

序率模擬應用於水文分布檢定信賴區間之建立

Establishing Confidence Interval for Goodness-of-Fit Test by Stochastic Simulation

台灣大學生物環境系統工程學系
教授兼系主任

鄭克聲*

Ke-sheng Cheng

台灣水利環境科技研究發展教育基金會
研究工程師

吳宜珍

Yii-chen Wu

摘 要

水文頻率分析在傳統上主要利用 χ^2 檢定與 K-S 檢定決定選用之機率分布，在應用上，常遇到檢定資料為小樣本且具高偏態，此時檢定之準確性有待評估。故本文利用由三階動差與四階動差所構成的動差比圖，利用不同機率分布其具有不同形態的動差比圖，來區別檢定資料的機率分布。研究中，以常態分布做為方法的介紹，並由於在參數推估方面，線性動差法的推估量較動差法有較小的偏估，所以本研究加入線性動差比圖，使得在決定機率分布時，不論使用動差法或線性動差法均有其動差比圖可以判別機率分布。

關鍵詞：序率模擬，適合度檢定，信賴區間，動差法，線性動差法。

ABSTRACT

Rainfall frequency analysis is a prerequisite for many hydrological engineering projects. It yields an amount which corresponds to a pre-specified probability of exceedance, also know as the design rainfall, for the interested hydrological variable. The accuracy of frequency analysis will inevitably affect the safety level and cost of the engineering projects. Frequency analysis involves choosing the types of probability distributions which characterize the statistical properties of the hydrological variables and estimating distribution parameters for the chosen distribution. However, uncertainties are always embedded in choosing the distribution type and parameters estimation. Therefore, it is imperative to investigate how the most adequate type of distribution can be determined by considering the uncertainties.

In this study, we focus on the effect of sample size on the confidence intervals of hypothesis test for normal distribution. The empirical joint probability distribution of the

*通訊作者，國立台灣大學生物環境系統工程學系教授兼系主任，106 台北市大安區羅斯福路 4 段 1 號，rslab@ntu.edu.tw

3rd and 4th product-moment-ratio (PMR) and linear-moment-ratio (LMR), with respect to various sample sizes, were constructed by stochastic simulation. Then an algorithm was developed to delineate the sample-size-dependent 95% confidence regions of the PMR and LMR diagrams. Finally, the established confidence regions were verified by stochastic simulation. The results demonstrate that the established confidence intervals can be used for goodness-of-fit tests and, in particular, the critical intervals of PMR diagram have ellipse shapes and can be easily fit to mathematical models.

Keywords: Stochastic simulation, Goodness-of-fit test, Confidence interval, Moment method, L-moment method.

一、前言

頻率分析為水利工程規劃與設計中最基本之工作項目，其原理主要是由過去的水文實測資料，歸納其特性，依此推估未來可能發生的水文狀況。其程序為水文觀測資料的選取，選擇合適的機率分布，由機率分布推估參數，決定設計水文量。雖然過程並不繁瑣，但在實際分析時，卻常常遭遇到資料年數過短，利用 χ^2 檢定與 K-S 檢定(Hann,1977)時，會發現樣本誤差甚大，因而造成有數種機率分布會同時通過統計檢定，使得機率分布選擇不易，為水文頻率分析過程中的一大難題。

除了上述的 χ^2 檢定與 K-S 檢定來決定機率分布外，在傳統上還有利用動差比圖(Moment Ratio Diagrams)，以樣本之三階與四階動差之特性來選擇機率分布，唯此方法高階動差在小樣本時，具有較大之偏差(Biasness)。而線性動差在參數推估上較動差法具有較小之偏差(Landwehr et al.,1979)。所以本研究擬由序率模擬各機率分布，建立其動差比圖與線性動差比圖的信賴區間，以便日後在頻率分析上，不論參數推估上使用動差或線性動差，都能有其動差比圖可以使用，藉由信賴區間的建立，有助於機率分布的選擇。

二、理論介紹

2.1 動差法

傳統的動差法為具有最古老及最廣泛被了

解的一種技術，用在頻率分析上，可簡單的求得樣本參數。在統計學上為機率密度函數 $f(x)$ 之隨機變數第 r 階動差 M_r ，其公式如下：

$$M_r = E[X^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx \dots\dots\dots(1)$$

其各階動差可表現母體之平均值 μ 、變異數 σ^2 、偏態係數 γ 、峰度係數 κ 等特性。其公式如下：

$$\mu = E[X] \dots\dots\dots(2a)$$

$$\sigma^2 = Var[X] = E[(X - \mu)^2] \dots\dots\dots(2b)$$

$$\gamma = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3} \dots\dots\dots(2c)$$

$$\kappa = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4} \dots\dots\dots(2d)$$

此種樣本動差之計算並不複雜，很容易就可以直接由動差值來了解母體的型態，所以一般常用動差法估計參數，由特定機率函數之動差與參數之關係式，即可聯立求解。

2.2 線性動差法

線性動差法和機率權重動差法是類似的一般動差(Ordinary Moments)，它們的目的是在敘述理論的機率分布和樣本觀測值。線性動差法可以被使用在參數推估、區間推估和假設檢定。雖然線性動差的理論和應用與動差法相似，但因線性動差是以累積機率為基礎，將各順序量之期望值作適當的線性組合而成為各階線性動差，用以表

示一機率分布之位置、尺度、偏態及峰態等各種性質。而線性動差法是由機率權重動差法演進而來，為求理論架構之完整，茲將機率權重法及線性動差法分別詳述如下：

(一) 機率權重動差法

$$\beta_r = E\left\{X\left[F(x)\right]^r\right\}, \quad r = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

其中 β_r ：第 r 階的機率權重動差

$F(x)$ ： x 的累積機率分布函數

Landwehr 等人對於 β_r 之樣本推估值 b_r ，建議使用機率權重動差法的參數不偏估推估式，其可以使用在任何的機率分布，計算式如下：

$$b_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-r} \left[\frac{\binom{n-j}{r}}{\binom{n-1}{r}} \right] x_{(j)}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (4)$$

其中 $x_{(j)}$ ：為順序統計量 $\{x_{(j)}, j=1, 2, 3, \dots, n\}$ ，其依大小排列，由小到大。 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ 。

即任何分布的樣本推估欲利用機率權重動差法，可由式(5)求得：

$$b_0 = m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{(j)}$$

$$b_1 = \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{(n-j)}{n(n-1)} \right] x_{(j)}$$

$$b_2 = \sum_{j=1}^{n-2} \left[\frac{(n-j)(n-j-1)}{n(n-1)(n-2)} \right] x_{(j)}$$

$$b_3 = \sum_{j=1}^{n-3} \left[\frac{(n-j)(n-j-1)(n-j-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \right] x_{(j)} \quad (5)$$

(二) 線性動差法

上述的這些動差並不能代表與母體有關的直接特性。所以 Hosking (1990) 推演機率權重動差法成為線性動差。首先定義一個實數隨機變數 X ，其 r 階線性動差量為 λ_r ，其公式(6)如下：

$$\lambda_r = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} E(X_{r-k:r}), \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

其中 λ_r ：為母體線性動差，

$X_{r-k:r}$ ：大小為 r 之樣本中，序級為 $r-k$ 之樣本。

線性動差為機率權重動差法的線性組合，其間之關係式如下：

$$\lambda_{r+1} = \sum_{k=0}^r P_{r,k}^* \beta_k, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

$$\text{其中： } P_{r,k}^* = (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \binom{r+k}{k}$$

所以 Hosking 定義之 r 階線性動差 $\lambda_r (r=0, 1, 2, \dots)$ 可以表示如下：

$$\lambda_1 = E[X_{1:1}]$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} E[X_{2:2} - X_{1:2}]$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{3} E[X_{3:3} - 2X_{2:3} + X_{1:3}]$$

$$= \frac{1}{3} E[(X_{3:3} - X_{2:3}) - (X_{2:3} - X_{1:3})]$$

$$\lambda_4 = E[X_{4:4} - 3X_{3:4} + 3X_{2:4} - X_{1:4}]$$

$$= E[(X_{4:4} - 2X_{3:3} + X_{2:4}) - (X_{3:4} - 2X_{2:3} + X_{1:4})]$$

$$\dots \dots \dots (8)$$

其中 $X_{r-k:r}$ ：表示大小為 r 之樣本中，由小至大順序排列，順序為 $r-k$ 之觀測值， $x_{1:r} \leq x_{2:r} \leq \dots \leq x_{n:r}$ 。

由式(7)，可得線性動差與機率權重動差之互換關係如下：

$$\lambda_1 = \beta_0$$

$$\lambda_2 = 2\beta_1 - \beta_0$$

$$\lambda_3 = 6\beta_2 - 6\beta_1 + \beta_0$$

$$\lambda_4 = 20\beta_3 - 30\beta_2 + 12\beta_1 - \beta_0 \quad (9)$$

為了便於把高階線性動差 λ_r ， ($r \geq 3$) 標準化，可依動差定義， C_v 、 C_s 和 C_k 為動差量之比值，同樣定義線性動差比值(L-Moment Ratio)，其定義如下：

$$L-C_v \quad \tau_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \dots\dots\dots(10a)$$

$$L-C_s \quad \tau_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \dots\dots\dots(10b)$$

$$L-C_k \quad \tau_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_2} \dots\dots\dots(10c)$$

其中 $\lambda_r, r=1, \dots, 4$ 為線性動差的前四個動差，而 τ_2, τ_3, τ_4 為線性動差中的變異係數、偏態係數及峰度係數。第一個線性動差 λ_1 等於平均值 μ 。而 $\lambda_2, \tau_3, \tau_4$ 可分別表示一個分布的尺度、偏態及峰度。同樣地，表示動差中的 σ^2, γ, κ 。

三、研究內容與方法

3.1 理論資料產生

為了預知母體的機率分布，以便掌握樣本的統計特性，本研究中利用蒙地卡羅法(Monte Carlo Method)，藉由電腦進行模擬，隨機繁衍具有 i.i.d (Independently and Identically Distributed) 特性的合成資料，以得到所設定機率分布之資料。研究中常態分布模擬的樣本長度分別為 N = 20、30、40、50、60、75、100、150、250、500、1000，各繁衍 100,000 組實現值(Realization)。求算其動差 C_s, C_k 及線性動差 $L-C_s, L-C_k$ ，分別點繪於動差比圖及線性動差比圖上。

3.2 信賴區間之建立

本研究利用樣本統計量 C_s, C_k 所構成的動差比圖，建立其信賴區間。由於在進行頻率分析時，常選擇信賴水準為 95%，故本研究擬建立 95%信賴水準的動差比圖。動差比圖 X 軸為 C_s ，Y 軸為 C_k ，其為二維之平面，無法以一維的信賴區間公式來建立，所以本研究利用網格式法，以求得動差比圖 C_s 與 C_k 的組體圖，其做法詳述如下：

- (1) 依樣本推估值散布於動差比圖之範圍，選取 X、Y 之起始值及終點值，求得距離 \bar{X}, \bar{Y} ，將 \bar{X}, \bar{Y} 切成等距之網格式。由於當樣本的樣本數不同時，其動差比圖的範圍也有所不同。樣本數愈小時，其動差比圖的

表 1 不同樣本大小所選用之網格式

動差法		線性動差法	
樣本大小	網格式	樣本大小	網格式
20	0.1×0.1	20	0.02×0.02
30	0.1×0.1	30	0.02×0.02
40	0.1×0.1	40	0.02×0.02
50	0.1×0.1	50	0.02×0.02
60	0.1×0.1	60	0.02×0.02
75	0.1×0.1	75	0.02×0.02
100	0.1×0.1	100	0.02×0.02
150	0.1×0.1	150	0.02×0.02
250	0.05×0.05	250	0.01×0.01
500	0.05×0.05	500	0.01×0.01
1000	0.05×0.05	1000	0.01×0.01

範圍愈大；樣本數大時，其動差比圖有較集中趨勢，所以在網格式的選擇上有所不同，表 1 為動差法與線性動差法各樣本數，其網格式的尺寸。

- (2) 計算落於每個網格式中樣本推估值的個數，將各網格式中樣本推估值個數除以總個數 (100,000)，可得樣本推估值會落於此網格式之機率 P_{ij} ，即為 C_s 與 C_k 的組體圖。
- (3) 將每網格式所得之機率 P_{ij} ，依大小順序排列，一直累加各網格式之機率，即可得每網格式包含樣本機率的累積機率(Cumulative Probability)。此時當累積到 95%時，網格式所包含的區域，即為 95%信賴區間。
- (4) 為了求得上限與下限，將包含於 95%機率內的網格式，依 X 軸(C_s)的方向，等距切下數個截面 x_1, x_2, \dots, x_k 。
- (5) 再將各截面所切得的數個樣本點取其 Y 值 (C_k)最大與最小。
- (6) 將所取得的 Y 軸最大值連接起來，即可得上限值；反之，將最小值連接起來，即可得下限值。
- (7) 將所得之上限值與下限值，以牛頓法加以套配，即可得平滑曲線，此區間即為該分布的 95%信賴區間。

表 2 常態分布的 95%信賴區(動差法)

樣本大小	上界方程式	下界方程式
20	$Y = -0.4816X^4 + 1.0377X^2 + 3.8958$	$Y = 1.899X^2 + 1.5251$
30	$Y = -0.7562X^4 + 1.0776X^2 + 4.0055$	$Y = 1.9357X^2 + 1.7688$
40	$Y = -0.4838X^4 + 0.5359X^2 + 4.0742$	$Y = 2.0556X^2 + 1.8245$
50	$Y = -1.5865X^4 + 1.197X^2 + 3.993$	$Y = 2.0133X^2 + 1.9972$
60	$Y = -3.1717X^4 + 1.4671X^2 + 3.976$	$Y = 2.5403X^2 + 2.004$
75	$Y = -5.7848X^4 + 2.2935X^2 + 3.8735$	$Y = 2.6649X^2 + 2.1027$
100	$Y = -11.8444X^4 + 2.20884X^2 + 3.8766$	$Y = 2.9322X^2 + 2.1839$
150	$Y = -18.2109X^4 + 2.7105X^2 + 3.7465$	$Y = 3.5228X^2 + 2.2894$
250	$Y = -1.7182X^4 - 1.9776X^2 + 3.6982$	$Y = 3.7816X^2 + 2.4429$
500	$Y = -52.6819X^4 - 0.2091X^2 + 3.4849$	$Y = 4.7934X^2 + 2.6249$
1000	$Y = -174.2605X^4 - 0.5012X^2 + 3.3282$	$Y = 6.7858X^2 + 2.7172$

3.3 信賴區間的正確性檢驗

進行假設檢定時，吾人需先設立一虛無假設 (H_0)，經由樣本統計量來決策接受它或拒絕它。 $1-\alpha$ 為信賴水準，為 H_0 在做假設檢定時的正確率。故本研究利用此一特性，利用特定的機率分布，繁衍 100,000 組不同樣本大小之樣本，計算其不落於所建立的信賴區間中之個數，即可得到其發生型 I 誤差的機率 $\hat{\alpha}$ 。藉由 $1-\hat{\alpha}$ 的求得，其是否符合 95%，即可判斷此建立的 95%信賴區間之正確性。

四、結果與討論

4.1 模擬結果

本研究在模擬常態分布時，所假設的母體參數有平均數與變異數，其值為 $\mu=0$ 、 $\sigma^2=1$ 。而由動差法的觀念來看，當分布為常態分布時，偏態係數與峰度係數的理論值分別為 $C_s=0$ 、 $C_k=3$ ；若以線性動差來看，則其線性偏態係數與線性峰度係數的理論值分別為 $L-C_s=0$ 、 $L-C_k=0.1126$ ，所以本研究中以平均值、變異數、偏態係數、峰度係數、線性偏態係數與線性峰度係數為判定係數。而其結果均非常接近理論值，在模擬時，當樣本大小越大，其樣本推估值會越接近母體參數。

4.2 信賴區間之建立

圖 1、2 為本研究中信賴區間建立的特徵圖，由組體圖的建立、動差圖、信賴區間的建立及套

配所得之分析結果，其中圖 1 為動差比圖信賴區間建立之過程，圖 2 為線性動差比圖信賴區間建立之過程，在組體圖的建立均使用網格法求得。由圖 1 中可知，當樣本數小的時候，使用動差法所得的樣本參數偏估量較大，但大致上偏態係數與峰度係數兩者呈現正相關。而樣本數大時，則偏估量變小，其組體圖也呈現較集中的趨勢。由圖中可知，動差比圖與線性動差比圖均有隨著不同的樣本大小，其與理論值有越來越接近的趨勢，而其信賴區間為淺藍色所圍成的範圍。

為了求得平滑曲線以供日後使用，本研究以方程式來套配出平滑曲線。動差法使用上界及下界來說明信賴區間，上界以方程式 $y=ax^4+bx^2+c$ 表示。而下界以方程式 $y=dx^2+e$ 表示。各方程式的係數求得，以牛頓法求之。各樣本數之上、下界方程式列於表 2。由於線性動差法的 95%的信賴區間其分布近似於橢圓，本研究以橢圓方程式來套配出平滑曲線，其套配後之方程式列於表 3 中。

為了便於比較不同樣本大小其信賴區間的關係，本研究將各樣本大小的 95%信賴區間其套配的結果整合於圖 3、4 中。圖 3 為動差法，其下界的部分，隨著樣本數的增加，而逐漸向內縮小範圍；而上界的部分，則有彼此交錯的情形產生，由 $n=20$ 時，逐漸向內交錯。圖 4 為線性動差法，其隨著樣本數的增加，而有向理論值集中的趨勢。

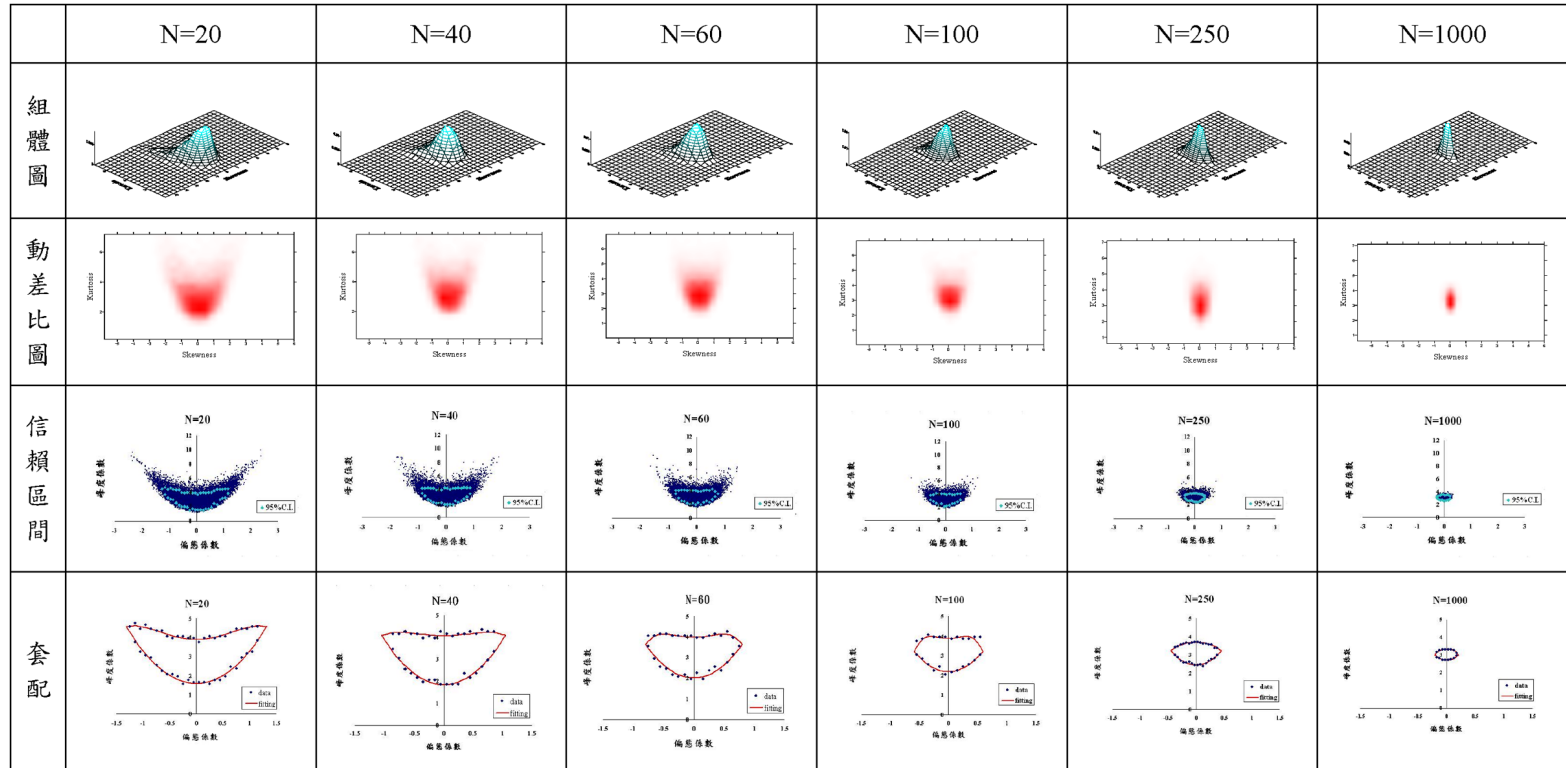


圖 1 常態分布信賴區間建立特徵圖(動差法)

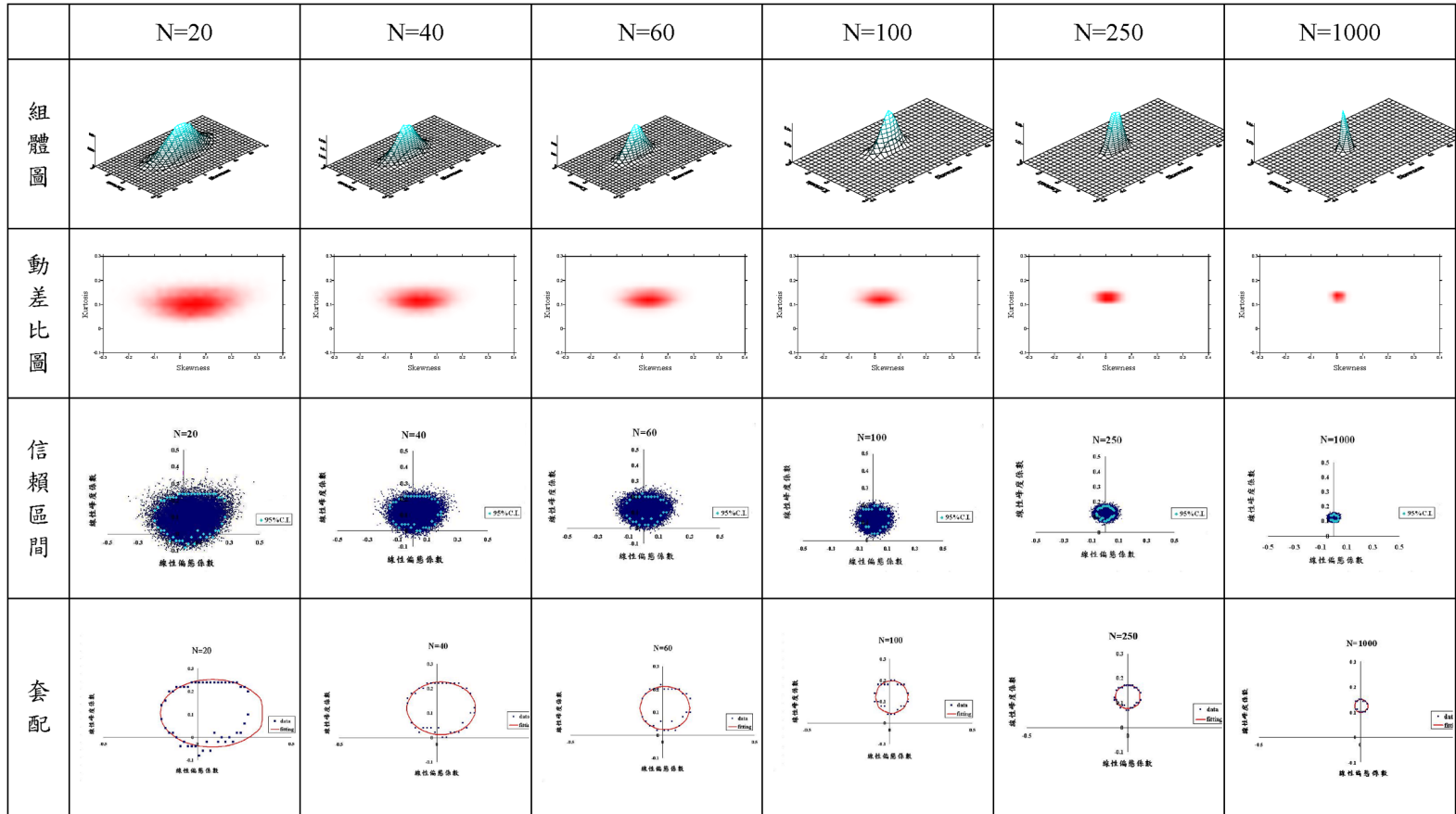


圖 2 常態分布信賴區間建立特徵圖(線性動差法)

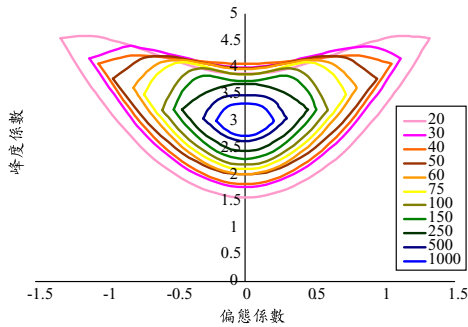


圖 3 常態分布不同樣本大小動差比 95%信賴區間之關係

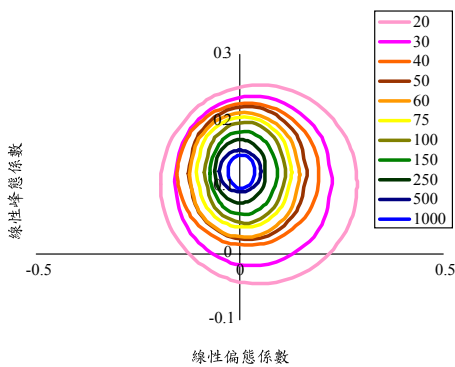


圖 4 常態分布不同樣本大小線性動差比 95%信賴區間之關係

4.3 信賴區間建立之驗證

欲瞭解所建立的信賴區間的正確性，本研究模擬新的樣本點(n = 20、30、40、50、60、75、100、150、250、500、1000)，各 100,000 組，計算此樣本點不落入此區間內機率 α ，即可得到 $1-\alpha$ 的正確性。表 4 為動差法與線性動差法的 95%信賴區間正確性，由表中可得知，所得之機率都接近 95%，在動差法方面，誤差最大約 2.2%，其造成誤差的影響可能有很多因素，但最大的因素為在網格尺寸的選取上，當網格尺寸選擇太密的情況下，容易造成其網格累積點數不足，而使得每網格之密度相差不多，在外圍會有破碎的情形產生，在選擇 95%區間的情況下，則勢必會受影響。而當網格尺寸太大太疏時，應該會造所選取的 95%區間變大，但因為網格變大，造成形狀易因內部資料之分布不均勻或不精細，而使得推估

表 3 常態分布的 95%信賴區(線性動差法)

樣本大小	方程式
20	$\frac{(x-0.08)^2}{0.2774^2} + \frac{(y-0.105)^2}{0.1477^2} = 1$
30	$\frac{(x-0.033)^2}{0.1939^2} + \frac{(y-0.1093)^2}{0.128^2} = 1$
40	$\frac{(x-0.02)^2}{0.1741^2} + \frac{(y-0.1191)^2}{0.1009^2} = 1$
50	$\frac{(x-0.0194)^2}{0.1461^2} + \frac{(y-0.1211)^2}{0.1004^2} = 1$
60	$\frac{(x-0.012)^2}{0.137^2} + \frac{(y-0.1183)^2}{0.0939^2} = 1$
75	$\frac{(x-0.0105)^2}{0.1184^2} + \frac{(y-0.1227)^2}{0.0831^2} = 1$
100	$\frac{(x-0.0125)^2}{0.099^2} + \frac{(y-0.1221)^2}{0.076^2} = 1$
150	$\frac{(x-0.0094)^2}{0.0822^2} + \frac{(y-0.1212)^2}{0.0627^2} = 1$
250	$\frac{(x-0.0018)^2}{0.0631^2} + \frac{(y-0.0477)^2}{0.124^2} = 1$
500	$\frac{(x-0.012)^2}{0.0516^2} + \frac{(y-0.124)^2}{0.0316^2} = 1$
1000	$\frac{(x-0.0043)^2}{0.0335^2} + \frac{(y-0.1233)^2}{0.0252^2} = 1$

表 4 信賴區間驗證的正確率

動差法		線性動差法	
樣本大小	正確率(%)	樣本大小	正確率(%)
20	93.891	20	95.521
30	93.367	30	95.111
40	93.176	40	94.559
50	94.185	50	94.417
60	94.451	60	95.307
75	93.611	75	94.297
100	93.144	100	94.333
150	92.817	150	95.069
250	94.494	250	95.671
500	93.464	500	95.552
1000	93.286	1000	94.152

上的誤差，所以在套配公式時，會造成誤差較大，所以相對的其決定出來的 95%信賴區間範圍會受影響。而線性動差法 95%信賴區間的正確度，由於線性動差與理論值其差距較小，其資料型態的分布也呈現較集中之趨勢，在網格的選取上，不致造成太大的破碎效應，其誤差最大約 0.9%，最小為 0.07%可說是正確性相當的高。

五、結 論

1. 本研究提出由偏態係數與峰度係數產生器、網格法建立樣本組體圖、樣本信賴區間演算、曲線套配此程序，所建立動差比圖的 95% 信賴區間，與 Shenton 和 Bowman (1977)，以偏態係數與峰度係數的聯合機率密度分布模擬，其結果一致，可說明此信賴區間建立的方法正確可行。
2. 前人研究中顯示線性動差比圖，在不同機率分布下的圖形辨別程度優於動差比圖，但尚無建立其信賴區間，故本研究中建立線性動差比圖之信賴區間，推論其應用於機率分布適合度檢定較優於動差比圖。
3. 由信賴區間之驗證結果顯示，使用動差法與線性動差法所得到的信賴水準都接近 95%，其中動差比的誤差最大約 2.2%，而線性動差比的誤差最大約為 0.9%，所以本研究的線性動差比在信賴區間的建立上，準確度優於動差比。因此建議以線性動差比進行頻率分析之機率分布檢定。
4. 水文事件常屬於小樣本，在適合度檢定時易因檢定力小造成不易區別其機率分布型態；藉由本研究之結果將有助於小樣本其機率分布選擇。

參考文獻

1. 吳正吉，1995，「台灣南部地區最大日雨量區域頻率分析之研究」，國立台灣大學農業工程學研究所碩士論文。
2. 易任、張斐章、王文清、林憲博，1995，「運用線性動差於台灣地區雨量頻率分析之研究」，台灣水利，第 43 卷，第二期。
3. 林淑真，1993，「機率分布在水文頻率分析上之效能評估」，國立成功大學水利及海洋工程學研究所碩士論文。
4. 林憲博，2002，「運用線性動差於臺灣地區雨量頻率分析之研究」，國立台灣大學農業工程學研究所碩士論文。
5. 游保杉、許銘熙、林淑真，1993，「嘉南地區日雨量頻率分析之群集特性」，台灣水利，

第 41 卷，第三期。

6. D'Agostino R.B. and Stephens, M.A., 1986. Goodness- of-fit techniques, M. Dekker, New York.
7. Greenwood, J.A., Landwehr, J.M. and Matalas, N.C., 1979. Probability Weighted Moments : Definition and Relation to Parameter of Several Distribution Expressible in Inverse Form, Water Resources Research, 15(5): 1049-1054.
8. Hann, C.T., 1977. Statistical Methods in Hydrology, The Iowa State University Press, pp.161-179.
9. Hosking, J.R.M., 1990. L-moment: Analysis and Estimation of Distribution Using Linear Combinations of Order Statistics. J.R.Stat.Soc., Ser.B, 52, pp105-124.
10. Hosking, J.R.M., 1992. Moments or L-moment? The American Statistician, 46(3): 186-189.
11. ite, G. W., 1988. Frequency and Risk Analysis in Hydrology. Water Resources Publication, pp. 1-257.
12. Landwehr, J.M., Matalas, N.C. and Wallis, J.R., 1979. Probability Weighted Moments Compared with Some Traditional Techniques in Estimating Gumbel Parameters and Quantiles, W.R.R., 15(5): 1055-1064.
13. Rao S. S., 1990. Applied Numerical Methods for Engineers and Scientists.
14. Shenton, L.R. and Bowman, K.O., 1977. A Bivariate Model for the Distribution of $\sqrt{b_1}$ and b_2 . Journal of American Statistical Association, 72(357): 206-211.
15. Vogel, R.M. and Fennessey, N.M., 1993. L-Moment diagrams should replace product moment diagrams. Water Resource Research, 29(6): 1745-1752.
16. Wallis, J.R., Matalas N.C., and Slack J.R., 1974. Just a moment! Water Resources Research, 10(2): pp211-219.

收稿日期：民國 95 年 5 月 26 日

修正日期：民國 95 年 7 月 21 日

接受日期：民國 95 年 7 月 25 日