

灰色預測 GM(1,1)模型應用於粒徑分佈的評估

The Evaluation of Grey Predictive GM(1,1) Model Applied into Soil Particle Distribution

國立雲林科技大學
工程科技研究所
博士生

翁士民

Shi-Min Weng

國立雲林科技大學環境與安全
工程研究所教授暨水土資源
及防災科技研究中心主任

溫志超

Jet-Chau Wen

經濟部水利署
正工程司

張國強

Kou-Chiang Chang

摘 要

目前在國內外的文獻中，對於評估土壤粒徑分佈模型之相關研究實在不多見，唯見 Skaggs 等人於西元 2001 年 (Skaggs *et al.*, 2001) 提出的土壤粒徑評估之經驗模型，此模型在沉泥 (Silt) 組成百分比大約 70 % 時會出現極大的預測誤差，因為目前 Skaggs 等人提出的粒徑分佈預測模型之預測精準度仍有很大需要改進的空間，本研究從本研究場址中的 222 個土樣利用灰色預測 GM(1,1) 模型 (簡稱 GM(1,1) 模型) 來進行土壤粒徑分佈的評估，並提出此模型不適用的粒徑分佈條件及與 Skaggs 經驗模型進行預測精度上的比較。本研究發現 GM(1,1) 模型除了在砂質 (Sand) 土壤之評估較 Skaggs 經驗模型差之外，其餘的土壤種類皆優於 Skaggs 經驗模型。本研究在利用均勻係數由小而大分類各種土樣之過程中發現均勻係數在大於 300 時，相當適合 GM(1,1) 模型之評估，而且隨著均勻係數的增加，各個土壤粒徑分佈評估模型之累積誤差值有減少的趨勢。本研究亦發現 Skaggs 經驗模型在土壤樣本的沉泥 (Silt) 百分比超過 70 % 時會出現極大的誤差，此結果與 Skaggs 等人 (Skaggs *et al.*, 2001) 所得之結果相同。

關鍵詞：Skaggs 經驗模型，GM(1,1) 模型，土壤粒徑分佈模型，沉泥。

ABSTRACT

Nowadays, there are few studies abroad and in Taiwan on models for estimating soil particle-size distributions. Only Skaggs *et al.* (2001) presented the empirical model of soil particle-size distribution. This model has a large prediction error when about 70 percent of the soil is silt because the model needs to be improved. In this study, 222 soil

samples were selected from several sites and the Grey Predictive GM(1,1) model (GM(1,1) model) was used to estimate the particle-size distribution of the soil samples. The GM(1,1) model can be compared with Skaggs empirical model to point out the unfitted conditions of the GM(1,1) model and their accuracies. In this study, the GM(1,1) model was found to be better than Skaggs empirical model except with sand soil. The coefficient of uniformity from the smallest to the largest was used to distinguish the different types of soil and found that when the coefficient of uniformity was greater than 300, the GM(1,1) model made good estimations. Also found was that when the coefficient of uniformity increased, the accumulative absolute error of both the soil particle-size distribution models decreased.

Keywords: Skaggs empirical model, GM(1,1) model, Soil particle-size distribution model, Silt.

一、前言

土壤粒徑分佈 (Particle-Size Distribution, PSD) 資料被廣泛地視為在估算土壤水力特性的基礎，如：水保曲線 (Water Retention Curve) 及未飽和水力傳導係數 (Gupta and Larson, 1979)。Shirazi *et al.* (1988) 表示當從不同土壤分類系統中比較土壤結構量測值的時候，需要 PSD 的預測資料。有關土壤粒徑分佈的最新發展研究集中在使用碎型數學來描述土壤中的粒徑分佈情況 (Bittelli *et al.*, 1999; Posadas *et al.*, 2001)，利用碎型的觀念來求得不同碎型維度的解釋，Bittelli 等人在 1999 年發現粒徑分佈質量與土壤粒徑間乘冪 (Power) 的相對關係中，沒有單一的碎型維度能描述粒徑分佈的全部範圍，並表示有三個乘冪之間的邊界在 $0.51 \pm 0.15 \mu\text{m}$ 及 $85.3 \pm 25.3 \mu\text{m}$ 的粒徑將黏土、泥砂及砂的維度分為 0~1、1~2 及 2~3 間。

土壤中的 PSD 被假設為近似對數形態 (Lognormal Distribution; Shirazi and Boersma, 1984; Buchan, 1989)，Walker and Chittleborough (1986) 表示土壤也可能發生雙型態 PSD 資料 (Bimodal PSDs)。Buchan *et al.* (1993) 從實驗的 PSD 資料來比較 5 種不同的對數型態模型，這 5 個 PSD 模型皆說明大部份受檢驗土壤之 PSD 中有大於 90% 的變異性 (Variance)。Shiozawa and

Campbell (1991) 提出的雙型態對數模型 (Bimodal Lognormal Model) 能對土壤 PSD 提出最佳的模擬結果。目前有很多學者專家已經提出不同模型形式，如：Fredlund 模型 (Fredlund *et al.*, 2000)、Gompertz 模型 (Nemes *et al.*, 1999) 及 Skaggs 模型 (Skaggs *et al.*, 2001)。

Buchan (1989) 提出土壤 PSD 為對數型態的假設是以定義幾何平均直徑 (Geometric Mean Diameter) 及幾何標準偏差 (Geometric Standard Deviation) 為基礎，如：土壤顆徑的平均大小參數 (Mean Size Parameters) 及散度參數 (Spread Parameters)。但是 Hwang *et al.* (2002) 表示當土壤的 PSD 不是呈現對數型態分佈的時候，這些幾何統計參數不能提供精確的土壤水力特性估計值，如：Buchan (1989) 發現只有一半 USDA 結構三角形 (USDA Texture Triangle) 可適於描述對數形態的 PSD 資料。Nemes *et al.* (1999) 在土壤 PSD 資料庫中，評估四種不同內插 PSD 資料的程序適用性 (Procedures Compatibility)，Nemes *et al.* (1999) 發現對數線性內插程序 (Loglinear Interpolation Procedures) 不能在其土壤資料庫中，精確地評估缺少土壤粒徑大小等級的 PSD 資料。

不同 PSD 模型的適用性會受到土壤結構種類 (Soil Texture Classes) 及土壤中粘土含量的影響。Buchan (1989) 指出 USDA 結構三角形中 Silty

Clay、Silty Loam 適於利用對數型態的 PSD 模型進行模擬，但是隨著土壤中粘土的成份愈多愈不易模擬。Ferdlund *et al.* (2000)表示他們提出的模型會隨著土壤中粘土含量的增加而有更好的模擬性能。

有一些 PSD 模型的比較性能研究已經在土壤科學領域中被討論，如：Buchan *et al.* (1993) 及 Rousseva(1997)。Buchan (1993)從紐澤西州的兩個地區收斂了 71 個 PSD 資料組。以上兩篇文章的比較只限於對數型態的模型。就 Hwang *et al.* (2002)所知，當時 PSD 模型的比較只針對不同假設前提的 PSD 模型進行討論。但是，在 PSD 模型性能上的結構效能還沒有被研究。因此，Hwang *et al.* (2002)之研究目的是要測試不同假設前提 PSD 模型來判斷哪個模型最適合表現土壤 PSD，並研究土壤結構影響模型性能的顯著性。

當許多土壤方面的研究爲了估算土壤水力特性或在不同的土壤分類系統中比較土壤結構的量測值。Hwang(2002)爲了評估以下 7 個土壤粒徑分佈評估模型(以下簡稱 PSD 模型)的效能(Ability)，如：Jaky Model (Jaky, 1944)、Simple Lognormal Model (Buchan, 1989)、Offset-Renormalized Lognormal (Model Buchan *et al.*, 1993)、Shiozawa and Campbell Model (Shiozawa and Campbell, 1991)、Gompertz Model (Nemes *et al.*, 1999)、Fredlund Model (Fredlund *et al.*, 2000)。Hwang(2002)利用以上 7 個模型從寬大的土壤結構範圍中來模擬土壤粒徑分佈(PSD)資料。Hwang(2002)特別注意模型性能受到結構效應的影響。當其他 PSD 模型模擬條件皆相同時，Hwang(2002)使用幾個統計基準來判斷哪個模型是使用最少參數數目的理想模型。本研究利用 3 個統計基準(F 統計量、Cp 統計量及 AIC 檢定)發現四參數 Fredlund 模型對於大部分的土壤 PSD 資料都有良好的模擬效果，且當土壤中的黏土含量愈多 Fredlund 模型的模擬性能愈佳。本研究亦發現二或三參數的對數型態模型適於模擬 Silty Clay、Silty Clay Loam、Silt Loam，但其不適於模擬 Sandy Clay Loam。

翁士民等人(2001)使用 GM(1,1)模型進行初步的土壤粒徑分佈評估，其只針對土壤級配的優良與否對於灰色模型性能之探討，所以尚有很多模型的影響因素尚未考慮，如：土壤種類、均勻係數及曲率係數的大小...等因素，且此研究並未利用 GM(1,1)模型與 Skaggs 經驗模型直接進行比較。因此本研究欲解決以上這些問題，並對 GM(1,1)模型的性能提出更完整的描述。

灰色系統理論是鄧聚龍教授於 1989 年提出，灰色建模是灰色系統理論中應用於離散序列的一種分析方法，即是在雜亂無章、訊息不完整的數據中建立近似的微分方程模型，而一般的微分方程是針對訊息完整且連續的數據而建立，因此不適用在上列條件的數據中，所以利用非數學方法取代、借用一般的微分方程來建立近似的微分方程，即稱爲灰差分方程，來解決上述的問題，如：GM(1,1)模型則是借用一般一階一個變數之微分方程所建立的灰差分方程（鄧聚龍，1989；鄧聚龍等人，1999）。灰色建模對於系統訊息不完整及不明確的數據序列，採取生成的方法及一階建模來處理數據，而生成的方法大致可以分爲累加生成（Accumulated Generating Operation, AGO）和累減生成(Inverse Accumulated Generating Operation, IAGO)兩種，利用累加生成的方法最主要是獲得明顯的指數律，減少序列的隨機性及不明確性，而累減生成可將累加生成序列還原成生成前的序列，其目的是檢驗建模後的精確值（鄧聚龍，1989; Chen *et al.*, 2000），而建立 GM(1,1)模型需要利用實際數據序列前四個數據來進行預測，當 GM(1,1)模型在最佳化及序列誤差平方的最小總和是零時，只要兩個數據便會優於四個數據來建模（Li, 1990; Wen *et al.*, 1999），再利用最小平方法，求得一階導數的係數 a 及 b，以評估及預測實際數據。在生成及建模後，接著就可對下一點做預測，但預測值和實際值之間一定會有誤差值產生，因此需要有誤差檢驗，其中包含滾動檢驗、後驗差及殘差包絡模型的程序來評估及修正誤差的大小，藉以提高建模的預測精度，滾動檢驗是利用序列前面二個到四個實際數據建模，在預測下一個實際數據後，

再向後移一個實際數據，用此方式來檢驗建模的精度，而後驗差是利用傳統的統計方法使實際數據序列與預測值序列所做的誤差分析進行比較，用來評估精度等級，最後利用包絡殘差模型檢驗建模精度大小及誤差範圍（吳漢雄等人，1996）。GM(1,1)模型之發展係數 a 值表示模型的發展及預測變化趨勢，而待定係數 b 值則是隨著實際數據序列及發展係數 a 值的大小而產生的有限值，因為灰預測 GM(1,1)模型之發展係數 a 值在實數域 R 內並不是任意分佈的（鄧聚龍，1989；鄧聚龍等人，1999），會有不可分佈之區域及可允許存在的區域產生，因此有可容區及禁區之分（Yeh and Lu, 1996; Lu and Yeh, 1997；翁士民和溫志超，2001），若 a 值出現在可容區中則預測值較符合物理性及準確性，但 a 值落入禁區則反之。

因為目前 Skaggs 等人(2001)提出的粒徑分佈經驗模型在沉泥成分大於 70%的土壤中，會產生很大的模擬誤差，且翁士民等人(2001)對於 GM(1,1)模型性能的介紹並不完整。因此，本研究希望利用 GM(1,1)模型來進行粒徑分佈的預測，以提出此預測模型的完整性能及不適用的土壤粒徑分佈條件，並與 Skaggs 經驗模型進行預測精度上的比較。

二、研究方法與理論分析

本研究方法是利用鄧聚龍教授（1989）所提出 GM(1,1)模型與 Skaggs 等人(2001)所提出的土壤粒徑分佈經驗模型來進行土壤粒徑分佈評估精度的比較。本研究主要將粒徑分析中的累積過篩百分比之實驗值當作原始序列，再利用這二個評估模型來進行預測，而這二個模型都具有只要少量數據就能進行預測與評估的優點。最後本研究將會針對這二個評估模型在各種土壤樣本中的預測精度及評估特性來進行比較，並提出這二個模型之預測精度比較情況與不適合預測的土壤粒徑分佈條件。

1. Skaggs 經驗模型

Skaggs 等人描述土壤累積過篩的粒徑分佈

是利用下列的經驗模型，稱為 Skaggs 經驗模型（以下簡稱 Skaggs 模型）：

$$P(r) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{P(r_0)} - 1 \right) \exp(-uR^c)} \dots\dots\dots(1)$$

$$R = \frac{r - r_0}{r_0}, r \geq r_0 > 0 \dots\dots\dots(2)$$

在式(1)中， $P(r)$ 是土壤粒子在粒徑小於 r 時的累積過篩百分比，單位是無因次， r 是 $P(r)$ 對應的粒徑，單位是 mm， r_0 是應用模型中土壤粒徑的下限，單位是 mm，而 c 及 u 是模型參數，式(1)相當於一條對數成長的曲線來描述整個土壤的粒徑分佈情況。對於式(1)有幾件事情是值得注意的，首先，此模型描述的分佈只有在 $r > r_0 > 0$ 時，且必須詳細說明在 r_0 分佈的累積過篩百分比值 $P(r_0) > 0$ 。第二，對於任何 $r_2 > r_1$ 而言，此模型將會表示 $P(r_2) > P(r_1)$ ，其可能不符合在特別不良的土壤級配上。最後，此模型預測在 $r \rightarrow \infty$ 時 $P \rightarrow 1$ 。然而，我們發現式(1)在描述粒徑分佈方面是一個易操作且有用的模型。

式(1)是 Skaggs 經驗模型的基礎並加以重新整理，此方程式是伴隨斜率 c 呈線性關係的，且 $\ln u$ 為截距：

$$\ln u + c \cdot \ln \frac{r - r_0}{r_0} = \ln \left[-\ln \frac{\frac{1}{P(r)} - 1}{\frac{1}{P(r_0)} - 1} \right], r > r_0 \dots\dots(3)$$

此線性關係讓 $P(r_0)$ 配合兩個粒徑分佈的累積過篩百分比值分別是 $P(r_1)$ 及 $P(r_2)$ ，可以寫兩個方程式，其可解決此兩個問題，即計算上述二未知的參數 c 及 u 。對於 c 及 u 的展開方程式是

$$c = \alpha \ln \frac{v}{w} \dots\dots\dots(4)$$

$$\text{及 } u = -v^{1-\beta} w^\beta \dots\dots\dots(5)$$

$$\text{其中, } v = \ln \frac{\frac{1}{P(r_1)} - 1}{\frac{1}{P(r_0)} - 1}, w = \ln \frac{\frac{1}{P(r_2)} - 1}{\frac{1}{P(r_0)} - 1} \dots\dots\dots(6)$$

$$\alpha = \frac{1}{\ln \frac{r_1 - r_0}{r_2 - r_0}}, \beta = \alpha \ln \frac{r_1 - r_0}{r_0} \dots\dots\dots(7)$$

$$1 > P(r_2) > P(r_1) > P(r_0) > 0, r_2 > r_1 > r_0 > 0 \quad (8)$$

然而，我們可以利用式(1)來模擬土壤粒徑分佈的情況，並利用 $P(r_2)$ 、 $P(r_1)$ 及 $P(r_0)$ 來計算模型參數 c 及 u ，其中 $P(r_1) > P(r_0)$ 及 $P(r_2) > P(r_1)$ 。然而，式(5)在 β 為非整數值的情況中，其 u 是實數(real)。

$$u = -v^{1-\beta} w^\beta = |v|^{1-\beta} |w|^\beta \dots\dots\dots(9)$$

對於實數 β 是正值且為實數。然而，基於式(9)的數值計算可能產生 $u' = u + iy$ ，其中， $i = \sqrt{-1}$ 而 y 是相當接近 0 的。在本案例中，利用 $u' = u + iy$ 實數的部分， $\text{Re}(u') = u$ ，如在式(1)中的參數。由兩者擇其一，一個可能藉由另一個方程式來計算 u ，如下式所示

$$u = (-v)^{1-\beta} (-w)^\beta = |v|^{1-\beta} |w|^\beta \dots\dots\dots(10)$$

其兩者式(9)及式(10)都可求得相同的 u 值。

2. GM(1,1)模型

灰色系統理論是鄧聚龍教授(1989)所提出，其中的灰預測 GM(1,1)模型(以下簡稱 GM(1,1)模型)可用來預測隨機、離散的數據。當灰色系統利用 H 個變數來描述及一個已知 N 階差分方程，如：GM(N,H)模型。因此，GM(1,1)只組成在一個變數及一階差分方程。進行灰預測 GM(1,1)模型預測時，因為粒徑分佈的數據是正值且介於 0 ~ 1 之間，符合灰色系統中灰生成的數據要求。

令 $x^{(0)}$ 是一個原始的序列，其中 $x^{(0)}(1)$ 是初值：

$$x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)) \dots\dots\dots(11)$$

$x^{(0)}$ 經由一次累加生成(1-AGO)運算後，所產生的新序列，即 $x^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$ 是原始序列 $x^{(0)}$ 經過一次累加生成的結果，

$$\text{其中 } x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), \quad \forall k = 1, 2, \dots, n \dots\dots\dots(12)$$

而且 $z^{(1)}$ 是一次累加生程序列 $x^{(1)}$ 的平均值，其中

$$z^{(1)}(k) = 0.5(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)), \quad \forall k = 2, 3, \dots, n \dots\dots\dots(13)$$

然後， $x^{(1)}$ 與 $z^{(1)}$ 兩序列同時進行最小二乘法可得 GM(1,1)模型的灰差分方程被描述如下：

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b, \quad \forall k = 2, 3, \dots, n \dots\dots\dots(14)$$

$$a = \frac{\sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) - (n-1) \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) x^{(0)}(k)}{(n-1) \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k)^2} \dots\dots\dots(15)$$

$$b = \frac{\sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k)^2 - \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) x^{(0)}(k)}{(n-1) \sum_{k=2}^n z^{(1)}(k)^2 - \left[\sum_{k=2}^n z^{(1)}(k) \right]^2} \dots\dots\dots(16)$$

其中 a 是發展係數， b 是待定係數，分別地控制著 GM(1,1)模型，並求出 GM(1,1)模型的通解：

$$x^{(1)}(k+1) = \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] \cdot e^{-ak} + \frac{b}{a} \dots\dots\dots(17)$$

其中 $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ ，並對此通解進行一次累減生成(1-IAGO)如下：

$$\begin{aligned} x^{(0)}(k+1) &= x^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k) \\ &= (1 - e^a) \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] \cdot e^{-ak} \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

再將式(18)重新整理可得如下

$$\hat{x}^{(0)}(k) = (1 - e^a) \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] \cdot e^{-a(k-1)} \dots\dots\dots(19)$$

由(19)式便可求得原始序列的預測值 $\hat{x}^{(0)}$ 。

三、研究場址介紹與物性分析方法

本研究之兩場址分別位於雲林縣林內鄉烏塗村三號水門旁及林中村林內紙廠旁，地處濁水溪沖積扇上游，卵礫石層遍布，第三個研究場址位於雲林縣莿桐鄉饒平村，如圖 1 所示。林內鄉

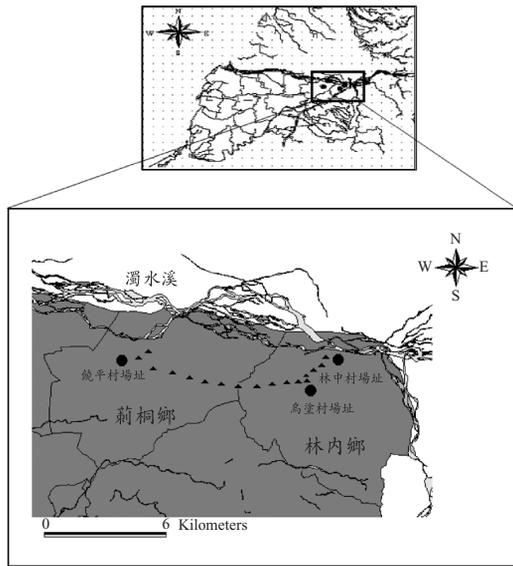


圖 1 研究場址分佈圖：其中●表示在入滲場址(即研究場址)採集的土樣，▲表示在串聯地帶採集的土樣

烏塗村及林中村與荊桐鄉之饒平村場址之研究面積分別為 1050.584 (m²)、1268.325 (m²)及 1329.4375 (m²)，而採樣點除了在這三個研究場址外，還包括烏塗村與林中村及林中村與饒平村之間串聯地帶的土樣。

採樣後之土壤進行粒徑分析，如：篩分析、液體比重計法等基本物性分析，以瞭解研究場址現地土壤性質及其分類。液體比重計分析 (ASTM: D442-63)適用於分析粒徑小於 74 μm (即通過 200 號篩)的土壤粒徑分佈。首先，將懸浮液由攪拌瓶洗入大量筒中，加蒸餾水至 1000 c.c.刻度，使其均勻混合約 1 分鐘。接著，迅速將大量筒置於桌面，同時開動計時器，此為沉澱試驗之開始時間，隨即小心放入比重計。從開始時間起算，於 1/4、1/2、1、2、5、15、30、60、250、1440 分鐘時，記錄比重計讀數。在記錄 2 分鐘之比重計讀數後，取出比重計，並將此比重計放入另一盛蒸餾水之大量筒中，在每一次紀錄比重計讀數之前 30 秒，才將此比重計從一盛滿蒸餾水之大量筒移至懸浮液中進行紀錄。篩分析 (ASTM: D452-85)適用於分析粒徑大於 0.074 mm

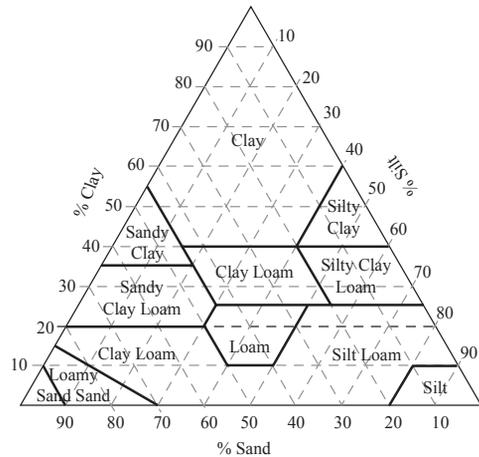


圖 2 USDA 三角形組織分類圖

(即停留於 200 號篩以上)的土壤粒徑分佈。首先，將土樣置於篩分析器內，利用搖篩機進行篩分析。土樣分別通過 10 號、20 號、60 號、100 號、200 號篩分析器(每個篩分析器對應一個粒徑大小)後，將各篩分析器之停留物稱重以求出各個粒徑的過篩百分比值。

在土壤粒徑分佈曲線上，累積過篩百分比為 10 %的土樣粒徑，被定義為有效粒徑或 D_{10} ； D_{30} 在土壤粒徑分佈曲線上，相當於累積過篩百分比為 30 %的直徑； D_{60} 在土壤粒徑曲線上，相當於累積過篩百分比為 60 %的直徑。均勻係數 (C_u) 為 D_{60} 除以 D_{10} 之結果，而曲率係數 (C_c) 為 D_{30} 之平方除以 D_{10} 與 D_{60} 相乘的結果。一般而言，其礫石具有均勻係數約大於 4，而砂石其均勻係數約大於 6，而曲率係數介於 1 與 3 者，我們稱之為優良級配(Well Graded)之土樣。根據 USDA (美國農務部)發展之三角圖形組織分類制，如圖 2 所示，進行土壤的分類，此圖是基於 USDA 所定的顆粒大小界限所繪製的：

- a. 砂-尺寸 直徑 2.0 至 0.05 mm
- b. 沉泥-尺寸 直徑 0.05 至 0.002 mm
- c. 黏土-尺寸 直徑小於 0.002 mm

假設其土樣中砂佔 a %、沉泥佔 b %及黏土佔 c %，但若土樣中含有土粒尺寸大於 2.0 mm (卵石) 為 N，則必須扣除卵石的百分比進行修正，則修正後其土樣中各組成百分比為

表 1 土壤物性試驗結果整理表

	荊桐鄉饒平村			林內鄉林中村		林內鄉烏塗村		串聯地帶		
	地 表 下									
	0-40cm	40-80cm	80-120cm	0-15cm	15-30cm	0-15cm	15-30cm	0-15cm	15-30cm	30-45cm
採樣點數	30	30	30	25	25	25	25	17	14	1
砂 (%)	63.710-80.530	60.240-86.590	41.120-86.620	77.350-99.000	77.570-86.570	64.750-98.120	50.690-84.610	77.960-84.630	74.580-85.100	78.840
沉泥 (%)	15.000-34.170	11.660-31.510	12.310-58.880	1.000-21.460	9.710-21.160	1.780-28.950	14.050-41.870	14.220-19.300	20.840-20.840	21.170
黏土 (%)	0.000-13.740	0.000-9.360	0.000-13.500	0.000-1.170	0.000-3.850	0.000-19.800	0.000-10.860	0.000-5.740	0.000-5.480	0.000
有效粒徑 (mm)	0.003-0.047	0.004-0.055	0.002-0.057	0.010-0.490	0.006-0.075	0.002-0.290	0.002-0.0760	0.013-0.068	0.007-0.074	0.032
均勻係數 Cu	5.240-172.730	6.000-614.280	14.900-820.000	2.650-115.380	6.860-95.240	1.750-2000.000	3.470-620.700	7.350-100.000	4.240-91.750	19.060
曲率係數 Cd	0.310-3.130	0.470-13.830	0.086-15.850	0.600-9.720	0.140-16.530	0.290-5.510	0.230-13.440	0.630-2.340	0.320-12.410	1.120
土壤性質	壤土質砂、砂質壤土、砂質黏土質壤土	壤土質砂、砂質壤土、砂質黏土質壤土	壤土質砂、砂質壤土、砂質黏土、黏土、壤土	壤土質砂、砂質壤土、砂質	壤土質砂、砂質壤土、砂質	壤土質砂、砂質壤土、砂質黏土質壤土	壤土質砂、砂質壤土、砂質黏土質壤土、壤土	壤土質砂、砂質壤土、沉泥	壤土質砂、砂質壤土	砂質黏土質壤土

砂： $[a / (100 - N)] * 100 \%$

沉泥： $[b / (100 - N)] * 100 \%$

黏土： $[c / (100 - N)] * 100 \%$

上述三處研究場址的採樣點均以此方法作為資料的分析處理。採回之土樣先進行粒徑分析，再代入 USDA 的三角形組織分類圖以求出其土壤的類別。

本研究的研究場址有雲林縣林內鄉之烏塗村及林中村、荊桐鄉之饒平村與這三個場址之間的串聯地帶。經過以上土壤物性試驗分析的結果如表 1 所示。在表 1 中表示出在各個研究場址地表下所採取的土樣深度，如：砂、壤土及黏土在土樣中所佔的重量百分比、有效粒徑則採用 D_{10} 的粒徑、均勻係數及曲率係數，在每個欄位中所表示的範圍是在經過土壤試驗後所得到的實驗值全距(Range)。將上述所有的土樣經過粒徑分析實驗及分類的結果如表 2 所示，本研究發現在表 2 中荊桐鄉饒平村場址有 30 個採樣孔洞，其中有 90 個土樣；林內鄉林中村場址有 25 個採樣孔洞，其中有 50 個土樣；林內鄉烏塗村場址有 25 個採樣孔洞，其中有 50 個土樣；串聯地帶有 17 個採樣孔洞，其中有 32 個土樣。

本研究將探討的案例分為八種，即：壤土質砂 (Loamy Sand)、砂質壤土 (Sandy Loam)、

表 2 研究場址的土壤分類結果表

研究場址 土壤種類	荊桐鄉 饒平村	林內鄉 林中村	林內鄉 烏塗村	串聯 地帶
壤土質砂	16 個	34 個	17 個	21 個
砂質壤土	62 個	6 個	23 個	7 個
砂質黏土	2 個	0 個	0 個	0 個
壤土	3 個	0 個	1 個	0 個
黏土	2 個	0 個	0 個	0 個
砂質黏土質壤土	5 個	0 個	8 個	1 個
砂質	0 個	10 個	1 個	0 個
沉泥	0 個	0 個	0 個	3 個
總計	90 個	50 個	50 個	32 個

砂質黏土 (Sandy Clay)、壤土 (Loam)、黏土 (Clay)、砂質黏土質壤土 (Sandy Clay Loam)、砂質 (Sand) 及沉泥 (Silt)，再伴隨著 Cu 值的大小來進行討論，利用 Skaggs 粒徑評估模型與 GM(1,1)模型來比較預測精度，進一步探討這二個模型不適用的土壤分佈條件。

四、結果與討論

本研究將將這三個研究場址及各場址之串聯地帶的所有土樣經過 USDA(美國農務部)發展的三角圖形組織分類制分類出來的 8 種土壤種類 (砂質土壤、砂質黏土土壤、砂質黏土質壤土、

表 3 代表土樣之所屬研究場址及 Skaggs 經驗模型設定參數表

圖名	土樣編號	研究場址	設定參數					
			r_0 (mm)	r_1 (mm)	r_2 (mm)	$P(r_0)$	$P(r_1)$	$P(r_2)$
3a	中-18A	林中村	0.050	0.007	2.000	0.007	0.116	0.007
3b	荊-10C	鏡平村	0.006	0.007	2.000	0.046	0.208	0.046
3c	荊-04B	鏡平村	0.005	0.007	2.000	0.073	0.276	0.073
3d	荊-04A	鏡平村	0.005	0.007	2.000	0.036	0.187	0.036
3e	荊-04C	鏡平村	0.009	0.007	2.000	0.071	0.269	0.071
3f	荊-06C	鏡平村	0.005	0.007	2.000	0.071	0.347	0.071
3g	荊-21A	鏡平村	0.004	0.007	2.000	0.032	0.205	0.032
3h	串-16A	串聯地帶	0.009	0.007	2.000	0.070	0.889	0.070

砂質壤土、壤土、黏土、壤土質砂及沉泥)的土壤粒徑分析試驗量測值、Skaggs 模型及 GM(1,1) 模型模擬值之比較圖，如圖 3 所示，其中有關 Skaggs 經驗模型設定之參數，如表 3 所示。

在本研究利用表 3，表示圖 3a 至圖 3h 之所屬研究場址及每個土樣所對應的設定參數。表 3 之 3a, 3b, 3c, 3d, 3e, 3f, 3g, 3h 分別表示圖 3a 至圖 3h 所呈現之土樣編號，分別為中-18A, 荊-10C, 荊-04B, 荊-04A, 荊-04C, 荊-06C, 荊-21A 及串-16A。在圖 3 中，可看出這 8 個土樣設定之 r_1 及 r_2 都是 2 (mm)及 0.074 (mm)，但是，設定之 r_0 則不一定相同，這是因為本研究利用比重計進行土壤沉降試驗時，在第 250 分鐘所求得之粒徑不相同所致。本研究在進行篩分析可得到最大篩網 9.53 (mm)所對應之粒徑及累積過篩百分比，但是本研究在此卻取 r_2 為篩網 2 (mm)及其對應之累積過篩百分比 $P(r_2)$ ，這是因為本研究想觀察 Skaggs 經驗模型在土壤粒徑為 2 ~ 9.53 (mm)之間的模擬情況。本研究設定 r_1 為 0.074 (mm)及其對應之土壤粒徑為 $P(r_1)$ ，是因為土壤粒徑 r_1 及 $P(r_1)$ 位於土壤粒徑分佈曲線的中央附近。本研究設定之 r_0 是取用比重計進行土壤沉降試驗第 250 分鐘所求得之粒徑及其對應之累積過篩百分比 $P(r_0)$ ，是想要觀察土壤沉降試驗第 250~1440 分鐘之間土壤粒徑的模擬情況。

圖 3a 至圖 3h 分別表示 Skaggs 及 GM(1,1) 這兩個土壤粒徑評估模型在 8 種土壤的模擬情況，圖 3a 至圖 3h 分別表示土樣編號中-18A、荊

-10C、荊-04B、荊-04A、荊-04C、荊-06C、荊-21A 及串-16A 的土樣。本研究所選擇的這 8 個土樣，可分別代表砂質土壤、砂質黏土土壤、砂質黏土質壤土、砂質壤土、壤土、黏土、壤土質砂及沉泥這 8 種土壤的模擬情況。圖中的橫軸表示土壤粒徑大小，單位為毫米(mm)，縱軸為累積過篩百分比，單位為無因次。圖 3a 表示 Skaggs 模型在砂質土壤的模擬效果較 GM(1,1)模型更接近觀測值，圖 3b 至圖 3h 可看出除了砂質土壤以外，GM(1,1)模型在其他 7 種土壤種類的模擬值較 Skaggs 模型更接近實驗值。圖 3h 表示 Skaggs 模型在沉泥質土壤的模擬值會產生很大的誤差，此結果與 Skaggs *et al.* (2001)相同，但是 GM(1,1)模型卻能提供良好的模擬效果。

在圖 4 中，橫軸表示土壤粒徑分析試驗的實驗值，縱軸為土壤粒徑評估模型之模擬值，此實驗值與模擬值皆為累積過篩百分比，單位為無因次。若土壤粒徑評估模型之模擬值與實驗值之相似度愈高(即相關係數 R^2 值愈接近 1，且 $0 < R^2$ 值 < 1)，表示此土壤粒徑評估模型之模擬效果愈佳。在圖 4a 中，可知 Skaggs 模型之 R^2 值較 GM(1,1) 模型為佳，表示 Skaggs 模型在砂質土壤之模擬效果較 GM(1,1)模型為高。在圖 4b 至圖 4h 中，可知 GM(1,1)模型在其他土壤種類之 R^2 值較 Skaggs 模型為高，表示 GM(1,1)模型除了在砂質土壤之模擬效果較 Skaggs 模型差之外，GM(1,1)模型在其他土壤種類之模擬效果皆優於 Skaggs 模型。

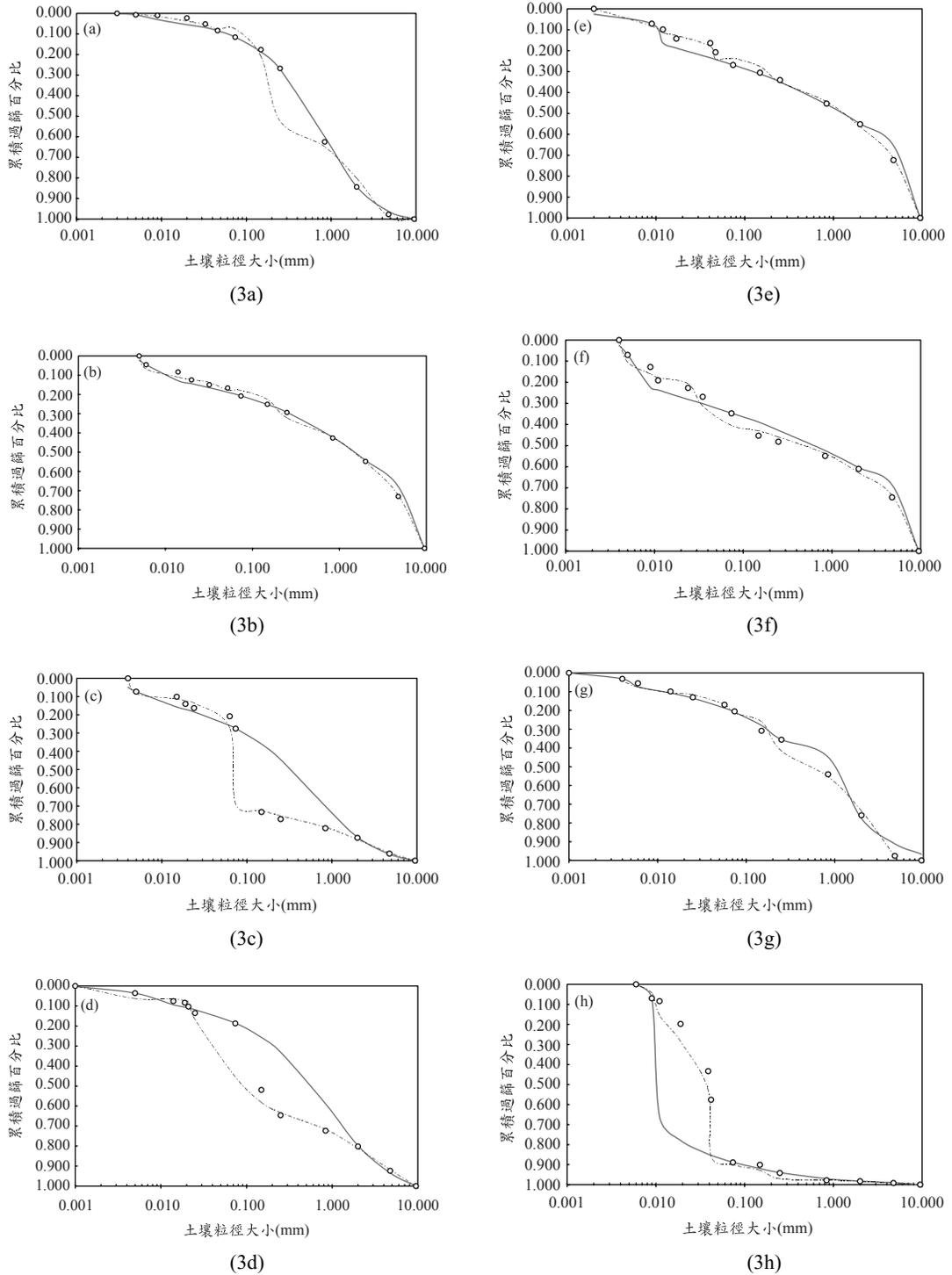


圖 3 土壤粒徑分析試驗實驗值與土壤粒徑評估模型模擬值比較圖：(3a)砂質土壤，(3b)砂質黏土，(3c)砂質黏土質壤土，(3d)砂質壤土，(3e)壤土，(3f)黏土，(3g)壤土質砂，(3h)沉泥。○表示土壤粒徑分析試驗實驗值，—表示 Skaggs 經驗模型模擬值，---表示 GM(1,1)模型模擬值

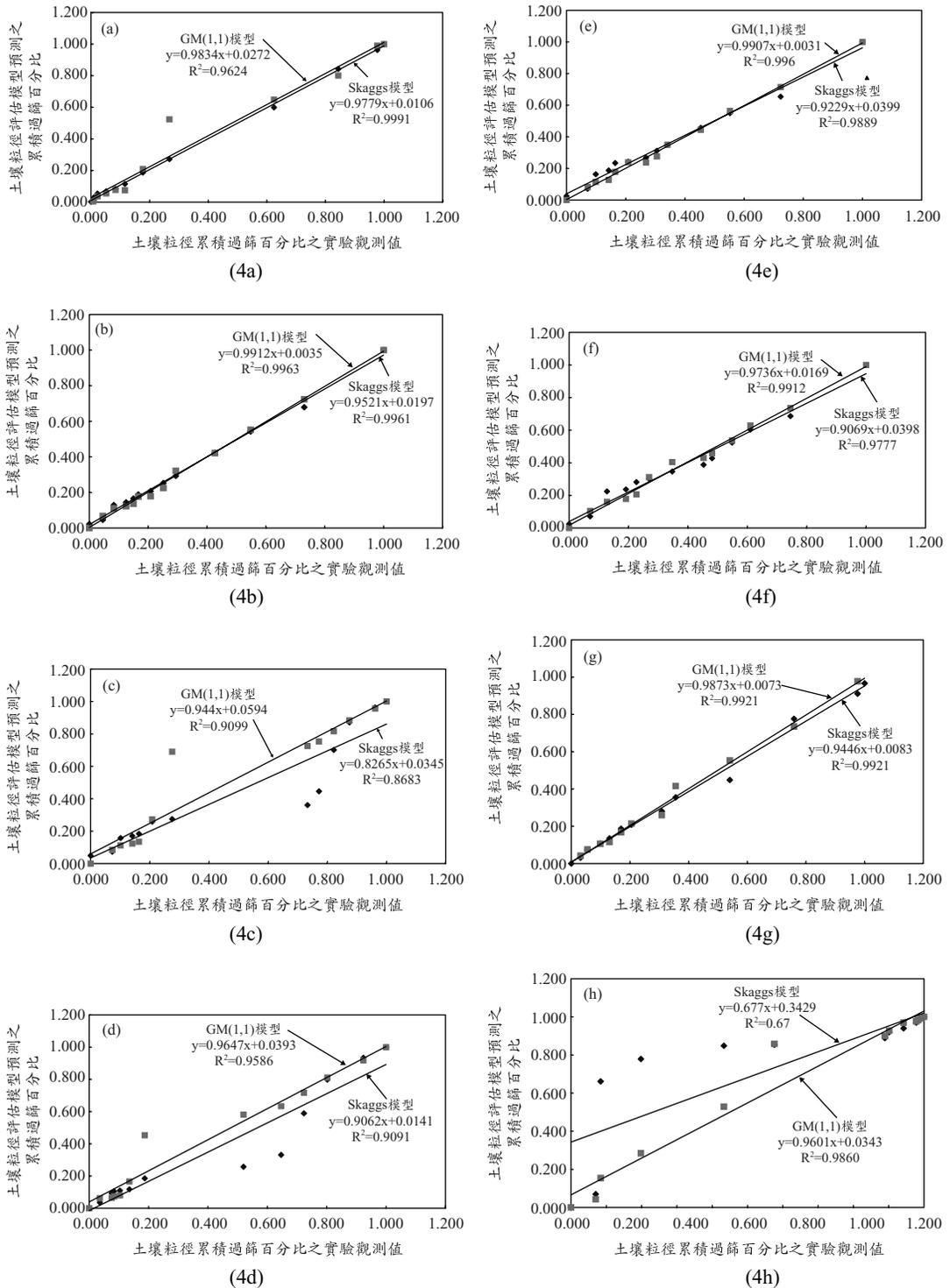


圖 4 土壤粒徑評估模型模擬效果比較圖：(4a)砂質土壤，(4b)砂質黏土，(4c)砂質黏土質壤土，(4d)砂質壤土，(4e)壤土，(4f)黏土，(4g)壤土質砂，(4h)沉泥。◆表示 Skaggs 經驗模型模擬值，■表示 GM(1,1) 模型模擬值， R^2 表示相關係數

將這三個研究場址及各場址之串聯地帶的所有土樣經過 USDA (美國農務部) 發展的三角圖形組織分類制分類出砂質 (Sand) 土壤, 並將砂質土壤之均勻係數由小至大排列, 如圖 5a 所示。圖 5a 顯示不管 Skaggs 模型及 GM(1,1) 模型之累積誤差值皆隨著均勻係數的增大而減少。在 11 個砂質土壤的土樣中, 有 9 個土樣表示 Skaggs 模型之累積誤差值小於 GM(1,1) 模型, 表示 Skaggs 模型在評估砂質土壤較 GM(1,1) 模型有較高的預測精度。

本研究將所有土樣依據 USDA (美國農務部) 發展的三角圖形組織分類制分類出砂質黏土 (Sandy Clay) 土壤, 並將此類型土樣之均勻係數由小至大排列, 如圖 5b 所示。圖 5b 顯示不管 Skaggs 模型及 GM(1,1) 模型之累積誤差值皆隨著均勻係數的增大而減少。在 2 個砂質黏土 (Sandy Clay) 土壤的土樣中, Skaggs 模型與 GM(1,1) 模型之預測精度可說是不相上下, 但在採樣點刺-10C 及刺-2C 中, Skaggs 模型與 GM(1,1) 模型在累積誤差中之些微差距中可看出, GM(1,1) 模型在評估砂質黏土 (Sandy Clay) 土壤時較優於 Skaggs 模型。

本研究將依據 USDA (美國農務部) 發展的三角圖形組織分類圖分類出之砂質黏土質壤土 (Sandy Clay Loam) 土壤, 並將此種類土樣之均勻係數由小至大排列, 如圖 5c 所示。圖 5c 顯示不管 Skaggs 模型與 GM(1,1) 模型之累積誤差值皆隨著均勻係數的增大而減少。在 14 個砂質黏土質壤土 (Sandy Clay Loam) 土壤的土樣中, 有 12 個土樣表示 GM(1,1) 模型之累積誤差值小於 Skaggs 模型, 換言之, GM(1,1) 模型在評估砂質黏土質壤土 (Sandy Clay Loam) 土壤時優於 Skaggs 模型。

本研究將所有土樣經過 USDA (美國農務部) 發展的三角圖形組織分類制分類出砂質壤土 (Sandy Loam) 土壤, 並將此類型土樣之均勻係數由小至大排列, 如圖 5d 所示。圖 5d 顯示 Skaggs 模型及 GM(1,1) 模型之累積誤差值皆隨著均勻係數的增大而減少。在 98 個砂質壤土 (Sandy Loam) 土壤的土樣中, 有 63 個土樣表示 GM(1,1)

模型之累積誤差值小於 Skaggs 模型, 換言之, GM(1,1) 模型在評估砂質壤土 (Sandy Loam) 土壤時優於 Skaggs 模型。

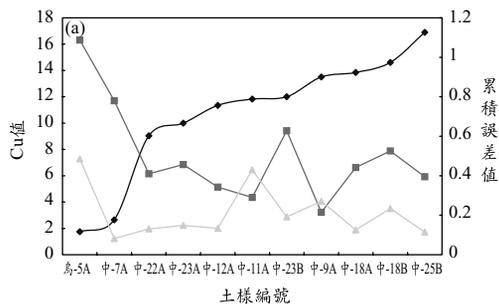
本研究將所有壤土 (Loam) 土壤, 並將此種類土壤之均勻係數由小至大排列, 如圖 5e 所示。圖 5e 顯示不管 Skaggs 模型及 GM(1,1) 模型之累積誤差值皆隨著均勻係數的增大而減少。在 4 個壤土 (Loam) 土壤的土樣中, Skaggs 模型與 GM(1,1) 模型之預測精度可說是不相上下, 但整體而言, GM(1,1) 模型在評估壤土 (Loam) 土壤時較優於 Skaggs 模型。

本研究將黏土 (Clay) 土壤之均勻係數由小至大排列, 如圖 5f 所示。圖 5f 顯示不管 Skaggs 模型及 GM(1,1) 模型之累積誤差值皆隨著均勻係數的增大而減少。在 2 個黏土 (Clay) 土壤的土樣中, GM(1,1) 模型之累積誤差值皆小於 Skaggs 模型, 換言之, GM(1,1) 模型在評估黏土 (Clay) 土壤時優於 Skaggs 模型。

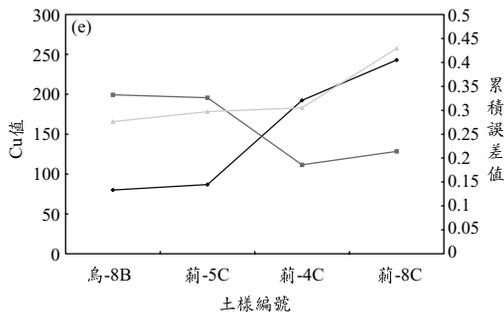
本研究將所有土樣依據 USDA (美國農務部) 發展的三角圖形組織分類制分類出壤土質砂 (Loamy Sand) 土壤, 並將此類型土樣之均勻係數由小至大排列, 如圖 5g 所示。圖 5g 顯示不管 Skaggs 模型及 GM(1,1) 模型之累積誤差值皆隨著均勻係數的增大而減少。在 88 個壤土質砂 (Loamy Sand) 土壤的土樣中, 有 56 個土樣表示 GM(1,1) 模型之累積誤差值小於 Skaggs 模型, 換言之, GM(1,1) 模型在評估壤土質砂 (Loamy Sand) 土壤時優於 Skaggs 模型。在圖 5g 中, 不能明顯地看出 Skaggs 模型及 GM(1,1) 模型之累積誤差值皆隨著均勻係數的增大而減少。

本研究將所有沉泥 (Silt) 土壤, 並將沉泥土壤之均勻係數由小至大排列, 如圖 5h 所示。圖 5h 顯示 GM(1,1) 與 Skaggs 模型之累積絕對誤差值皆隨著均勻係數的增大而減少。GM(1,1) 模型之累積絕對誤差值全部小於 Skaggs 模型, 換言之, GM(1,1) 模型在評估沉泥土壤時優於 Skaggs 模型。

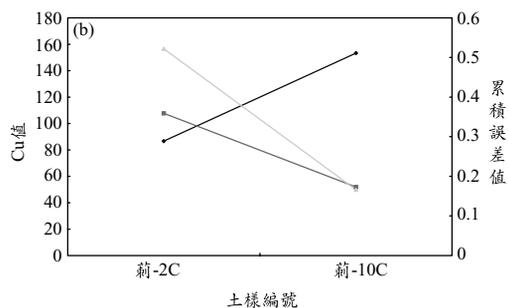
本研究發現 GM(1,1) 模型除了在砂質 (Sand) 土壤之評估較 Skaggs 經驗模型差之外, 其餘的土壤種類皆優於 Skaggs 經驗模型。



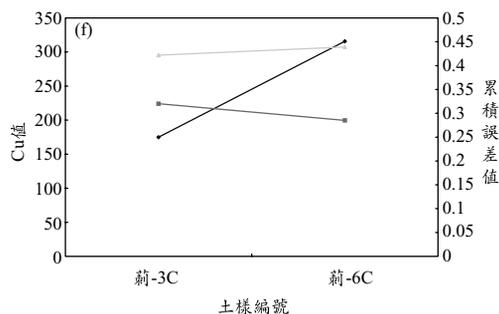
(5a)



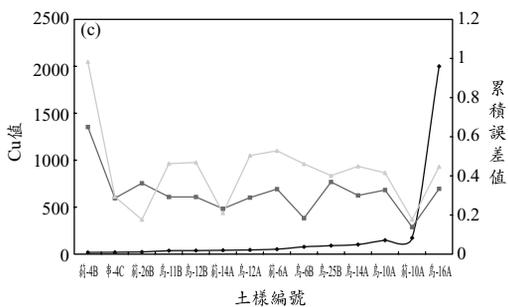
(5e)



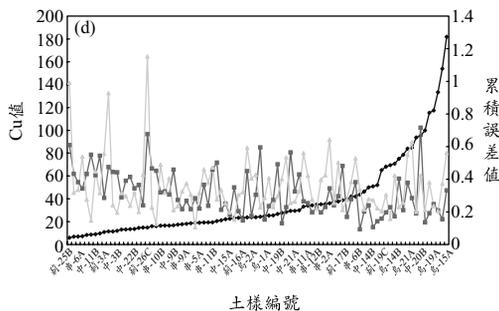
(5b)



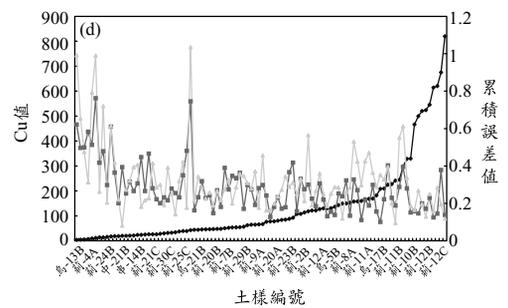
(5f)



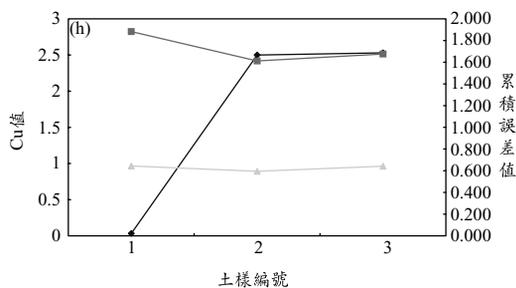
(5c)



(5g)



(5d)



(5h)

圖 5 均勻係數排序與土壤粒徑評估模型之累積絕對誤差值：(5a)砂質土壤，(5b)砂質黏土，(5c)砂質黏土質壤土，(5d)砂質壤土，(5e)壤土，(5f)黏土，(5g)壤土質砂，(5h)沉泥。◆為均勻係數(Cu 值)，▲表示 Skaggs 經驗模型模擬累積誤差值，■表示 GM(1,1)模型模擬累積誤差值

表 4 灰色預測 GM(1,1)模型之 a, b 值與土壤試驗結果對照表

土壤種類	土樣數目	有效粒徑 (mm)	均勻係數 Cu	曲率係數 Cd	GM(1,1)的 a 值	GM(1,1)的 b 值
砂質	11	0.050-0.490	1.750-16.900	0.840-3.000	0.020-1.820	0.000-3.540
砂質黏土	2	0.015-0.015	86.670-153.330	1.240-2.480	0.050-0.390	0.210-1.410
砂質黏土質壤土	14	0.002-0.032	17.390-2000.000	0.300-7.540	0.040-0.730	0.130-1.550
砂質壤土	98	0.002-0.076	3.470-820.000	0.260-19.530	-0.620-1.250	-0.100-1.870
壤土	4	0.002-0.021	80.000-242.860	0.230-1.570	0.110-0.260	0.220-1.190
黏土	2	0.006-175.000	175.000-315.790	0.090-0.250	0.040-0.270	0.280-0.950
壤土質砂	88	0.006-0.100	6.000-181.820	0.140-16.530	0.050-1.150	0.060-1.750
沉泥	3	0.012-0.015	0.033-2.530	0.459-0.990	0.113-0.216	0.455-1.161

因此，我們提供有關 GM(1,1)模型在各種土壤種類中所伴隨產生 a 與 b 值的全距(Range)，如表 4 所示，其中 a 值與 b 值分別表示 GM(1,1)模型的發展係數與待定係數，這兩個參數都是採用 GM(1,1)模型時的重要參數。本研究在利用均勻係數由小而大分類各種土樣之過程中發現均勻係數大於 300 時，相當適合 GM(1,1)模型之評估，而且隨著均勻係數的增加，各個土壤分佈評估模型之累積誤差值有減少的趨勢。本研究亦發現 Skaggs 經驗模型在土壤樣本中沉泥 (Silt) 之組成百分比超過 70 % 時會出現極大的誤差，此結果與 Skaggs 等人 (2001) 所得之結果相同，在此類的土樣中 GM(1,1)模型在評估沉泥土壤時優於 Skaggs 經驗模型。

五、結論與建議

本研究方法是利用鄧聚龍教授(1989)所提出 GM(1,1)模型與 Skaggs 等人 (2001) 所提出的土壤粒徑經驗模型來進行土壤粒徑分佈評估精度的比較。本研究主要將粒徑分析中的累積過篩百分比之實驗值當作原始序列，再利用這二個評估模型來進行預測，而這二個模型都具有只要少量的數據就能進行預測與評估的優點。本研究並針對這二個評估模型在各種土壤樣本中的預測精度與評估特性來進行比較。

本研究原本根據 USDA (美國農務部) 發展的三角圖形組織分類制 (如圖 2 所示) 進行土壤的分類，並作為案例分類及探討的依據，因為本

研究認為土樣在經過篩分析實驗後，首先一定知道此土樣的砂 (Sand)、沉泥 (Silt) 及黏土 (Clay) 所佔的比例，並觀察土樣在優良級配 (Well Graded) 及不良及配 (Poorly Graded) 下，對各個土壤分佈評估模型之預測精度是否有明顯的影響，但經過一番的討論後，本研究發現如此的分類結果並不能完全地比較出 Skaggs 經驗模型與 GM(1,1)模型之間的優劣。本研究在整理數據後發現這二個土壤粒徑評估模型的預測精度都受到土樣均勻係數 (Cu 值) 的影響，因為均勻係數愈小表示土壤粒徑分佈之 S 型曲線變化愈劇烈，所造成模型的預測精度應該會有很大的影響。因此，本研究在土樣經過 USDA 分類制分類後改利用觀察 Cu 值與各個土壤粒徑分佈評估模型之累積絕對誤差值之間的關係性，並試著從其中找出 GM(1,1)模型之不適合模擬的土壤分佈條件。

本研究發現 Skaggs 受到均勻係數的影響較小，但均勻係數卻對 GM(1,1)模型的預測精度造成很大的影響。本研究發現 Skaggs 經驗模型及 GM(1,1)模型都很適合應用在土壤粒徑分佈方面之評估。本研究亦發現 Skaggs 經驗模型在土壤樣本的沉泥 (Silt) 百分比超過 70 % 時會出現極大的誤差，此結果與 Skaggs 等人 (2001) 相同，但 GM(1,1)模型在評估沉泥土壤時優於 Skaggs 經驗模型。

本研究的 GM(1,1)模型是利用等間距的方式來建模，未來將利用灰色預測 GM(1,1)非等間距

外差模型來突破這個瓶頸。本研究未來亦想利用灰色預測 Verhalt 模型加入土壤粒徑分佈評估模型的行列，因為灰色預測 Verhalt 模型其預測的趨勢與土壤粒徑分佈的趨勢相同，皆呈 S 曲線的分佈。

致 謝

本研究承蒙農業委員會經費補助，計畫編號 90 農發—2.2—林—08(16)，謹致謝意。

參考文獻

- Bittelli, M., G. S. Campbell, and M. Flury, Characterization of Particle-Size Distribution in Soils with a Fragmentation Model, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 63, 782-788, 1999.
- Buchan, G. D., Applicability of the simple logmordal model to particle-size distribution in soils, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 147(3),155-161, 1989
- Buchan, G. D., K. S. Grewal, and A. B. Robson, Improved models of particle-size distribution: An illustration of model comparison techniques, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 57:901-908, 1993.
- Campbell, G.. S., and S. Shiozawa, Prediction of hydraulic properties of soils using particle-size distribution and bulk density data, 317-328, In M. Th. van Genuchten, F. J. Leij, Lund. (ed.) Indirect methods for estimating the hydraulic properties of unsaturated soils. Univ. of California, Riverside, 1992.
- Chen, J. L., J. H. Wen, J. C. Wen, and K. L. Wen, On Class Ratio in Modeling, *The Journal of Grey System*, 3, 229-232, 2000.
- Fredlund, M. D., D. G. Fredlund, and G. W. Wilson, An equation to represent grain-size distribution, *Can. Geotech. J.*, 37:817-827, 2000.
- Gupta, S. C., and W. E. Larson, A model for predicting packing density of soils using particle-size distribution, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 43,758-764, 1979.
- Hwang, S. I., K. P. Lee, D. S. Lee, and S. E. Power, Models for Estimating Soil - Size Distribution, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 66, 1143 – 1150, 2002.
- Jaky, J., *Soil mechanics*, (In Hungarian.) Egyetemi Nyomds, Budapest, 1944.
- Li, B., Three-Data Modeling of Grey System Theory, *The Journal of Grey System*, 2, 11-20, 1990.
- Lu, H. C. and M. F. Yeh, Some Basic Features of GM(1,1) Model (II), *The Journal of Grey System*, 1, 307-321, 1997.
- Nemes, A., J. H. M. Wösten, A. Lilly, and J. H. O. Voshaar, Evaluation of different procedures to interpolate particle-size distributions to achieve comopatibility within soil databases. *Geoderma*, 90, 187-202, 1999.
- Posadas, A. N. D., D. Gimenez, M. Bittelli, C. M. P. Vaz, and M. Flury, Multifractal Characterization of Soil Particle-Size Distribution, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 65, 1361-1367, 2001.
- Rousseva, S. S., Data transformations between soil texture schemes, *Eur. J. Soil Sci.*, 48, 749-758, 1997.
- Shiozawa, S., and G. S. Campbell, On the calculation of mean particle diameter and standard deviation from sand, silt, and clay fractions, *Soil Sci.*, 152(6), 427-431, 1991.
- Shirazi, M. A., and L. Boersma, A unifying quantitative analysis of soil texture, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 152, 427-431, 1984.
- Shirazi, M. A., L. Boersma, and J. W. Hart, A unifying quantitative analysis of scale, *Soil Sci. Soc. Am.J.*, 52, 181-190, 1988.
- Skaggs, T. H., L. M. Arya, P. J. Shouse, and B. P. Mohanty, Estimating Particle-Size Distribution from Limited Soil Texture Data, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 65, 1038-1044, 2001.
- U. S. Departmentn of Agriculture, *Soil Survey Mammal*, USDA Handbook 18, USDA, Washington, DC., 207-208, 1951.

- Walker, P. H., and D. J. Chittleborough, Development of particlesize distributions in some alfisols of Southeastern Australia, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 50, 394-400, 1986.
- Wen, J. H., Y. F. Huang, J. L. Chen, and J. C. Wen, Comment on the Minimum Number of Data Required for GM(1,1) Modeling, *The Journal of Grey System*, 3, 229-243, 1999.
- Yeh, M. F. and H. C. Lu, On Some of the Basic Features of GM(1,1) Model, *The Journal of Grey System*, 1, 19-35, 1996.
- 鄧聚龍, 灰色系統理論教程, GM(1,1)模型性質, 華中科技大學出版社 武漢, 中國, 205-215 頁, 1989。
- 鄧聚龍、郭洪、溫坤禮和張延政, 灰預測模型方法與應用, 灰預測模型 a 值可容區的判斷, 高立圖書有限公司, 台北, 台灣, 17-28 頁, 1999。
- 吳漢雄、鄧聚龍和溫坤禮, 灰色分析入門, 高立圖書有限公司, 台北, 台灣, 85-91 頁, 1996。
- 翁士民和溫志超, 2001年灰色系統理論與應用研討會, 灰色預測模型 GM(1,1)中 a 值特性之研究, F-1~8 頁, 2001。
- 翁士民、游家龍和溫志超, 九十年農工工程研討會, GM(1,1)模型應用於粒徑分佈的評估, 385-392 頁, 2001。

收稿日期：民國 94 年 4 月 6 日

修正日期：民國 94 年 6 月 24 日

接受日期：民國 94 年 7 月 19 日