成數值不精確的現象發生。

三、半解析法介紹

半解析法之原則乃要求近域 A 區的數值解與遠域B區的解析解需於兩者的邊界上一致且連續。由於近域 A 區和遠域 B 區的控制方程式皆為 Laplace 方程式，且邊界上之交界面水頭分佈 $f(y)$ 乃未知之水頭條件，故可利用近域 A 區及遠域 B 區之邊界斜率一致之條件，再將交界面水頭 $f(y)$ 線性離散化，最後可得出解析解之假設式 $\frac{\partial H}{\partial x}$ 與 $\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{x=x^*}$ 的兩者間之關係比例矩陣，其中 x^* 為 $f(y)$ 所取之 x 軸座標，並利用數值差分式與解析解合併推導出所要求得之半解析法之條件公式。

3.1 交界面水頭之線性離散化

為了將交界面水頭 $f(y)$ 離散化，以與數值方法結合求解，利用有限元素法中相鄰兩點線性內差[8],[9]，則可得 $f(y)$ 之近似式，如(7)式：

$$f_j(y) = N_j(y)\cdot H_{0,j} + M_{j+1}(y)\cdot H_{0,j+1},$$

當 $y_j \le y \le y_{j+1}$ .... (7)

其中

$$N_j(y) = \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} \ ,$$

$$M_{j+1}(y) = \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} = 1 - N_j(y)$$

$j = 1,2\cdots,m$ ， $y_1 = 0, y_m = b$ ，m 乃離散之點數。$H_{0,j}$ 表位於 x=0 處(交界面)，第 j 點之水頭值。

3.2 數值解右邊界與解析解左邊界結合關係式

以下的步驟乃為了尋求近域 A 區與遠域 B 區邊界上的斜率式 $\frac{\partial H}{\partial x}$ 與交界面上的水頭分佈 $f(y)$ 的結合關係式，並將交界面之水頭分佈 $f(y)$ 線性離散化，最後可求出 $\frac{\partial H}{\partial x}$ 與 $f(y)$ 的兩者間之關係比例，並以矩陣式表示，步驟分別如下：

首先將(2b)式對 x 取偏微分得(8)式：

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \left[\frac{(2n-1)\pi}{2b}\right]\cdot e^{-\left[\frac{(2n-1)\pi}{2b}x\right]}\cdot \cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{2b}y\right] \quad (8)$$

其中的 A_n 以(4)式代入可得(9)式：

$$\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{2}{b}\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)\pi}{2b}\right]\int_0^b f(y)\cdot\cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{2b}y\right]dy\cdot\cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{2b}y\right]\right\} \ ....(9)$$

令 $B_n = \frac{(2n-1)\pi}{2b}$ ，且 $G(n,y) = \frac{2}{b}\cdot(-B_n)\cdot\cos B_n y$ ，可將(9)式表示如下：

$$\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} G(n,y)\cdot\int_0^b f(y)\cdot\cos B_n y dy \ ....(10)$$

將(7)式代入 $\int_0^b f(y)\cdot\cos B_n y dy$ 並整理可得(11)式：

$$\int_0^b f(y)\cos B_n y dy = \sum_{j=1}^{m-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\left[N_j(y)H_{0,j} + M_{j+1}(y)H_{0,j+1}\right]\cdot\cos B_n y dy = \left[\int_{y_1}^{y_2} N_1(y)\cdot\cos B_n y dy\right]\cdot H_{0,1}$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\left[\int_{y_j}^{y_{j+1}} M_{j+1}(y)\cdot\cos B_n y dy + \int_{y_{j+1}}^{y_{j+2}} N_{j+1}(y)\cos B_n y dy\right]\cdot H_{0,j+1}$$

$$+\left[\int_{y_{m-1}}^{y_m} M_m(y)\cdot\cos B_n y\right]\cdot H_{0,m} \ ....(11)$$

將(11)式代回(10)式，整理得：

$$\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{x=0}=\left[\sum_{n=1}^{\infty}G(n,y)\int_{y_1}^{y_2}N_1(y)\cdot\cos B_n y dy\right]\cdot H_{0,1}\ ..(12)$$

$$+\sum_{j=1}^{m-2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}G(n,y)\left(\int_{y_j}^{y_{j+1}}M_{j+1}(y)\cdot\cos B_n y dy+\int_{y_{j+1}}^{y_{j+2}}N_{j+1}(y)\cos B_n y dy\right)\right]\cdot H_{0,j+1}$$

$$+\left[\sum_{n=1}^{\infty}G(n,y)\int_{y_{m-1}}^{y_m}M_m(y)\cdot\cos B_n y dy\right]\cdot H_{0,m}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

令 $\frac{\partial H_j}{\partial x}=\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=y_j}}=\left[A_{j,i}\right]_{1\times m}\cdot\left[H_{0,j}\right]_{m\times 1}$

其中 $\left\lfloor A_{j,i}\right\rfloor_{1\times m}$ 為 $\frac{\partial H_j}{\partial x}$ 與 $\left\lfloor H_{0,j}\right\rfloor_{m\times 1}$ 兩者間之關係比例，以矩陣方式表示，

並可將 $\left\lfloor A_{j,i}\right\rfloor_{1\times m}$ 整理如下並分成三部分表示，

$$A_{j,1}=\sum_{n=1}^{\infty}G(n,y_j)\int_{y_1}^{y_2}N_1(y)\cdot\cos B_n y dy$$

$$A_{j,i+1}=\sum_{n=1}^{\infty}G(n,y_j)\left[\int_{y_i}^{y_{i+1}}M_{i+1}(y)\cdot\cos B_n y dy+\int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}}N_{i+1}(y)\cdot\cos B_n y dy\right]\quad,\quad i=1,2\cdots m-1$$

$$A_{j,m}=\sum_{n=1}^{\infty}G(n,y_j)\int_{y_{m-1}}^{y_m}M_m(y)\cdot\cos B_n y dy$$

根據三角函數不定積分公式，

$$\int y\cdot\cos B_n y dy=\frac{y}{B_n}\cdot\sin B_n y+\frac{1}{B_n^{\ 2}}\cos B_n y+C$$

代入分別可求得 $A_{j,1}$ ，$A_{j,i+1}$ ，$A_{j,m}$ ，經整理如下：

$$A_{j,1}=\sum_{n=1}^{\infty}G(n,y_j)\int_{y_1}^{y_2}N_1(y)\cdot\cos B_n y dy$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{(2n-1)\pi}{b^2}\cdot\cos B_n y_j\cdot\frac{1}{y_1-y_2}\left[\left(\frac{y_2}{B_n}-\frac{y_2}{B_n}\right)\sin B_n y_2-\left(\frac{y_1}{B_n}-\frac{y_2}{B_n}\right)\sin B_n y_1+\frac{1}{B_n^{\ 2}}\cos B_n y_2-\frac{1}{B_n^{\ 2}}\cos B_n y_1\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2B_n}{b}\cos B_n y_j\cdot\frac{1}{y_1-y_2}\cdot\left[\frac{-1}{B_n}(y_1-y_2)\cdot\sin B_n y_1+\frac{1}{B_n^{\ 2}}(\cos B_n y_2-\cos B_n y_1)\right]\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

$$A_{j,i+1}=\sum_{n=1}^{\infty}G(n,y_j)\left[\int_{y_i}^{y_{i+1}}M_{i+1}(y)\cdot\cos B_n y dy+\int_{y_{i+1}}^{y_{i+2}}N_{i+1}(y)\cdot\cos B_n y dy\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2B_n}{b}\cos B_n y_j\cdot\left\{\frac{1}{y_{i+1}-y_i}\cdot\left[\frac{1}{B_n}(y_{i+1}-y_i)\sin B_n y_{i+1}+\frac{1}{B_n^{\ 2}}(\cos B_n y_{i+1}-\cos B_n y_i)\right]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{y_{i+1}-y_{i+2}}\left[\frac{-1}{B_n}(y_{i+1}-y_{i+2})\cdot\sin B_n y_{i+1}+\frac{1}{B_n^{\ 2}}(\cos B_n y_{i+2}-\cos B_n y_{i+1})\right]\right\},\ i=1,2\cdots m-1\ \ldots(14)$$

$$A_{j,m}=\sum_{n=1}^{\infty}G(n,y_j)\int_{y_{m-1}}^{y_m}M_m(y)\cdot\cos B_n y dy$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2B_n}{b}\cdot\cos B_n y_j\cdot\frac{1}{y_m-y_{m-1}}\cdot\left[\frac{1}{B_n}(y_m-y_{m-1})\sin B_n y_m+\frac{1}{B_n^{\ 2}}\left(\cos B_n y_m-\cos B_n y_{m-1}\right)\right]\ .(15)$$

3.3 數值差分式與解析解合併

最後再利用一階精度之數值差分式：$\frac{\partial H_j}{\partial x}=\frac{H_{0,j}-H_{-1,j}}{\Delta x}$, j = 1,2 …, m，其中 $i=0$ 代表交界面之 x = 0 之游標，$H_{-1,j}$ 表位於 $i=-1$ 處亦即交界面左邊一格，第 j 點之水頭值。並將數值差分式與解析解之假設式以矩陣型態合併如下式：

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial x}\\ \frac{\partial H_2}{\partial x}\\ \vdots\\ \frac{\partial H_m}{\partial x}\end{bmatrix}=\left[A_{j,i}\right]_{m\times m}\cdot\left[H_{0,j}\right]_{m\times1}=\frac{1}{\Delta x}\left\{\left[H_{0,j}\right]_{m\times1}-\left[H_{-1,j}\right]_{m\times1}\right\}\ \cdots\cdots(16)$$

令 $g(y)=h_{0,j}$ ，則 $\left[H_{0,j}\right]_{m\times1}=\left[h_{0,j}\right]_{m\times1}-\left[h_2\right]_{m\times1}$ ，$\left[H_{-1,j}\right]_{m\times1}=\left[h_{-1,j}\right]_{m\times1}-\left[h_2\right]_{m\times1}$

代入(16)式化簡可得

$$\left\{\left[A_{j,i}\right]_{m\times m}-\frac{1}{\Delta x}\cdot I\right\}\cdot\left[h_{0,j}\right]_{m\times1}=\left[A_{j,i}\right]_{m\times m}\cdot\left[h_2\right]_{m\times1}-\frac{1}{\Delta x}\cdot I\cdot\left[h_{-1,j}\right]_{m\times1}$$

經移項整理得：

$$\left[h_{0,j}\right]_{m\times1}=\left\{\left[A_{j,i}\right]_{m\times m}-\frac{1}{\Delta x}\cdot I\right\}^{-1}\cdot\left\{-\frac{1}{\Delta x}\right\}\cdot I\cdot\left[h_{-1,j}\right]_{m\times1}$$
$$+\left\{\left[A_{j,i}\right]_{m\times m}-\frac{1}{\Delta x}\cdot I\right\}^{-1}\cdot\left[A_{j,i}\right]_{m\times m}\cdot\left[h_2\right]_{m\times1}\ \cdots\cdots(17)$$

其中 I 為單位矩陣。(17)式即為交界面水頭 $\left[h_{0,j}\right]_{m\times1}$ (x=0)與其前一排水頭 $\left[h_{-1,j}\right]_{m\times1}$ $(i=-1)$ 兩者之半解析法條件公式。

四、半解析法測試與驗證

4.1 解析解級數項數分析

於下游遠域 B 區左邊界與近域 A 區右邊界之結合求解過程中，在經過若干的假設及整理最後可得(16)式，值得注意的是，$\frac{\partial H}{\partial x}$ 與交界面水頭 $f(y)$ 之關係比例不規則係數矩陣 $\left[A_{j,i}\right]_{m\times m}$ 由於包含了解析解級數項數 n 之因子，因此如何取捨解析解級數項數 n 之值，不能馬虎。在數值計算中，不規則係數矩陣 $\left[A_{j,i}\right]_{m\times m}$ 內之各項係數需取 1200 項以上方能全部收斂於定值，但考慮數值計算的效率上取 1200 項所花費時間過長，僅考慮近域 A 區之各個水頭值若能達到收斂且誤差不超過 5%為原則之情況下來取捨，因此，本文即以 600 項作為解析解級數的項數。

4.2 模式初步測試

以數值計算壩底下有限範圍內之滲流流場

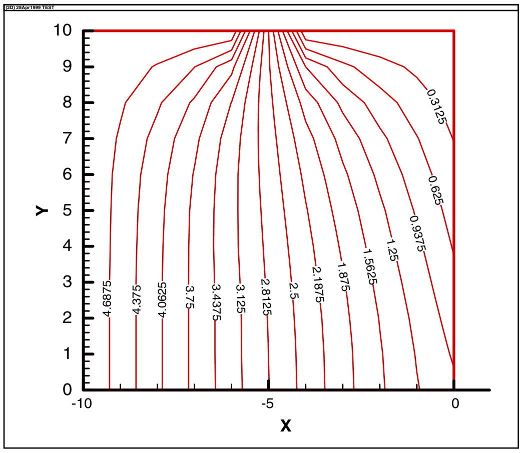

圖 3　近域 A 區右邊界以已知線性水頭給定之等勢能線圖

時，上下游邊界需以已知水頭或斜率式等型態來假設方能求解，這並未考慮到下游無限遠域解析解的條件，也不是真實流場中之物理條件，因土地為無限延伸，且通常並無明顯的水理邊界。若單單考慮了近域之邊界條件，而忽略了無限遠域所帶給近域流場之影響，那將會因為土體的伸長或縮短而導致全域流場的巨大變化。

4.2.1 壩下游水頭值為零之情況

於初步測試階段，暫不考慮壩體形狀及壩體不透水效應等因素，且將全域土體以規則矩形邊界來初步模擬。以近域 A 區與遠域 B 區之交界面處為 x=0，往上游平移-2a 之距離，假設 a=5，而土體到岩基的距離假設 b=10，網格間距為 1，其中 a 與 b 均以無因次化表示。以此為範圍將壩底下固定區域劃分成 100 個均勻網格，如圖 1 示意圖，來進行數值測試。

近域 A 區之左邊界及上邊界皆以定水頭之型態給定，分別假設壩上游總水頭 $h_1 = 5$ 與壩下游總水頭 $h_2 = 0$ 各為一個常數，壩中心點之總水頭 h_3 則將 h_1 與 h_2 作內差得 $h_3 = 2.5$，底邊界則設為不透水邊界，即 $\dfrac{\partial h}{\partial y} = 0$，右邊界則是利用(17)式之關係式。利用此四個邊界條件便可以數值模擬計算求出壩底下近域範圍之滲流流場。由於所模擬之近域 A 區網格點數不多，故以解矩陣的方法以 IMSL 軟體將近域 A 區之各點水頭一次解出。

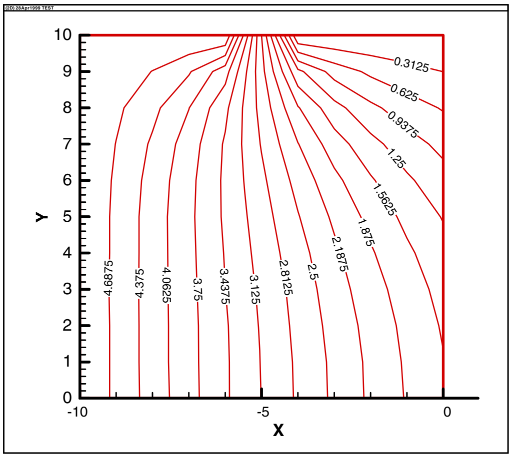

圖 4　近域 A 區右邊界以半解析法條件給定之等勢能線圖

圖 3 為近域 A 區右邊界以假設的已知線性水頭給定而求出的等勢能線圖，已知線性水頭為從壩下游上邊界至底邊界以水頭 0 至 1 依網格作線性內差而得。圖 4 為近域 A 區之右邊界以(17)式之邊界條件帶入所求出的等勢能線圖，由圖 4 可以明顯看出，等勢能線有繼續往下游無限遠處延伸之趨勢。比較圖 3 及圖 4，可知兩者等勢能線有明顯的差異。此外，為了求出下游遠域 B 區之水頭，將近域 A 區經由半解析法所求出的交界面水頭 $f(y)$ 帶入解析解，則下游遠域 B 區之水頭也可一併算出，遠域 B 區的網格數為 x 軸 10 格，y 軸 10 格，隔點間距為 1，全域等勢能線圖如圖 5 所示，由圖 5 可看出於近域與遠域交界面處(x=0)等勢能線為連續的變化，符合先前所假設的數值差分式與解析解假設式的合併條件。

為了測試圖 5 是否為正確解，乃將近域 A 區的 x 軸範圍擴大或縮小，看所得的全域水頭是否相同。故將交界面位置(x=0)往左邊平移兩個單位(x 座標也同時平移)，其它邊界均不變動(即近域 A 區的範圍縮小兩個單位)，所求出之全域等勢能線，與平移前所得之等勢能線的所在位置幾乎完全一樣，可見等勢能線並不會因為

近域 A 區範圍的縮小而改變。由此可知，半解析解法能有效模擬全流域之滲流現象。

4.2.2 壩下游總水頭值非零之情況

前一節令壩下游總水頭為 0，乃使數值計算

表 1　各線段邊界條件之給定(有截水牆之平底式壩體)

線段	邊界條件	說明
AB，AL	總水頭 Dirichlet B.C.	壩體上游面總水頭，因流速緩慢，故速度水頭不加考慮，壓力水頭則是以靜水壓定之。壩上游總水頭 5。
BC，CD	Neumann B.C.	底邊界為不透水層，$\partial h/\partial y=0$
DE	假設 h 不趨近 0(finite)	DE 兩點之 y 軸座標固定但 x 座標→∞，設總水頭於 DE 上不必然為 0 而得解析解之型式(3)式。
CF	半解析法 Neumann B.C.	以(17)式給定。
EF，FG	總水頭 Dirichlet B.C.	壩體下游面總水頭，壓力水頭以靜水壓定之。 壩下游總水頭 0。
GH，IJ，KL	Neumann B.C.	假設壩體具不透水性，$\partial h/\partial y=0$
HI，JK	Neumann B.C.	假設壩體具不透水性，$\partial h/\partial x=0$

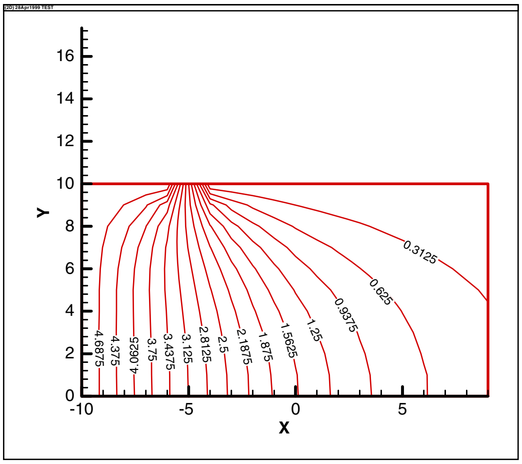

圖 5　近域 A 區與遠域 B 區全域等勢能線圖

較簡單省時，但在真實壩體模擬上，仍屬一特殊例，因此需進一步模擬壩下總游水頭非 0 之情況。假設 h_1 = 10、h_2 = 5，壩中心點 h_3 仍取 h_1 與 h_2 之內差得 h_3 = 7.5，所有網格大小及邊界條件同 4.2.1 節所述。所繪之等勢能線如圖 6 所示，此與圖 5 之壩下游總水頭為 0 的情況趨勢完全一樣，雖然 $h_2 \neq 0$，計算時需考慮(17)式中的第二項，但 h_2 = 5 之結果的每條等勢能線之值恰等於圖 5 相對應等勢能線加 5 而已。此乃因 Laplace 式的線性疊加原理。將近域 A 區之 x 軸範圍縮小兩個單位，所繪出之等勢能線如圖 6 也幾近相同，由此可見，壩下游總水頭非 0 之情況，亦能以半解析法將全域範圍滲流有效的模擬出。

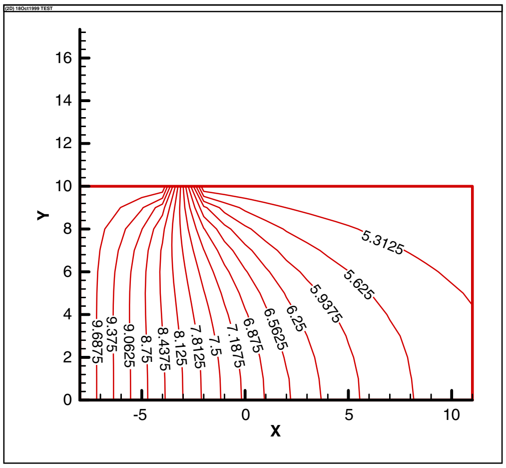

圖 6　近域 A 區縮小兩個單位後全域等勢能線圖

4.3 不規則型壩體測試例

由 4.2 節的初步測試及驗證得知，證明半解析法在規則網格及忽略壩體形狀之情況下是相當可行的，本節欲模擬之問題，乃構造較簡單之平底式壩體[10]，也就是含有截水牆之壩體及不透水效應情況。

近域 A 區之網格配置於 x 軸取 20 格，y 軸取 20 格，而格點間距為 0.5，如圖 7 示意圖所示。各線段邊界條件之給定請參圖 7 並彙整如表 1 所示。

壩上游及壩下游總水頭值依據 4.2.1 節以壩下游總水頭值為 0 之情況來模擬，再由上述各邊界條件帶入計算以 IMSL 一次解出，所繪的全域等勢能線如圖 8 所示。最後以縮小近域區範圍的

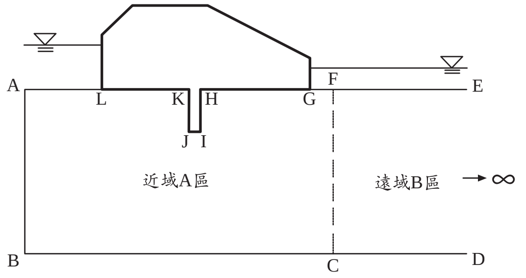

圖 7　有截水牆之平底壩體例之網格與邊界條件示意圖(配合表 1)

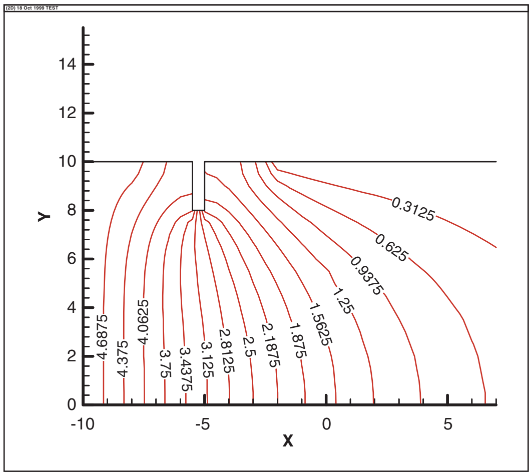

圖 8　模擬壩體具截水牆之全域等勢能線圖

方法來驗證圖 8 是否為正確解，所繪全域等勢能線與圖 8 完全一樣，也可清楚的看出，半解析法也能適用於不規則不透水壩體。

五、半解析法的應用

5.1 模擬壩體不透水效應及不規則沖刷坑邊界

前人的研究，如林(1996)[4]，許、蘇、林(1998)[3]及許、劉(1998)[5]均以(6)式的 SOR (successive overrelaxtion)法求解 Laplace 方程式模擬圖 9 攔砂壩下游沖刷坑達平衡之四種情況並繪出四種不同條件下，於壩體上、下游土體中之等勢能線及滲流流速向量分佈，如圖 10 便是於沖刷坑為靜水時且下游右邊界取定水頭 27.5cm 時之壩基滲流等勢能線圖。他們僅以有限差分法求解近域不規則區域之滲流情況，並未考慮下游無限遠域邊界條件的影響，而許、劉(1998)[5]之砂箱實驗也

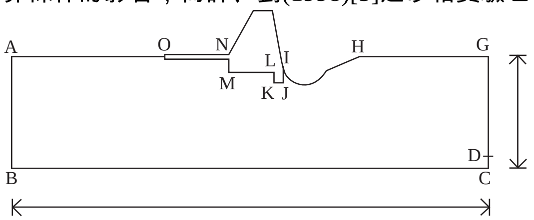

圖 9　攔砂壩與沖刷坑之網格與邊界條件示意圖(配合表 2)

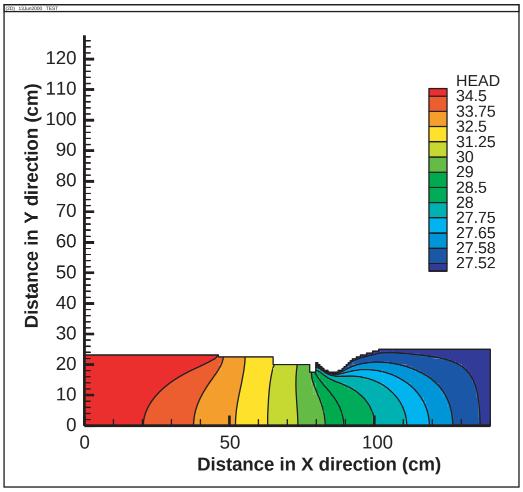

圖 10　靜水時近域區右邊界以定水頭給定之壩基滲流等勢能線圖

礙於實驗場地之限制而無法模擬土體長度為無限延長時之滲流情形。因許、劉(1998)[5]於砂箱實驗研究中有進一步探討下游尾水位高低對整個滲流流場之變化情形，為了利於與許、劉(1998)[5]的實驗比較及討論，本文乃採用與許、劉(1998)[5]之實驗砂箱設備尺度相同之攔砂壩模型來模擬。

5.1.1 網格配置與邊界條件給定

許、劉(1998)[5]之試驗模型壩乃選用蘇(1994)[11]所建構之原型無護坦防砂壩為依據，以 1:40 之等比縮尺製成上底 4cm、下底 13cm、高 13cm 之壓克力壩體模型，而土體高為 25cm，土體長

為 140cm，將壩體模型的土體實際計算範圍投射至一 x 軸 200 格、y 軸 40 格的網格。實體確定了網格大小之後，將沖淤平衡的剖面圖，投射至網格中，以確定各邊界點之位置，其配置圖如

表 2　攔砂壩與沖刷坑模型各線段邊界條件之給定

線段	邊界條件	說明
A B，AO	總水頭 Dirichlet B.C.	壩體上游面總水頭，速度水頭不加考慮，壓力水頭則是以靜水壓定之。壩上游總水頭 35cm。
B C	Neumann B.C.	底邊界為不透水層，$\partial h/\partial y=0$
C G	半解析法 Neumann B.C.	以(17)式給定。　(土體無限延伸情況)
C D D G	總水頭 Dirichlet B.C.	壓力水頭以靜水壓定之。大氣壓力。(低尾水情況)
G H	總水頭 Dirichlet B.C.	壩體下游面總水頭，壓力水頭以靜水壓定之。壩下游總水頭 27.5cm。
H I	總水頭 Dirichlet B.C.	1. 靜壓狀態：壓力水頭以靜水壓定之與 GH 同 2. 動壓狀態：動壓水頭採呂(1995)[2]所量測之動壓力值加以線性內差而得
I J，KL，MN	Neumann B.C.	設壩體具不透水性，$\partial h/\partial x=0$
J K，LM	Neumann B.C.	設壩體具不透水性，$\partial h/\partial y=0$
N O	Neumann B.C.	不透水布，$\partial h/\partial y=0$

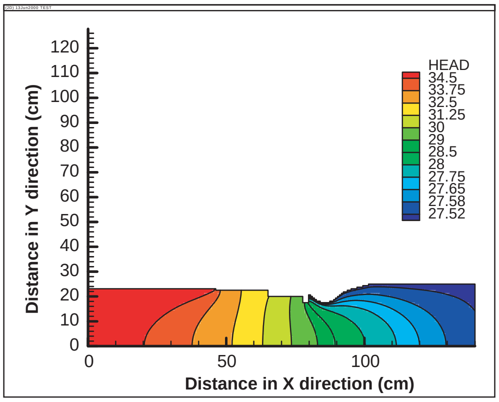

圖 11　靜水時近域區右邊界以半解析法給定之壩基滲流等勢能線圖

圖 9 所示。圖中 IH 曲線，以微觀來說雖為階梯曲線，但仍能反應整個沖刷坑之形狀變化。

由於許、劉(1998)[5]所假設之計算域有近一萬個計算點，若以矩陣法一次求解相當耗時，故改以疊代法計算，為了加速其收斂，故以 SOR 五點法程式來計算，以 SOR 五點法計算必須選取合理的起始值。在已知最大總水頭值與最小總水頭值的情況下取其平均數作為每一點的起始值，如圖 10 即以圖 9 之 CG 邊界取定水頭方式給定之等勢能線圖。若將下游面 CG 邊界改以半解析解邊界，則模擬結果變為如圖 11 所示之等

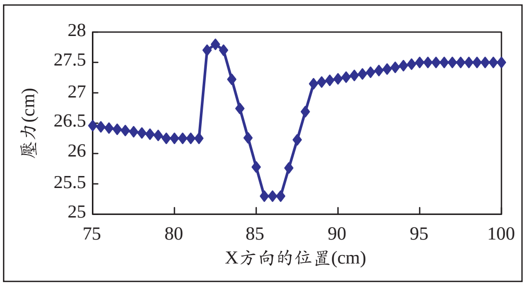

圖 12　沖刷坑邊界總水頭示意圖

勢能與流線分佈。與圖 10 的主要差異僅在下游面附近，然圖 11 的下游面土體是無限伸展的。圖 11 之等勢能線與流線繪在一起以方便比較及探討。各線段之邊界條件給定如表 2。

圖 10 與圖 11 皆為沖刷坑於靜水壓時之壩基滲流等勢能線圖，為了模擬有投潭水時對壩體滲流之影響。需於輸入邊界條件的過程中，總水頭考慮沖刷坑周圍部分之動壓力與總水頭。而呂(1995)[2]雖曾於試驗中量測沖刷坑邊界之五點壓力值，但由於沖刷坑壓力變化頗大，故若以五點壓力值依線性內差所得出沖刷坑各點之

壓力值方為近似值，然於真實情況下未測之壓力值是如何改變卻無法正確得知，故於沖刷坑之各點壓力值乃採許、劉(1998)[5]之壩下游總水頭為 27.5cm，如圖 12 所示。配合不同的下游邊

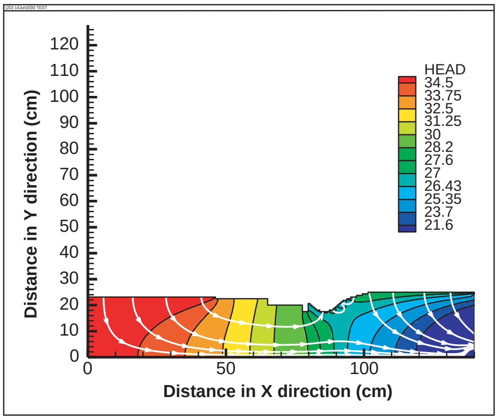

圖 13　投潭水作用下且尾水高為 6cm 時之壩基滲流等勢能線與流線圖

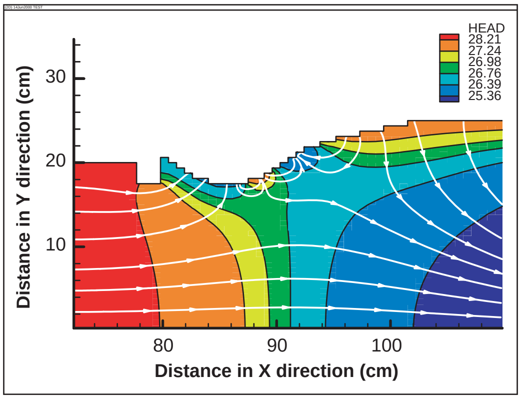

圖 14　下游尾水高為 6cm 時沖刷坑部分等勢能線與流線圖

界條件所模擬的滲流結果分別示如圖 13 至圖 18。圖 13 與圖 14 之近域右邊界條件乃以實驗時所控制之尾水位為條件。圖 16 至圖 18 則以半解析法作為近域右邊界條件模擬土體無限延伸時的情況。圖 19 與圖 20 則分別為兩種近域右邊界條件所造成的下游邊界總水頭分佈。

5.2 結果與討論

5.2.1 沖刷坑為靜止水時半解析解的差異

由圖 10 與圖 11 可以明顯看出兩者愈靠近下游邊界之等勢能線愈有明顯的差異，就兩者皆取相同之等勢能值如等勢能值 27.52cm 的兩條曲線來比較，因許、劉(1998)[5]於近域 A 區右邊界以

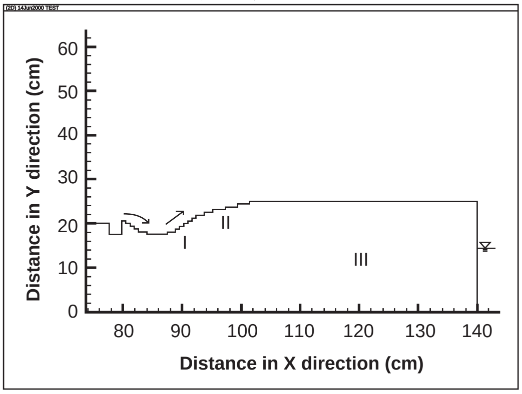

圖 15　壩體滲流分區示意圖

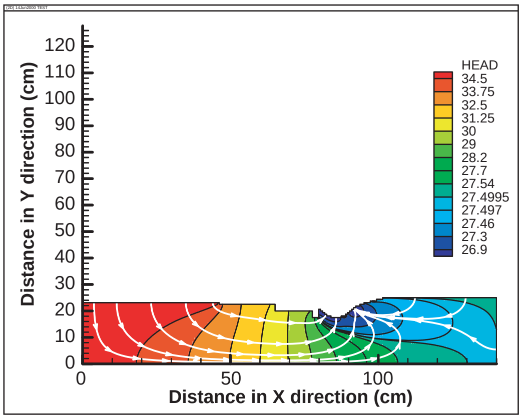

圖 16　上下游總水頭差為 7.5cm，投潭水作用下近域區右邊界以半解析法給定之壩基滲流等勢能線與流線圖

定水頭條件給定，故等勢能線的趨勢必然與岩基底層成正交狀態，而圖 11 於近域 A 區右邊界以半解析法給定，因無限遠處邊界所假設之水頭並域範圍內與岩基底層正交而有繼續往下游遠域延伸之趨勢。

5.2.2 沖刷坑為衝擊射流條件之實驗與半解析解的差異

許、劉(1998)[5]以染料顯形方法，觀察物理模型中攔砂壩下游及沖刷坑的出、入滲現象，試

驗中發現下游尾水高對攔砂壩底下及沖刷坑周圍的滲流情況影響極大。他們並在有投潭水情況下，分別以三種不同下游尾水高度進行試驗及探討。如圖 13 即尾水高為 6cm 時(低尾水情況)之

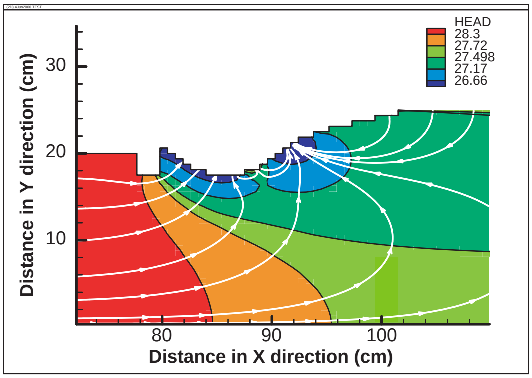

圖 17　近域區右邊界以半解析法給定之沖刷坑部份等勢能線與流線圖

全域之等勢能線及流線圖，由於沖刷坑部分等勢能線分佈較為複雜，故將此部分放大繪於圖 14。由圖 13 與圖 14 可約略看出整個沖刷坑部份及其後半段可分為三個獨立滲流區：I　區為沖刷坑內投潭水的高壓區所造成之入滲區。II 區為因沖刷坑內流速快而形成的低壓所造成之出滲區。III 區為下游尾水效應所造成之入滲區。此滲流分區標示於圖 15 的示意圖。

圖 11 為無投潭水流時之滲流情況，可看出全域之等勢能線及流線十分的具有規則性，均是由上游面往下游面流動，而沖刷坑後半部(II 、III 區)之流線分布是往下游上邊界及右邊界出滲之趨勢。當具有投潭水流時，如圖 16 為近域區右邊界以半解析法給定之等勢能線與流線圖，由上游至壩基下之土體中之等勢能線及流線與無投潭水時類似，然於沖刷坑底部附近(I　區)因投潭水流之衝擊力所產生之高壓區而形成部份的入滲水流與無投潭水時均為出滲水流情形有著很大的不同。此外，沖刷坑後半部到下游邊界間(III 區)之總水頭比II 區大，故沖刷坑後半部到下游邊界間的滲流區(III 區)均是往II 區流動而造成出滲之情形。

比較圖 13 及圖 16 之等勢能線與流線圖，圖 16 近域右邊界以半解析法給定，和圖 13 之下游尾水高取 6cm 時兩者於沖刷坑後面和下游邊界間之等勢能線，有著很明顯的差異。再由圖 17 沖刷坑部份之流線放大圖來看，由於半解析法已

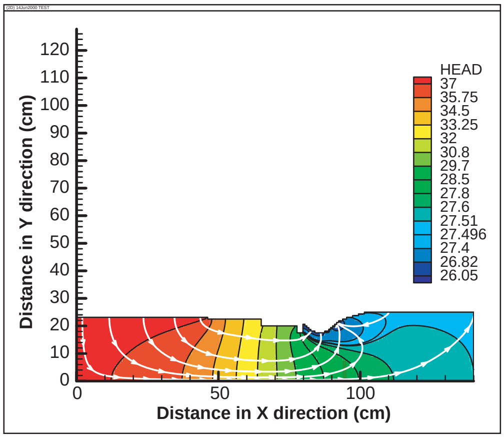

圖 18　上下游總水頭差為 10cm，投潭水作用下近域區右邊界以半解析法給定之壩基滲流等勢能線與流線圖

規避了下游尾水高如何取捨之問題，所模擬的是土體無限延伸的情況，其結果顯示沖刷坑後半部(III 區)皆往II 區出滲，此與圖 14 因下游尾水高不與土體等高之尾水效應所造成之入滲區(III 區)，兩者之等勢能線與流線之趨勢完全不一樣。值得一提的是，圖 16 於III 區之流線均是往II 區入滲，其原因為上游給定的總水頭跟下游總水頭值差異並不大，導致上游水流之驅動力不夠，而在II 區之低壓區出滲，但若稍微增加上游總水頭值便可增加水流之驅動力，因此III 區之部份水流便能往下游邊界流出，如圖 18 即上游總水頭為 37.5cm 而土體無限延伸的情況之例子。

5.2.3 滲流實驗之土體長度設置問題

許、劉(1998)[5]於砂箱實驗，欲模擬尾水位與土體上邊界的水位等高時，產生了嚴重之迴水現象，乃因下游邊界無滲流面存在故缺少低壓區，而使土體中之水的向下滲流能力大幅減弱，而投潭水流又因下游水位面的壅高而來不及排出之故。這也是許、劉(1998)[5]的實驗設定較難做到與現場之真實流況的尾水位條件。由此可見下游尾水位高若不與土體水位等高時之滲流情

況確實與現場實際之滲流情況有相當大的不同。因此，若後人繼續以實驗來分析探討攔砂壩模型底下之滲流流場情形，必會遇到下游邊界尾水位高低的不同所產生不同的滲流流場的問題，

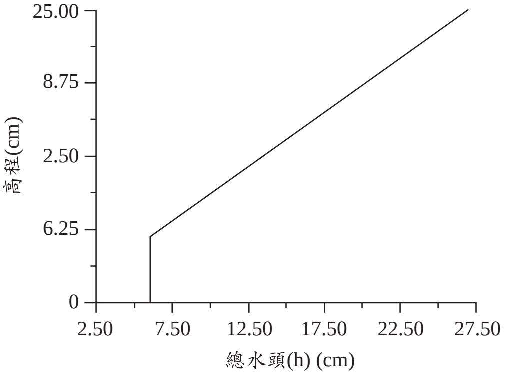

圖 19　近域區右邊界取尾水高 6cm 之總水頭分佈

況且無一規範可尋，究竟尾水高度要如何取捨才能近似現場實際狀況之流場型態。此外，因礙於實驗場地大小的限制，實驗砂箱之長度勢必無法延伸至無限遠範圍，只得取一固定之砂箱長度來進行試驗，但也往往因實驗土體長度之不足，而造成了下游邊界條件影響了整個主體或大半個的流場型態。再由先前的數值模擬結果發現(未展示出)，計算域之橫軸長度只要稍微增加或減少，近域流場之變化即有相當大之差異。因此，以往的研究為了求出全域滲流流場之逼近解，往往遇到了前述諸多之限制以及因實驗場地太小等不可避免之因素，而無法模擬壩體之全域滲流流場之逼近解。

半解析法之所以能於求解壩基滲流流場得到良好的結果與以往為了方便求得壩基滲流之近似解(下游邊界以假定邊界條件給定)最大的不同處乃半解析法在求解過程中令近域右邊界條件為未知之水頭條件，如圖 20 為攔砂壩應用例中近域右邊界以半解析法所求得之總水頭分佈，兩條曲線分別為沖刷坑內僅為靜水壓分佈(圖 11)以及含動壓效應(圖 16)時之結果。以往的研究方法需假設近域右邊界為已知之水頭條件，如圖 19 則是近域右邊界取尾水高度-21.5cm 時之水頭分佈。從此二圖可明顯看出，近域右邊界隨著整體壓力條件的不同，水頭分佈即隨著變化，且水頭條件並不因計算域橫軸長度的任意改變而固定不變，此因半解析法考慮了遠域邊界條件所帶給近域流場之影響。但如果將近域右邊界假設為

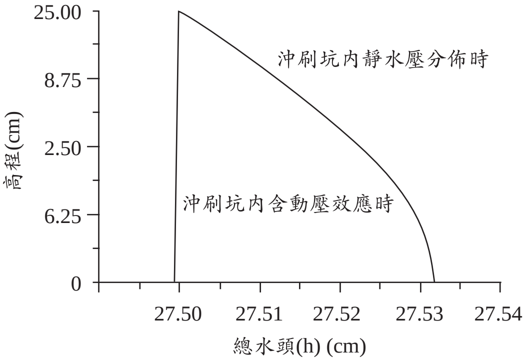

圖 20　近域區右邊界以半解析法所求得的總水頭分佈

固定不動的邊界條件，只要稍微改變計算域橫軸長度，全域流場便產生不可忽視的變化。

綜合上述比較及討論得知，下游邊界條件之取捨對流場型態確實有巨大之影響。以往的方法對於壩下游之右邊界僅能以人為邊界條件給定，將計算域 x 軸範圍拉長，則會改變全域主流場之滲流情況，尤其是愈靠近下游邊界流場誤差愈大。而半解析法能迴避前人研究所遭遇之困難，也可提供資料給後人於砂箱試驗研究而無法模擬壩體為無限延展情況時之實際滲流流場情況。

六、結　論

1. 以往以數值方法計算壩基孔隙介質中滲流流場之一大困擾乃上下游邊界條件之給定，只能盡量取大一點的範圍來計算以求較不影響壩基附近的結果。因而上下游邊界只能假設定水頭或斜率式等已知邊界條件的型態，然而土體乃無限延伸的，究竟要取捨多遠方可接受，永遠是個未知數。
2. 壩底近域區右邊界之邊界條件若以定水頭方式給定，將橫軸長度改變(伸長或縮短)後繪出之等勢能線與長度未改變前之等勢能線有著

明顯的差異，顯示下游的邊界條件足以影響全域流場之主要型態。

3. 本文所發展之半解析法，無論模擬無壩體形狀的滲流區到模擬構造簡單的平底式壩體乃至模擬壩體不透水排樁效應及含有不規則沖刷坑之攔砂壩，均得到良好之模擬結果，不僅補足了因砂箱長度不足所造成的邊界條件影響也解決了以往的研究於下游邊界條件取捨之困擾因近域區右邊界的條件可視為未知而為求解的一部份。且由於近域區可盡量縮小並不影響精度，因而可節省計算工作量。
4. 目前為止半解析法僅考慮下游無限遠處條件，但上游邊界仍視為已知條件下方可用此半解析法。半解析法亦能提供後人結合砂箱試驗研究資料推廣至模擬土體為無限延展情況時之滲流流場情況，彌補實驗場地永遠受限的困難。

七、參考文獻

1. 毛昶熙，滲流計算分析與控制，水利電力出版社 (1988)。
2. 呂長禮，「防砂壩下游局部沖刷與局部滲流相關性之研究」，碩士論文，逢甲大學土木及水利工程研究所，台中市 (1995)。
3. 許少華、蘇重光、林伯聰，「以數值模擬探討不透水布對壩下沖刷坑之滲流影響」，中華水土保持學報，第二十九卷，第一期，第 1-10 頁 (1998)。
4. 林伯聰，「壩基滲流流場之數值模擬」，學士論文，逢甲大學水利工程系，台中市 (1996)。
5. 許少華、劉建榮，「以染料顯形試驗與數值模擬分析攔砂壩模型底下之滲流流場」，中華水土保持學報，第二十九卷，第四期，第 306 –313 頁 (1998)。
6. 蘇重光、林親義，「原型無護坦防砂壩安定性之研究(二)」，農委會補助計畫總報告，第 115 頁 (1994)。
7. Brebbia, C. A. and Semor Lecturer, The Boundary Element Method for Engineering, pp. 52-56 (1978).
8. Cook, R. D., Concepts And Application of Finite Element Analysis, pp. 77-81 (1974).
9. Gerald, C. F. and Patrick O. Wheatley, Applied Numerical Analysis, Addison-Wesley, pp. 549-566 (1993).
10. Harry, M. E., Groundwater and Seepage, McGraw-Hill, pp. 107 (1962).
11. Tsai, C. S., Lee, G. C., “A nonlinear formulation for the earthquake responses of dam-reservoir systems,” Earthquake Engrg.6th Canadian Conf. pp. 173-180 (1991).

附錄 A (Laplace 方程式之解析解求解過程)

利用分離變數法求解 $H(x,y)$ ，假設

$$H(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$$

帶入二維 Laplace 方程式：

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$$ ，可得：

$$\frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} = {B_n}^2 \qquad \text{(A-1)}$$

其中 B_n 為一分離常數，可得 X 與 Y 之通解：

$$X = C_1 e^{-B_n x} + C_2 \cdot e^{B_n x} \qquad \text{(A-2)}$$

$$Y = C_3 \sin(B_n y) + C_4 \cos(B_n y) \qquad \text{(A-3)}$$

其中 C_1, C_2, C_3, C_4 為常數；

(A-2)式中，因右邊界 $x \to \infty$, $\lambda > 0$, $e^{\lambda x} \to \infty$ ，故 $C_2 = 0$ ，否則 $x \to \infty$ 與起始假設為 finite(有界)不符。

$$\therefore X = C_1 e^{-B_n x} \qquad \text{(A-4)}$$

又下邊界 $\frac{\partial H}{\partial y}(x,0) = C_3 \cdot B_n C_1 e^{-B_n x} = 0$ ，

因 $C_1 \neq 0$ ，得 $C_3 = 0$

$$Y = C_4 \cos B_n y \qquad \text{(A-5)}$$

由(A-4)式及(A-5)式可得

$$H(x,y)=X\cdot Y=C_1e^{-B_nx}\cdot C_4\cos(B_ny)$$

$$=A_ne^{-B_nx}\cos(B_ny)\ ....(\text{A-6})$$

其中 $C_1 \cdot C_4 = A_n$

上邊界：

$$H(x,b)=A_ne^{-B_nx}\cos B_nb=0\ ....(\text{A-7})$$

$$\therefore \cos(B_nb)=0$$

$$\therefore B_n=\frac{(2n-1)\pi}{2b}\quad,\quad n=1,2,3......\infty\ ..(\text{A-8})$$

將(A-7)、(A-8)兩式代回(A-6)式，得解析解如(A-9)式

$$H(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot e^{-[B_nx]}\cdot\cos[B_ny]\ ....(\text{A-9})$$

其中 A_n 根據左邊界 $H(0,y)=f(y)$ 以 Fourier-series 展開得：

$$A_n=\frac{2}{b}\int_0^b f(y)\cdot\cos[B_ny]dy$$

$$\therefore\ h(x,y)=H(x,y)+h_2$$

附錄 B (解析解 A_n 推導過程)

交界面水頭分佈：

$$H(0,y)=f(y)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos\frac{(2k-1)}{2b}\pi y\ ....(\text{B-1})$$

因 $\int_0^b f(y)dy$ 存在，且 $B_n=\dfrac{(2n-1)\pi}{2b}$

將(B-1)式等號兩邊同乘 $\cos B_ny$ ，得：

$$f(y)\cdot\cos B_nydy=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos\frac{(2k-1)\pi}{2b}y\cdot\cos B_ny$$

................................(B-2)

將(B-2)式每一項取從 0 到 b 的積分如(B-3)式：

$$\int_0^b f(y)\cdot\cos B_nydy$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^b A_k\cos\frac{(2k-1)\pi}{2b}y\cdot\cos B_nydy\ ....(\text{B-3})$$

令 $n=k$ ，則(B-3)式可表示如(B-4)式：

$$\int_0^b f(y)\cdot\cos B_nydy=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^b A_n\cos^2 B_nydy$$

.... (B-4)

根據三角函數倍角公式：

$\cos 2B_n=2\cos^2 B_n-1$ ，則(B-4)式

等號右邊可算出如(B-5)式：

$$\int_0^b\cos^2 B_nydy=\frac{1}{2}\int_0^b\left[\cos\frac{(2n-1)\pi}{b}y+1\right]dy$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{b}{(2n-1)\pi}\cdot\sin(2n-1)\pi+y\right]_0^b=\frac{1}{2}b$$

.... (B-5)

將(B-5)式代回(B-4)式，

則 $\int_0^b f(y)\cdot\cos B_nydy=\frac{1}{2}A_nb$

$$\therefore A_n=\frac{2}{b}\int_0^b f(y)\cdot\cos B_nydy$$

收稿日期：民國 96 年 3 月 20 日
修正日期：民國 96 年 5 月 16 日
接受日期：民國 96 年 5 月 24 日