農業工程學報　第 50 卷第 4 期
中華民國 93 年 12 月出版

Journal of Chinese Agricultural Engineering
Vol. 50, No. 4, December 2004

專　論

水庫線性標的規劃模式與其對偶模式 – 互補解

A Linear Goal Programming Model and Its Dual for Reservoir Planning – Complimentary Solutions

國立台灣大學生物環境系統工程學系教授

劉 佳 明

Chia-Ming Liu

摘　　要

本文藉簡單案例，以圖與表說明水庫規劃標的模式、對偶模式與原、偶二模式的關係。標的模式考慮水庫的蓄洪、供水與貯水三類服務功能，並假定各時期各項目服務功能的成本(收益)是供應量的片段線性函數。模式所要決定的是水庫容量與各時期放水量，在滿足各項服務的預定需求條件下，使淨收益最大。其對偶模式則是，提供替代服務的水庫同業訂定服務價格的問題：所訂需求服務價格能爲水庫單位接受，且使服務所得總收益最高。

水庫線性標的規劃模式能以特定網絡的位勢關係，表示水庫的庫頂、庫底與水面三點位勢(容積)的時間變動歷程。對偶模式則能以同一網絡的流量關係，表示水庫接受替代服務參數的影子價格條件。

除了以位勢網絡說明水庫標的規劃案例問題的變數，限制式與模式，文中又根據線性規劃對偶原理，建立水庫案例標的規劃模式的對偶模式，並且利用位勢與流量網絡圖、供應量與影子價格坐標圖、單純形法演算表，說明原、偶二模式互補解與其互補鬆弛條件：資源(或服務)有剩餘者，其影子價格是零，產品(或需求)有價差(目前與替代二方案之間)者，其數量是零。這二者是模式網絡演算與影子價格分析的利器。

關鍵詞：多功能水庫，水庫規劃，線性規劃，標的規劃，網絡規劃。

ABSTRACT

A linear goal reservoir planning model, its dual model and the relations among the two are introduced with simple examples. The three functional services of the reservoir considered are: reserved space for flood control, water supply, and pooling of water. The reservoir is to be operated to meet the minimum demands for each service item in each period. The profit for each service item is a piecewise linear function of supply and the total profit is to be maximized.

The dual model concerns the shadow prices of functional goals and minimum demands in each period. It is constructed from the viewpoint of a trader who is trying to convince the reservoir management to trade all the services. The accepted terms for the trade constitute the constraints of the dual model. Its objective function is, to minimize the total cost of purchasing (or to maximize the total profit of providing), the services.

A primal model example and its dual are interpreted respectively as a potential network and a flow network. Their complimentary slackness conditions are explained in some details with diagrams and networks. The conditions are implied in the objective row and the right-hand side constant column of the simplex tableaux for the primal and its dual. These are closely examined.

Keywords: Multi-functional reservoir, Reservoir planning, Linear programming, Goal programming, Network programming, Complimentary slackness.

一、前 言

本文介紹水庫的線性標的規劃模式與其對偶模式間變數、限制式、基本解與最佳解等的對偶關係(Liu, 1987; 劉佳明, 2004)。參考圖 1，模式考慮三類服務功能，包括：(1)**蓄洪**：水庫中未蓄水的容量空間，供洪汎等異常進水時消減水量或延滯洪峰之用，(2)**供水**：水庫向外界釋出的水量，包括農業、工業與民生等用水，(3)**貯水**：水庫貯存在水庫內的水量，包括遊憩、生態等非消耗性用途，緊急時可移作供水。

水庫規劃問題的分析常採用線性規劃模式(胡文章, 1977)，因其套裝程式成熟普遍，但是一般線性規劃模式與演算法沒有表現或利用問題結構，因此感覺所面對的是一個黑箱。水庫標的模式能以位勢網絡呈現水庫運轉的時空歷程；對偶模式則以流量網絡呈現水庫接受替代服務的價格條件。因此透過這些結構，對問題會有比較透澈的了解，就沒有面對黑箱的感覺，而且根據模式網絡結構所撰寫的演算程式，效率為一般線性規劃演算法的千百倍，問題越大，其效率越高。

二、模式變數與其關係式

水庫標的規劃模式(劉佳明, 1988, 2004)假定各時期各功能的收益是供應量的片段線性函數，供應量在(1)最小值與標的值之間，收益線性增加，其單位收益簡稱供應**單價**；(2)標的值之上，收益維持定值(圖 2)。模式另又要求各項供應量不小於其最小值。收益函數的分界值，**最小值**與**標的值**，衡量各該服務的需求，故合稱**需求參數**。各項服務有三參數，單價、最小值與標的值。規劃問題是「決定水庫容量與各時期放水量，使淨收益最大，並達成各項預定的服務需求」。

表 1 是一個水庫規劃案例的資料，包括上述三類參數、各時期進水量、水庫單位容量建造營運成本，各時期參變數的周期 n 假設為 2 時期。

在為規劃問題建立模式之前，先說明參變數符號。已知參數是以小寫羅馬字表示，見表 1；變數則以大寫羅馬字表示，見表 2。五個變數分為二類：主變數與副變數，主變數包括(1)狀態值與(2)供應量；副變數包括(3)餘額、(4)缺額與(5)可減額。分別說明如下：

(1) **狀態值**，包括庫頂容積 S_v、庫底容積 S_o 及 t 時期初水面容積(蓄水量)S_t，t=1, 2, …, n，容積都由一個基準面起算，本文以呆水位為基準，故 $S_o= 0$，因此，水庫容量 $S_v- S_o=$ S_v 庫頂容積，貯水量 $S_t- S_o= S_t$ 水面容積。但是文中有意保留公式中的 S_o。

(2) **供應量**，亦稱項目總量或服務量，包括各時期各類服務功能的供應量：時期 t 的蓄洪量 F_t、供水量 L_t 與貯水量 Y_t，t=1, 2,…,n。

表 1　水庫規劃案例基本資料表

服務功能	需求參數[‡]	時期[†] t: 1	2
	標的值 f_t	4	6
蓄洪	最小值 $\underline{f}_t$	1	2
	單價 b_t	2	3
	標的值 y_t	5	2
供水	最小值 $\underline{y}_t$	3	1
	單價 c_t	1	2
	標的值 l_t	6	3
貯水	最小值 $\underline{l}_t$	3	1
	單價 a_t	3	3
水庫	進水量 q_t	1	7
	單位容量成本[#] c_0	6	n= 2
淨供水[*]	標的值 $d_t \equiv y_t - q_t$	4	-5
	最小值 $\underline{d}_t \equiv \underline{y}_t - q_t$	2	-6
附註	[*] 淨供水最小值 $\underline{d}$ = 最小值−進水量，淨供水標的值 d = 標的值−進水量，即 淨供水項 = 供水項−進水項。 [#] 包含水庫建造營運等固定成本。 [†] 時期 t= 1, 2, …, n，案例周期 n= 2，參數周期均爲 n，即 $x_{n+1} = x_1$。 [‡] 需求參數並列爲：[$\boxed{\text{標的值}}$, $\underline{\text{最小值}}$, 單價]，其中標的值加框，最小值加底線，如時期 2 的蓄洪參數爲[$\boxed{6}$,$\underline{2}$,3]。		

表 2　水庫標的規劃模式變數與限制式

服務功能	供應量	差額變數(互補對偶變數)[‡]: 缺額	餘額	可減額
蓄洪	F_t	$\Delta F_t\,(\omega_t')$	$\nabla F_t\,(\omega_t)$	$\underline{F}_t\,(\underline{\omega}_t)$
供水	Y_t	ΔY_t	∇Y_t	$\underline{Y}_t$
貯水	L_t	$\Delta L_t(\sigma_t')$	$\nabla L_t(\sigma_t)$	$\underline{L}_t\,(\underline{\sigma}_t)$
淨供水[*]	$D_t \equiv Y_t - q_t$	$\Delta D_t(\rho_t')$	$\nabla D_t(\rho_t)$	$\underline{D}_t\,(\underline{\rho}_t)$
	狀態變數†	[1]庫底S_o	[2]水面S_t	[3]庫頂S_v
限制式(與供應量相關參變數：(1)狀態值，(2)$\boxed{\text{標的值}}$，(3)$\underline{\text{最小值}}$。變數之中非負者：(4)缺、餘額)	(1)供應-狀態關係: $F_t = S_v - S_t$, $D_t \equiv Y_t - q_t = S_t - S_{t+1}$, $L_t = S_t - S_o$, 供應量=狀態值差。 (2) 供應-標的關係: $F_t = f_t - \Delta F_t + \nabla F_t$, $D_t = d_t - \Delta D_t + \nabla D_t$, $L_t = l_t - \Delta L_t + \nabla L_t$, 供應量= $\boxed{\text{標的值}}$ −(缺額)+{餘額}。		(3) 供應下限: $F_t \geq \underline{f}_t$, $D_t \geq \underline{d}_t$, $L_t \geq \underline{l}_t$, 供應量≥最小值。 (4) 變數非負: $\Delta F_t, \nabla F_t, \Delta D_t, \nabla D_t, \Delta L_t, \nabla L_t \geq 0$, 狀態與供應變數雖非負，但不列入，皆可推得。	
附註	各變數周期爲 n, 時期 t=1,2,..,n. [*] 淨供水量 $D_t \equiv$ 供水量 Y_t−進水量 q_t，進水併入供水量合成一項。 † 呆水位爲容積基準：$S_o = 0$ [1] 庫底容積 $S_o \equiv$ 呆水位容積， [2] 水面容積(蓄水量) $S_t = S_t - S_o$ 貯水量， [3] 庫頂容積 $S_v = S_v - S_o$ 水庫容量。 [‡] 差額變數旁括號內爲互補對偶變數。			

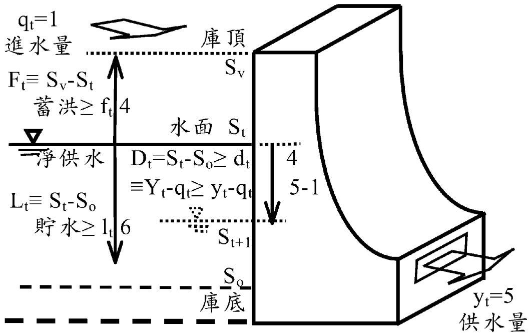


圖 1　水庫功能示意圖(案例 時期 t=1)

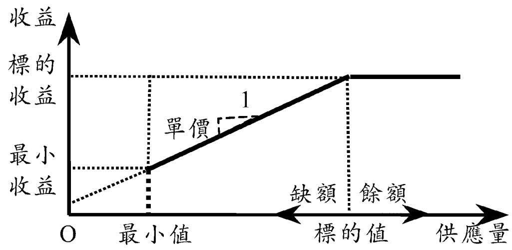


圖 2　單一項目片段線性收益函數

(3) **餘額**與**缺額**，供應量可大於或小於標的值，故二者的差額分二個情況定義如下：

若供應量≥ 標的值，則

餘額= 供應量− 標的值≥ 0，缺額= 0，

若供應量≤ 標的值，則

餘額= 0，缺額= 標的值− 供應量≥ 0，

同一供應量的餘額與缺額至少有一爲零，故供應量與標的值的關係可併成單式:

供應量 = 標的值 + 餘額 − 缺額

(4) **可減額**，供應量恆大於最小值，故其差額變數只定義一種如下：

可減額= 供應量− 最小值。

圖 3 是案例水庫的**位勢網絡圖**，它顯示水庫庫頂、庫底與水面狀態的變動歷程。假定在

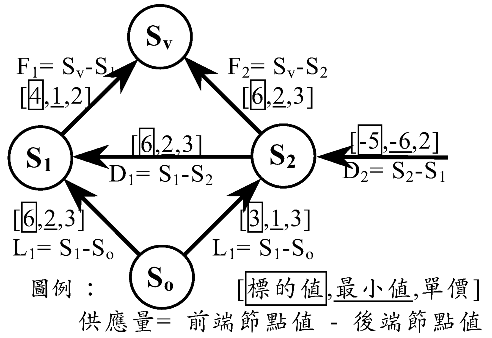


圖 3　案例資料與供應量位勢網路圖

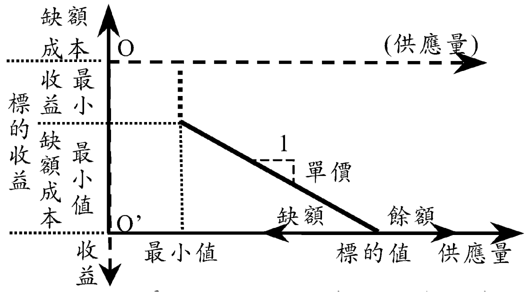


圖 4　單一項目片段線性成本函數

考慮周期內，水庫無淤積與沉陷問題，故在圖中，庫頂與庫底對應節點不變；而水面則隨時變動，每一時期水面各有一對應節點。

圖 3 網絡中，時期 t 的期初水面節點 S_t 與三個鄰近節點(上方庫頂 S_v、右方 t+1 時期初水面 S_{t+1}、下方庫底 S_o)之間各有一條管線相連，管線與節點分別代表供應與狀態變數，圖中這二者的下列關係式並明列於對應管線上：

- □ 管線 $S_t \rightarrow S_v$，蓄洪量 $F_t \equiv S_v - S_t$，
- □ 管線 $S_{t+1} \rightarrow S_t$，供水量 $D_t = S_t - S_{t+1}$，
- □ 管線 $S_o \rightarrow S_t$，貯水量 $L_t \equiv S_t - S_o$。

管線各有方向，以箭頭標示。上列關係式顯示各功能管線供應量都是管線二端節點容積的差值。模式變數(供應與狀態)的關係，對應到網絡元素(管線與節點)的關係，水庫規劃問題的結構得以清楚的顯示。節點(狀態)值通稱爲**位勢**，管線(供應)量稱爲**位勢差**，故上述網絡稱爲**位勢網絡**，標的模式可稱爲**位勢模式**。

水庫標的規劃模式的位勢網絡，如圖 3，呈現水庫運轉的水面變化歷程，因此，分析者面對的不再是陰暗的黑箱，而是清晰的網絡，簡單而且直觀，爲水庫規劃模式開啓另一扇窗－另一種景觀。

三、水庫標的規劃模式

二參數，標的值與最小值，在需要強調時將分別加框與加底線。參考表 2，供應量的效果決定於三參變數(狀態變數、標的值、最小值)：(1)供應量是狀態變數的差值，(2)供應量與標的值的差決定收益(或成本)，(3)供應量以最小值爲下限。上述參變數之間的關係式列出如下：

(1) 供應量與狀態值(供應-狀態)關係

供應量=二端狀態值差=狀態值$_1$-狀態值$_2$：

$F_t \equiv S_v - S_t,\ D_t = Y_t - q_t = S_t - S_{t+1},\ L_t \equiv S_t - S_o.$

(2) 供應量與標的值(供應-標的)關係

供應量$_t$= $\boxed{\text{標的值}_t}$ − (缺額$_t$)+ {餘額$_t$}：

$F_t = f_t - \Delta F_t + \nabla F_t,\ D_t = y_t - \Delta D_t + \nabla D_t,$

$L_t = l_t - \Delta L_t + \nabla L_t.$

(3) 供應量與最小值(供應-下限)關係

供應量≥ 最小值：$F_t \ge \underline{f}_t,\ D_t \ge \underline{d}_t,\ L_t \ge \underline{l}_t,$

即 供應量+ 可減額= 最小值：

$F_t + \underline{F}_t = \underline{f}_t,\ D_t + \underline{D}_t = \underline{d}_t,\ L_t + \underline{L}_t = \underline{l}_t.$

上列三組關係式與變數非負條件共同組成水庫規劃運轉的四組基本條件(參考表 2)。

爲簡化模式並增進演算效率，將第一組供應式代入其後二組，則位勢差取代供應量，因此變數不再含供應量，限制式也減少成三組(標的、下限與非負條件)，加上總成本目標函數，組成水庫標的線性規劃模式(劉佳明, 2004)。

案例的標的規劃模式見表 3，其中不含供應-狀態式，求解時不需供應量，但是在討論時還是可以將其納入，因爲供應量觀念很重要。

圖 2 標的模式的收益函數可以轉換爲圖 4 成本函數，圖 4 左上 O 點就是圖 2 原點 O。各單項服務的標的收益值減去缺額成本才是收益值，總標的收益減去總成本(水庫建造營運成本+總缺額成本)才是總收益(總標的收益－總成本)。

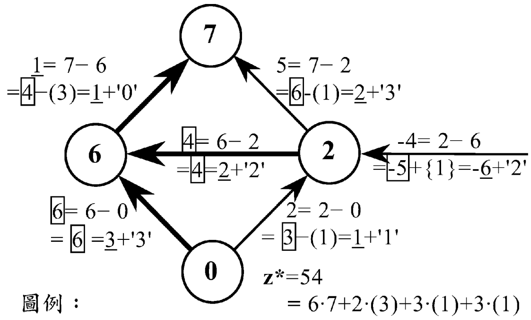
表 3　水庫規劃案例的標的線性模式

求目標函數最小值	c_0S_v				$+\Sigma^n_{t=1}(b_t\Delta F_t + c_t\Delta D_t + a_t\Delta L_t) =$			
z=	$6S_v$				$+\ 2\Delta F_1 \ +\Delta D_1 \ +3\Delta L_1$			
					$+3\Delta F_2 \ +2\Delta D_2 \ +3\Delta L_2$			
滿足下列各限制式								(餘額↓)
ω_1:	S_v	$-S_1$			$+\Delta F_1$	$-\nabla F_1$	$=f_1=\boxed{4}$	∇F_1
ω_2:	S_v		$-S_2$		$+\Delta F_2$	$-\nabla F_2$	$=f_2=\boxed{6}$	∇F_2
ρ_1:		S_1	$-S_2$		$+\Delta D_1$	$-\nabla D_1$	$=d_1=\boxed{4}$	∇D_1
ρ_2:		$-S_1$	$+S_2$		$+\Delta D_2$	$-\nabla D_2$	$=d_2=-\boxed{5}$	∇D_2
σ_1:		S_1		$-S_o$	$+\Delta L_1$	$-\nabla L_1$	$=l_1=\boxed{6}$	∇L_1
σ_2:			S_2	$-S_o$	$+\Delta L_2$	$-\nabla L_2$	$=l_2=\boxed{3}$	∇L_2
$\underline{\omega}_1$:	S_v	$-S_1$				$-\underline{F}_1$	$=\underline{f}_1=\underline{1}$	$\underline{F}_1$
$\underline{\omega}_2$:	S_v		$-S_2$			$-\underline{F}_2$	$=\underline{f}_2=\underline{2}$	$\underline{F}_2$
$\underline{\rho}_1$:		S_1	$-S_2$			$-\underline{D}_1$	$=\underline{d}_1=\underline{2}$	$\underline{D}_1$
$\underline{\rho}_2$:		$-S_1$	$+S_2$			$-\underline{D}_2$	$=\underline{d}_2=-\underline{6}$	$\underline{D}_2$
$\underline{\sigma}_1$:		S_1		$-S_o$		$-\underline{L}_1$	$=\underline{l}_1=\underline{3}$	$\underline{L}_1$
$\underline{\sigma}_2$:			S_2	$-S_o$		$-\underline{L}_2$	$=\underline{l}_2=\underline{1}$	$\underline{L}_2$
(↑影子價格)					$S_o=0,\ \Delta F_t, \Delta D_t, \Delta L_t, \nabla F_t, \nabla D_t, \nabla L_t, \underline{F}_t, \underline{D}_t, \underline{L}_t \geq 0,\ t=1,\ldots,n;\ n=2$			(可減額↑)
↑對偶變數					(狀態變數不必要求非負，有非負條件也無妨)			餘變數↑

四、標的模式的基本解

圖 5 是案例的一個基本解 (Bazaraa, Jarvis and Sherali, 1990; Murty, 1992)網絡圖，表示水庫運轉狀態的歷程。各管線均標註供應-狀態、供應-下限、供應-標的三關係式。

考慮網絡管線的一個集合，若其成員連接所有節點而又不形成迴路，則稱該集合爲網絡的一個**張成樹**，其管線成員稱爲**枝**，其它管線稱爲**弦**。在標的模式對應位勢網絡中，每一基本解有其對應的張成樹，枝管線供應量爲非基變數，其值取分界值($\boxed{\text{標的值}}$或$\underline{\text{最小值}}$)；將非基變數(枝管線供應量)值代入限制式，可求得基變數- 弦管線供應量。弦管線的供應量若取分界值，則稱爲退化弦，其解稱爲退化解。例見圖 5，枝與弦管線分別以粗線與細線表示。



圖例：
供應量= 前端節點值− 後端節點值
= $\boxed{\text{標的值}}$-(缺額)+{餘額}= $\underline{\text{最小值}}$+'可減額'

圖 5　案例一個基本解的位勢網絡圖

管線的供應量與二分界值，標的值與最小值的關係如下：供應量= $\boxed{\text{標的值}}$− (缺額)+ {餘額}= $\underline{\text{最小值}}$+ '可減額'。在案例網絡圖 5 中各管線旁，皆列有這一組式，可藉以檢視管線，區別枝與弦。圖 5 中，有 6 項供應量中取分界值者有 3 項(時期 1 蓄洪 $\underline{1}$、貯水 $\boxed{6}$與供水 $\boxed{4}$)，它們組成網絡的一株張成樹，所以這 3 個管線爲枝，其它是弦。參考表 4。

參考圖 5，核算案例模式(表 3)的限制式與變數數目，標的式與下限式有 2 類別 3 功能 n(=2)時期，總共有 12(=2·3·n)個。狀態變數 S_v, S_t, S_o共有 4(=n+2)個，缺額ΔF_t, ΔD_t, ΔL_t，餘額∇F_t, ∇D_t, ∇L_t，可減額 $\underline{F}_t$, $\underline{D}_t$, $\underline{L}_t$，其中 t=1, 2, …, n，且 n= 2，故後三組各 6(=3n)個。以上變數總共 22(= 10n+2)

表 4　標的模式案例一個基本解與其互補解

原模式變數	供應量		缺額				餘額				可減額			
蓄　洪	$\underline{1}$	5	ΔF_1	3	ΔF_2	1	∇F_1	0	∇F_2	0	$\underline{F}_1$	0	$\underline{F}_2$	3
淨供水	$\boxed{4}$	-4	ΔD_1	0	ΔD_2	0	∇D_1	0	∇D_2	1	$\underline{D}_1$	2	$\underline{D}_2$	2
貯　水	$\boxed{6}$	1	ΔL_1	0	ΔL_2	1	∇L_1	0	∇L_2	0	$\underline{L}_1$	3	$\underline{L}_2$	1
狀態值	S_v	7	S_1	6	S_2	2								
附　註	供應量 6 項中有 3 項，時期 1 蓄洪、貯水與供水，取**分界值**(標的值或最小值)，它們組成位勢網絡的**一株張成樹**，其成員管線稱爲**枝**；其它稱爲**弦**。弦若取邊界值，則稱爲退化弦。在圖中，枝是以粗線表示，弦則以細線表示。														
對偶模式變數	管線總量		可增量				內流(標的值價格)				外流(最小值價格)			
蓄　洪	3	«3»	ω_1'	0	ω_2'	0	ω_1	2	ω_2	3	$\underline{\omega}_1$	1	$\underline{\omega}_2$	0
淨供水	0	‹0›	ρ_1'	1	ρ_2'	2	ρ_1	0	ρ_2	0	$\underline{\rho}_1$	0	$\underline{\rho}_2$	0
貯　水	3	«3»	σ_1'	0	σ_2'	0	σ_1	3	σ_2	3	$\underline{\sigma}_1$	0	$\underline{\sigma}_2$	0
附　註	流量(影子價格總量)6 項中有 3 項，時期 2 蓄洪、貯水與供水取分界值(«單價»或‹0›)的部分管線稱爲弦，其它組成流量網絡張成樹的管線稱爲枝。取分界值的枝稱爲退化枝。														

個，其中餘額與可減額是各該式的**餘變數**，共 12(=2·3·n)個，若捨去餘變數 12 個，則原 12 個等式化爲不等式，且變數剩 10 個，4(= n+ 2)個是狀態變數，6(= 3n)個是缺額變數。

表 3 各式的左右二側分別標註各該式的對偶變數(影子價格)與餘變數，以便往後各節探討對偶模式與原偶變數互補條件時，比對之用。

五、影子價格與對偶模式

表 3 標的模式各限制式的右端常數都是需求參數 - 標的值與最小值，它們是衡量水庫各該項服務需求或服務水準的一對容積值，其值變動則影響水庫收益，而水庫收益在某一單項參數變動下的變動率就是該需求需求參數(標的值或最小值)的**影子價格**，它們是水庫在目前經營方式下，對各該項服務(標的值與最小值)願買的最高單價或願賣的最低單價。

根據對偶理論(Dantzig, 1963)，每一線性規劃模式都有它的對偶模式，水庫標的模式有其**對偶模式**(劉佳明, 2004)。需求參數影子價格可藉由標的模式的對偶模式推求，這是水庫同業提供替代服務時，用以決定上述參數影子價格的一個模式：如何決定水庫所能接受的參數價格方案，且使提供服務的收益最高。案例的對偶模式列出如表 5，其變數是以小寫希臘字表

表 5　水庫規劃案例對偶模式

求極大值: $\zeta=\Sigma^{n}_{t=1}(f_t\omega_t+ \underline{f}_t\underline{\omega}_t+ d_t\rho_t+ \underline{d}_t\underline{\rho}_t+ l_t\sigma_t+ \underline{l}_t\underline{\sigma}_t)$

$=4\omega_1+1\underline{\omega}_1+6\rho_1+2\underline{\rho}_1+6\sigma_1+2\underline{\sigma}_1$

$+6\omega_2+2\underline{\omega}_2-5\rho_2-6\underline{\rho}_2+3\sigma_2+\underline{\sigma}_2$

滿足下列限制式：

S_v	$\omega_1+\underline{\omega}_1+\omega_2+\underline{\omega}_2= 6= c_0$			
S_1:	$(\rho_1+\underline{\rho}_1)- (\omega_1+\underline{\omega}_1)+ (\sigma_1+\underline{\sigma}_1)- (\rho_2+\underline{\rho}_2)= 0,$			
S_2:	$(\rho_2+\underline{\rho}_2)- (\omega_2+\underline{\omega}_2)+ (\sigma_2+\underline{\sigma}_2)- (\rho_1+\underline{\rho}_1)= 0,$			(
ΔF_t:	$\omega_1+\omega_1' = 2=b_1,$	$\omega_2+\omega_2'= 3= b_2,$	ω_t'	可
ΔD_t:	$\rho_1+\rho_1'= 1= c_1,$	$\rho_2+\rho_2'= 2= c_2,$	ρ_t'	增
ΔL_t:	$\sigma_1+\sigma_1'= 3= a_1,$	$\sigma_2+\sigma_2'= 3= a_2,$	σ_t'	量
∇F_t:	$\omega_1 \geq 0,$	$\omega_2 \geq 0,$	☜	)
∇D_t:	$\rho_1 \geq 0,$	$\rho_2 \geq 0,$		餘
∇L_t:	$\sigma_1 \geq 0,$	$\sigma_2 \geq 0,$		變
$\underline{F}_t$:	$\underline{\omega}_1 \geq 0,$	$\underline{\omega}_2 \geq 0,$		數
$\underline{D}_t$:	$\underline{\rho}_1 \geq 0,$	$\underline{\rho}_2 \geq 0,$		
$\underline{L}_t$:	$\underline{\sigma}_1 \geq 0,$	$\underline{\sigma}_2 \geq 0,$		

☜對偶變數 $\omega_t', \rho_t', \sigma_t' \geq 0$, t=1, 2, … ,n; n=2.

附註　標的值價格與最小值價格分別簡稱內流與外流，標的值與最小值分別簡稱常值與低值。內、外流合稱流量。缺額單價爲內流上限。

示，如表 3 標的模式中各式左端所標註。

若將表 5 對偶模式的變數視爲圖 6 網絡的管線流量，則其限制式則可視爲節點流量平衡條件與管線流量上限條件，因此對偶模式能以流量網絡圖表示，模式的基本解也能以流量網絡圖表示，如圖 7，說明詳後。

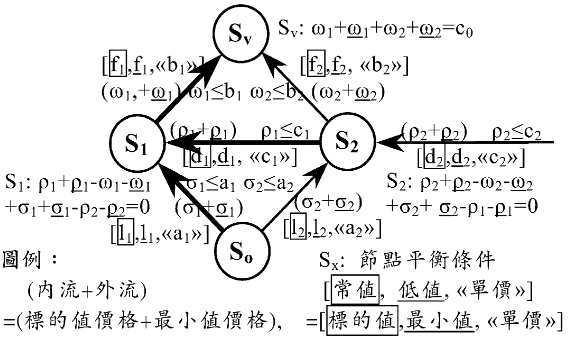


圖 6 案例對偶模式的流量網絡圖

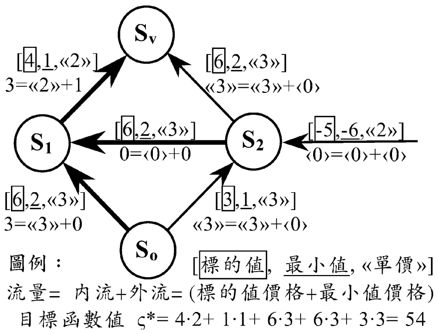


圖 7 案例一個對偶基本解的流量網絡圖

為利用流量網絡觀念探討對偶模式，並且增加圖表的可讀性，乃將原偶二模式部分參變數的名稱簡化如表 6 與表 7。

圖 6 流量網絡各管線分內、外二層，通過流量分別為**內流**(標的值影子價格)與**外流**(最小值影子價格)，它們對應表 5 案例對偶模式中的二類變數，在目標函數中，這二個價格變數的係數(數量)分別為**常值**(標的值)與**低值**(最小值)，前者不小於後者，故管線的內流比外流先送，因為單純形類算法在變動流量時，先取改善效果高者。

參考圖 6，表 5 的限制式可視為流量網絡的三類條件：‹1›前三列為三節點 S_v, S_1, S_2 的流量平衡式；‹2›其後三列為內流(標的值價格)上限式，它們已引進可增值(餘變數)成為等式；‹3›其它為流量非負下限式。圖 7 表示案例對偶模式的一個基本可行解流量網絡圖。

參考圖 7，對偶模式的基本解，在流量網絡上有它對應的張成樹。樹的管線成員稱為**枝**，其它管線稱為**弦**，弦管線流量為非基變數，其值(內流+外流=[«單價»-"可增量"]+外流)取分界值(下限‹0›或上限«單價»)；枝管線的流量為基變數，其值由限制式解得。若枝流量為分界值，則稱為**退化枝**，其解稱為退化解。網絡圖中，枝與弦分別以粗線與細線表示。圖 7 中的弦(時期 2 蓄洪«3»、貯水«3»與供水‹0›)取分界值。枝中取分界值者有時期 1 貯水«3»與供水‹0›，它們是退化的枝，故圖 7 的基本解是一個退化解。

表 6 標的位勢模式參變數簡稱

參變數	標的值	最小值	狀態容積值	供應量
簡稱	常值	低值	位勢	(位)勢差

表 7 對偶流量模式參變數簡稱

參變數	水庫單位容量成本	«缺額單價»	標的值影子價格	最小值影子價格
簡稱	網絡流量	«內流上限»	(價格)內流	(價格)外流

六、互補變數、互補解與其條件

在表 3 與表 5 各式二側均標註有各該式的餘變數與對偶變數，可知原偶模式的每一不等限制式都有對應的一對餘變數與對偶變數：

- 原模式限制式對應對偶變數與餘變數，
- 對偶模式限制式對應餘變數與原變數。

上述各對原偶變數稱為**互補變數**。原偶模式一對基本解將稱為原偶**互補解**，如果它們滿足下列互補變數乘積為 0 的**互補鬆弛條件**：

- $\omega_t\nabla F_t=\rho_t\nabla D_t=\sigma_t\nabla L_t = \underline{\omega_t}\underline{F_t}=\underline{\rho_t}\underline{D_t}=\underline{\sigma_t}\underline{L_t}= 0$;
- $\omega_t'\cdot F_t= \rho_t'\cdot D_t= \sigma_t'\cdot L_t= 0$。

式中 t= 1, 2, …, n, n=2。將二類互補鬆弛條件分成三組如表 8。原偶模式互補解的任何一對互補變數，至少有一個是 0，不會同時不是 0。

以互補的一對變數(供應量與影子價格)為坐標，如圖 8，點繪出互補解的變數值，它們至少有一為 0，故落在供應量或影子價格分界線連成的階梯線 qabcp 上。因此，資源(或服務)有剩餘者，其影子價格是 0，產品(或需求)有價差(目

表 8　原偶模式基本解互補鬆弛條件

1. 標的值價格×餘額=0 (內流×{餘額}=0),	$\omega_t \cdot \nabla F_t = \rho_t \cdot \nabla D_t = \sigma_t \cdot \nabla L_t = 0$,
2. 最小值價格×可減額= 0 (外流×'可減額'= 0),	$\underline{\omega}_t \cdot \underline{F}_t = \underline{\rho}_t \cdot \underline{D}_t = \underline{\sigma}_t \cdot \underline{L}_t = 0$,
3. 可增量×(缺額)= 0,	$\omega_t' \cdot \Delta F_t = \rho_t' \cdot \Delta D_t = \sigma_t' \cdot \Delta L_t = 0$

附註 t= 1, 2, …, n; n= 2。參考圖 8。

表 9　互補條件下案例對偶模式表

S_v:	$(2+\underline{\omega}_1)+(3+0)=6$		⇨$2+\underline{\omega}_1+3=6$⇨ $\underline{\omega}_1=[1]$	(3)
S_1:	$(0+0)-(2+\underline{\omega}_1)+(\sigma_1+0)-(0+0)=0$		⇨$-2-\underline{\omega}_1+\sigma_1=0$⇨$\sigma_1=[3]$	[η]
S_2:	$(0+0)-(3+0)+(3+0)-(\rho_1+0)=0$		⇨ $-\rho_1=0$⇨ $\rho_1=[0]$ ⇩	
ΔF_t:	$\omega_1+0=2$,	$\omega_2+0=3$,	$\omega_1'=‹0›$, $\omega_2'=‹0›$,	(4)
ΔD_t:	$\rho_1+\rho_1'=1$,	$0+\rho_2'=2$,	$\rho_1'=(3)$, $\rho_2'=«2»$,	(η)
ΔL_t:	$\sigma_1+\sigma_1'=3$,	$\sigma_2+0=3$, (1)	$\sigma_1'=(0)$, $\sigma_2'=‹0›$,	
∇F_t:	$\omega_1 \ge 0$,	$\omega_2 \ge 0$, «0»	$\omega_1=«2»$, $\omega_2=«3»$,	
∇D_t:	$\rho_1 \ge 0$,	$\rho_2 \ge 0$,	$\rho_1=[0]$, $\rho_2=‹0›$,	(2)
∇L_t:	$\sigma_1 \ge 0$,	$\sigma_2 \ge 0$,	$\sigma_1=[3]$, $\sigma_2=«3»$,	‹ξ›
$\underline{F}_t$:	$\underline{\omega}_1 \ge 0$,	$\underline{\omega}_2 \ge 0$,	$\underline{\omega}_1=[1]$, $\underline{\omega}_2=‹0›$,	
$\underline{D}_t$:	$\underline{\rho}_1 \ge 0$,	$\underline{\rho}_2 \ge 0$,	$\underline{\rho}_1=‹0›$, $\underline{\rho}_2=‹0›$,	
$\underline{L}_t$:	$\underline{\sigma}_1 \ge 0$,	$\underline{\sigma}_2 \ge 0$.	$\underline{\sigma}_1=‹0›$, $\underline{\sigma}_2=‹0›$,	
	原變數	$\omega_t', \rho_t', \sigma_t' \ge 0$	t=1, 2, … ,n; n=2.	

(1) 由表 8 互補條件，定表 4 基本解互補變數值爲下限‹0›者，
(2) 由表 5 上限條件，求得內流在上限«ξ»者，參考圖 9，
(3) 由表 5 節點平衡條件，從樹梢起依序求值[η]，
(4) 由表 5 上限條件，求可增量(η′)。結果見圖 7。

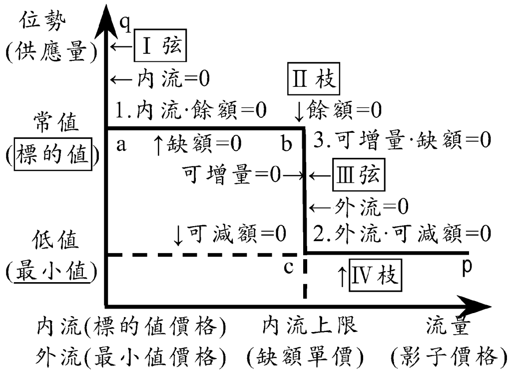


圖 8　個別管線原偶變數互補條件

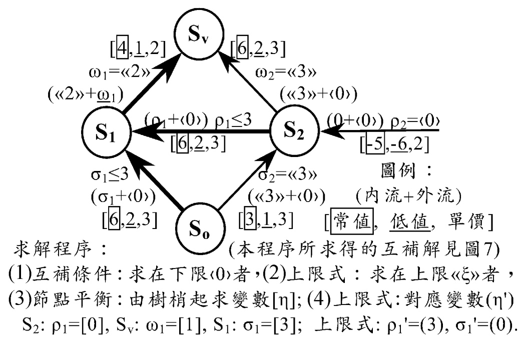


圖 9　互補條件下案例對偶模式網絡圖

前與替代二方案)者，該項目不生產(或提供)。

根據線性規劃對偶理論(Dantzig, 1963)，原、偶二模式的一對互補解若都是可行解，則可確定它們分別是二模式的最佳解。如果一對原、偶基本解的各項目供應變數值都在如圖 8 第一象限的階梯狀分界線上，則其變數值皆不小於 0，爲可行解，故它們是一對最佳解。

根據互補鬆弛條件 (表 8 或圖 8) 與對偶模式，可由原模式一個基本解(表 4 上半)，求得對偶模式互補解(表 4 下半)，詳細說明見下一段。

參考表 9 與圖 9，由原模式的一個基本解可推求對偶互補解，利用基本解網絡張成樹的結構特性(劉佳明, 1988)，解聯立方程組過程，可

表 10　水庫案例的一對互補最佳解

原變數		S_v	7	F_t	D_t	L_t	ΔF_t	ΔD_t	ΔL_t	∇F_t	∇D_t	∇L_t	$\underline{F}_t$	$\underline{D}_t$	$\underline{L}_t$	z
t	1	S_1	6	$\underline{1}$	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	3	0	0	0	0	0	0	2	4	54
	2	S_2	2	5	-4	1	1	0	1	0	1	0	3	2	0	
t	1			3	0	3	‹0›	1	0	2	0	3	1	‹0›	‹0›	54
	2			«3»	‹0›	«3»	‹0›	2	‹0›	3	‹0›	3	‹0›	‹0›	$\underline{0}$	
偶變數				$\omega_t+\underline{\omega}_t$	$\rho_t+\underline{\rho}_t$	$\sigma_t+\underline{\sigma}_t$	ω_t'	ρ_t'	σ_t'	ω_t	ρ_t	σ_t	$\underline{\omega}_t$	$\underline{\rho}_t$	$\underline{\sigma}_t$	z'

以依序每次只取一式，將前已求得的變數值代入式中，即可求得該式唯一未知變數的值，不需多式運算。求解步驟如下：

(1) 根據互補條件，將原變數不為 0 者(ΔF_1, ΔF_2, ΔL_2; ∇D_2; $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$, $\underline{D}_2$, $\underline{L}_1$, $\underline{L}_2$)的對偶變數值設定為下限‹0›：

ω_1'=‹0›, ω_2'=‹0›, σ_2'=‹0›; ρ_2=‹0›,

$\underline{\omega}_2$=‹0›, $\underline{\rho}_1$= ‹0›, $\underline{\rho}_2$=‹0›.

(2) 根據內流上限條件，定流量值«ξ»或(ξ')：

ω_1=«2», ω_2=«3», σ_2=«3», ρ_2'=(2),

(3) 根據節點平衡條件，從樹梢起依序求值[η]

1. S_2: ρ_1=[0], 2. S_v: $\underline{\omega}_1$=[1], 3. S_1: σ_1=[3].

(4) 根據內流上限條件，定出其它可增量(η')：

ρ_1'=(3), σ_1'=(0).

以上藉互補條件，從原標的模式一個基本解(圖 5 或表 4 上半部)，可推求它的對偶模式的互補解(圖 7 或表 4 下半部)。反之，若從對偶模式的一個基本解，也可推求原模式的互補解。

表 3 案例原偶二模式的一對互補解已見於表 4 (參考圖 5 與圖 7)，將之重排如表 10，這一對互補基本解的變數值都不小於 0，是可行解，故根據對偶理論它們是最佳解。請注意，原偶模式最佳解可能不只一對，也不一定為基本解。

標的模式的一個基本解與其對偶模式的互補解，各有對應的位勢與流量網絡圖，如案例的圖 5 與圖 7，二類網絡對枝與弦各有其定義：

- ☐ 位勢網絡: 管線供應量=
  $\boxed{\text{標的值}}$-(缺額)+{餘額}=<u>最小值</u>+'可減額'，
  <u>枝</u>取<u>分界值</u>，且合組成張成樹，其它為弦。
- ☐ 流量網絡: 管線流量=
  {內流}+'外流'={單價-(可增量)}+'外流'，
  <u>弦</u>取<u>分界值</u>，弦以外枝管線組成張成樹。

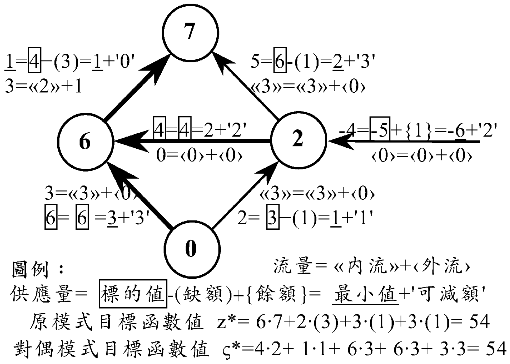


圖 10　案例原、偶互補最佳解網絡圖

標的模式與其對偶模式的變數與限制式不同，前者為容積位勢與其管線供應-節點狀態關係，後者為影子價格流量與其節點平衡關係，但是對應位勢與流量二網絡的節點與管線配置相同，因此可以將一對互補解的變數值，標示在共同網絡上，如圖 10 合併案例的圖 5 與圖 7。

考慮圖 10 這一對互補解，並參考圖 8 中網絡管線的分類，二模式的任何一對互補解所對應的張成樹相同，管線為枝者，其供應量取分界值；為弦者，其流量取分界值，故各管線的供應量與流量至少有一個取分界值，它們滿足互補條件。其實，任何線性規劃問題若以單純形、對偶單純形或原偶等法求解，從演算最終的最佳解的目標函數係數，就可以得到互補變數的值，見下一節案例演算實例。

七、原、偶模式與單純形法

標的模式係數只有少數是±1，絕大部分是 0，且具有特殊的網絡結構，故單純形法演算時，其計算資源主要耗用在這二類數值的加減乘除運算上。如果採用網絡演算法，不必處理

表 11　水庫規劃案例標的模式初始解表

標的模式	S_v	S_1	S_2	F_1	F_2	D_1	D_2	L_1	L_2	F_1	F_2	D_1	D_2	L_1	L_2	$\underline{F}_1$	$\underline{F}_2$	$\underline{D}_1$	$\underline{D}_2$	$\underline{L}_1$	$\underline{L}_2$	z	初始解
Min	6	0	0	2	3	1	2	3	3													0	基變數↓
ω_1	1	-1		1						-1												4	F_1
ω_2	1	-1									-1											1	F_2
ρ_1	1		-1		1							-1										6	D_1
ρ_2	1		-1										-1									2	D_2
σ_1		1	-1			1								-1								4	L_1
σ_2		1	-1												-1							2	L_2
$\underline{\omega}_1$		-1	1				1									-1						-5	$\underline{F}_1$
$\underline{\omega}_2$		-1	1														-1					-6	$\underline{F}_2$
$\underline{\rho}_1$		1						1										-1				6	$\underline{D}_1$
$\underline{\rho}_2$		1																	-1			3	$\underline{D}_2$
$\underline{\sigma}_1$			1						1											-1		3	$\underline{L}_1$
$\underline{\sigma}_2$			1																		-1	1	$\underline{L}_2$
對偶變數↑	(art. vars)			ω_1'	ω_2'	ρ_1'	ρ_2'	σ_1'	σ_2'	ω_1	ω_2	ρ_1	ρ_2	σ_1	σ_2	$\underline{\omega}_1$	$\underline{\omega}_2$	$\underline{\rho}_1$	$\underline{\rho}_2$	$\underline{\sigma}_1$	$\underline{\sigma}_2$	ς	←互補變數

表 12　水庫規劃案例對偶模式初始解表

對偶模式	ω_1	$\underline{\omega}_1$	ω_2	$\underline{\omega}_2$	ρ_1	$\underline{\rho}_1$	ρ_2	$\underline{\rho}_2$	σ_1	$\underline{\sigma}_1$	σ_2	$\underline{\sigma}_2$	(art. vars)				ω_1'	ω_2'	ρ_1'	ρ_2'	σ_1'	σ_2'	ς	初始解
Max	4	1	6	2	4	2	-5	-6	6	3	3	1											0	基變數↓
S_v	1	1	1	1									1										6	┌(art. vars.)
S_1	-1	-1			1	1	-1	-1	1	1				1									0	│
S_2			-1	-1	-1	-1	1	1			1	1			1								0	└(人工變數)
∇F_1	1																1						2	ω_1
∇F_2			1															1					3	ω_2
∇D_1					1														1				1	ρ_1
∇D_2							1													1			2	ρ_2
∇L_1									1												1		3	σ_1
∇L_2											1											1	3	σ_2
原模式變數↑	F_1	$\underline{F}_1$	F_2	$\underline{F}_2$	D_1	$\underline{D}_1$	D_2	$\underline{D}_2$	L_1	$\underline{L}_1$	L_2	$\underline{L}_2$	S_v	S_1	S_2	S_o	ΔF_1	ΔF_2	ΔD_1	ΔD_2	ΔL_1	ΔL_2	z	←互補變數

為 0 的係數，而且運算只有加減沒有乘除，所以演算效率比一般線性規劃方法高出千、百倍甚至上萬倍，問題越大效率越高。

單純形法與類似的對偶單純形法或原偶法是以不同的方式迭代，它們最後同時求得原、偶二模式的一對最佳基本解，都分別滿足下列三條件：‹1› 原模式解的可行性，‹2› 對偶模式解的可行性，‹3› 二模式基本解的互補鬆弛條件。例如，單純形法是在各迭代中，維持原可行性與互補條件，改善對偶可行性，直到三個條件都得以滿足。

以表 1 案例為例，表 11 與表 13 分別是對偶單純形法演算的初始解表與最佳解表，表 13 最佳解表常數行顯示水庫規劃案例的最佳解。同表目標函數列的係數值其實就是互補解- 對偶模式的最佳解變數值，其名稱標示在最後一列(與原模式變數互補)。最佳解表右端常數與目標式係數顯示案例的互補解。

若以單純形法解對偶模式(表 12)，演算終了最佳解表中(表 14)，目標式列的係數值也為對偶模式最佳解的互補解-原模式的最佳解。同理，以單純形法解原模式或以對偶單純形法解對偶

表 13　水庫規劃案例標的模式最佳解表

標的模式	S_v	S_1	S_2	ΔF_1	ΔF_2	ΔD_1	ΔD_2	ΔL_1	ΔL_2	∇F_1	∇F_2	∇D_1	∇D_2	∇L_1	∇L_2	$\underline{F}_1$	$\underline{F}_2$	$\underline{D}_1$	$\underline{D}_2$	$\underline{L}_1$	$\underline{L}_2$	z	最佳解
Min						1	2	0		2	3	0		3	3	1						54	基變數↓
ω'_1				1		0	0	0		-1	0	0		0	0	1						3	ΔF_1
ω'_2					1	-1	0	0		0	-1	1		0	0	1						1	ΔF_2
σ_2						1	0	-1	1	0	0	-1		1	-1	0						1	ΔL_2
ρ_2						-1	-1	0		0	0	1	1	0	0	0						1	∇D_2
(art. vars.)┐		1				0	0	1		0	0	0		-1	0	0						6	S_1
│			1			-1	0	1		0	0	1		-1	0	0						2	S_2
(人工變數)┘	1					0	0	1		0	0	0		-1	0	-1						7	S_v
$\underline{\omega}_2$						1	0	0		0	0	-1		0	0	-1	1					3	$\underline{F}_2$
$\underline{\rho}_1$						1	0	0		0	0	-1		0	0	0		1				2	$\underline{D}_1$
$\underline{\rho}_2$						-1	0	0		0	0	1		0	0	0			1			2	$\underline{D}_2$
$\underline{\sigma}_1$						0	0	1		0	0	0		-1	0	0				1		3	$\underline{L}_1$
$\underline{\sigma}_2$						-1	0	1		0	0	1		-1	0	0					1	1	$\underline{L}_2$
對偶變數↑	(art. vars)			ω_1'	ω_2'	ρ_1'	ρ_2'	σ_1'	σ_2'	ω_1	ω_2	ρ_1	ρ_2	σ_1	σ_2	$\underline{\omega}_1$	$\underline{\omega}_2$	$\underline{\rho}_1$	$\underline{\rho}_2$	$\underline{\sigma}_1$	$\underline{\sigma}_2$	ς	←互補變數

表 14　水庫規劃案例對偶模式最佳解表

對偶模式	ω_1	$\underline{\omega}_1$	ω_2	$\underline{\omega}_2$	ρ_1	$\underline{\rho}_1$	ρ_2	$\underline{\rho}_2$	σ_1	$\underline{\sigma}_1$	σ_2	$\underline{\sigma}_2$	(art. vars)			ω_1'	ω_2'	ρ_1'	ρ_2'	σ_1'	σ_2'		最佳解
Max				3		2	1	2		3		1	7	6	2	3	1				1	54	基變數↓
$\underline{F}_1$		1		1		0	0	0		0		0	1	0	0	-1	-1				0	1	$\underline{\omega}_1$
L_1				0		0	0	0	1	1		1	1	1	1	0	0				-1	3	σ_1
L_2				0		0	0	0		0	1	0	0	0	0	0	0				1	3	σ_2
F_1	1			0		0	0	0		0		0	0	0	0	1	0				0	2	ω_1
F_2			1	0		0	0	0		0		0	0	0	0	0	1				0	3	ω_2
D_1				-1		-1	1	1		0		1	0	0	1	0	1	1			-1	1	ρ_1'
D_2				0		0	1	0		0		0	0	0	0	0	0		1		0	2	ρ_2
L_1				0		0	0	0		-1		-1	-1	-1	-1	0	0			1	1	0	σ_1'
D_1				1	1	1	-1	-1		0		-1	0	0	-1	0	-1				1	0	ρ_1
原模式變數↑	F_1	$\underline{F}_1$	F_2	$\underline{F}_2$	D_1	$\underline{D}_1$	D_2	$\underline{D}_2$	L_1	$\underline{L}_1$	L_2	$\underline{L}_2$	S_v	S_1	S_2	F_1	F_2	D_1	D_2	L_1	L_2	ς	←互補變數

模式都可在最佳解表的目標函數列得到互補解。

同一案例的標的模式與對偶模式分別能以對偶單純形法或單純形法求解，若排除表中加網的基變數行，演算表係數(如表 11 與 12 或表 13 與 14)可以一一對應。本文在各行與各列的二側，已分別標註互補的原、偶二變數，方便對照。如果能刻意的安排原偶二模式變數的順序，則只要將演算表矩陣轉置(行列對調)，即可將其中一表輕易轉換成另一表。上述二模式的解法若對調，演算表係數也一一對應。

同一規劃問題的位勢與流量網絡，對應於同一組節點與管線，只是考慮的變數與限制式不同，因此，其案例的基本解，圖 5 與圖 7，可以標示在同一網絡(圖 10)上。上述以二種方式處理同一案例的原偶演算表既然可以對應，則其網絡演算過程也可以對應(方中秋，1995; 胡明哲，2000)，並且可以在如圖 10 的共同網絡圖上進行演算。

從上述演算表可知，各非基變數有微小變動時，基變數的對應變動，以及機會成本(收益)與淨成本(收益)。至於演算表與位勢或流量網絡之間亦有對應關係(如表 13 與圖 5，表 14 與圖 7)，各非基變數變動時，基變數的對應變動(管線切割或迴圈集合)，以及機會成本(收益)與淨成本(收益)(劉佳明, 1993; 方中秋, 1995; 胡明哲, 2000)。演算表中非基變數行的係數值小部分為+1, -1，大部分為 0，它們分別表示上述變動所對應的變動集合(切割或迴圈)中，各該基變數管線為順向、逆向或根本不在變動集合中。

標的與對偶模式的目標函數都是單價與數量乘積的累計值，但是二模式的這些項目並不相同。一對互補解的目標函數值必定相同，但是不一定都可行。若都可行，則分別是原、偶模式的最佳解，如表 10 案例。以下仔細比對原、偶二模式的目標函數：

- 標的模式

供應量缺額<u>單價</u>已知，決定缺額<u>數量</u>方案，使總成本最小。

- 目標函數

  係數是缺額<u>單價</u>，變數是其<u>數量</u>。

- 圖 5 或表 10 基本解

  總成本函數=Σ(單價係數×數量變數)=

  Σ(缺額單價×缺額)+ 單位容量成本×容量= $z^*= 2\cdot3+ 3\cdot2+ 6\cdot7= 54$。

- 對偶模式

服務<u>數量</u>已知，決定服務<u>單價</u>方案，使總收益最大。

- 目標函數

  係數是需求參數數量，變數是其單價。

- 圖 7 或表 12 基本解

  總收益函數=Σ(數量係數×單價變數)=

  Σ(標的值×標的值價格+最小值×最小值價格)= $\varsigma^*=4\cdot2+1\cdot1+6\cdot3+6\cdot3+3\cdot3=54$。

八、結　論

本文建立水庫標的規劃模式與其對偶模式，並藉二案例模式的位勢與流量網絡圖，說明其變數、限制式與目標函數。從網絡的觀點，水庫標的模式其實也可以稱為水庫的位勢網絡模式，有別於傳統的流量網絡模式(Major & Lenton, 1979; Glover, Klingman and Phillips, 1992; 周乃昉, 1992, 2004; Sun, Hsu, Louie and Yeh, 1995; 徐年盛、鄭克偉, 2000; 劉佳明, 2002)。

對於水庫標的規劃模式與其對偶模式的一對互補基本解，本文利用它們的位勢網絡與流量網絡，以及價格-供應量坐標圖，探討二模式解的互補鬆弛條件。並根據模式的特殊網絡結構，設計推求互補解的計算程序，每將已得變數值，代入模式限制或互補條件中的一式，即可求得一個未知變數值，根據基本解張成樹的結構，一次一式，依序求得所有未知變數值，不必多式聯立求解多個未知變數。

以單純形法求解標的模式與以對偶單純形法求解對偶模式，二組演算表數值之間，前者的列與後者的行，其元素一一對應；前者的行與後者的列，其元素亦一一對應。原模式目標式係數與限制式右端常數分別對應於對偶模式互補的基變數值與目標函數係數。若以對偶單純形法求解標的模式與以單純形法求解對偶模式，其二組演算表數值之間，亦可一一對應。

二模式演算過程各基本解，除了原偶二表的數值可以一一對應，原偶二圖(位勢與流量網絡)管線之間的數值也可以一一對應。

基本上，演算過程各表與圖 (如表 13 與圖 5，表 14 與圖 7)呈現非基變數(管線位勢或流量)變動下，基變數的對應變動(網絡管線的切割或迴圈集合)，及二者成本(或收益)的對應變動：淨成本(或收益)= (非基變數變動)直接成本(或收益)-(基變數的對應變動)機會成本(或收益)。

參考文獻

1. 劉佳明，”A dual interpretation of a linear reservoir model”, 台灣水利 24 卷 1 期，1976。
2. 胡文章，「線性規劃在水庫規劃及操作之應用」，台灣水利 25 卷 1 期，1977。
3. 劉佳明，「水庫標的線性規劃問題之網路切割解法簡介」，台灣水利 36 卷 2 期，1988。
4. 劉佳明，「水庫標的線性規劃問題解值之整

數性與計算效率」，第四屆水利工程研討會論文集，1988。
5. 周乃昉，「區域性地面水量調配之網流模式」，第六屆水利工程研討會論文集，1992。
6. 劉佳明，「工程規劃、設計與管理中優選方法的應用」，農業工程學報 39 卷 1 期，1993。
7. 方中秋，水庫標的線性規劃模式之對偶問題與其在解法上之應用，國立台灣大學農業工程研究所碩士論文，1995。
8. 劉佳明，「水庫標的規劃模式與其網路演算法」，農業工程研討會論文集，1997。
9. 胡明哲，「水庫標的規劃模式的解法」，國立台灣大學農業工程研究所碩士論文，2000。
10. 徐年盛、鄭克偉，「流域性水資源規劃最佳化模式之建立」，跨世紀水資源經營管理研討會論文集，2000。
11. 劉佳明，「水庫規劃問題的位勢網絡與流量網絡模式」，農業工程學報 48 卷 4 期，2002。
12. 劉佳明，「水庫線性標的規劃模式與其對偶模式 - 網絡解釋」，農業工程學報 50 卷 1 期，2004。
13. 周乃昉，「通用性區域水資源調度與供需分析模式建立」，經濟部水利署水利規劃試驗所期末報告，2004。
14. Dantzig, G. B., Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, 1963.
15. Major, D. C. and R. L. Lenton, Applied Water Resource Systems Planning, Prentice-Hall, 1979.
16. Liu, C. M., ”A dual network model for a linear reservoir goal programming problem”, Proc. of the ROC-Japan Joint Seminar on Water Resources Engineering, Taipei, 1987.
17. Bazaraa, M. S., J. J. Jarvis and H. D. Sherali, Linear Programming and Network Flows, John Wiley & Sons, 1990.
18. Glover, F., D., Klingman and V. P. Phillips, Network Models in Optimization and Their Applications in Practice, John Wiley & Sons, 1992.
19. Murty, K. G., Network Programming, Prentice-Hall, 1992.
20. Sun, Y-H, N-S Hsu, P. W. F. Louie and W. W-G Yeh, "Generalized Network Algorithm for Water-Supply-System Optimization", Journal of Water Resources Planning and Management, ASCE, Vol. 121(5), pp.392-398, 1995.

收稿日期：民國 93 **年** 3 **月** 31 **日**
修正日期：民國 93 **年** 4 **月** 27 **日**
接受日期：民國 93 **年** 4 **月** 30 **日**