

## 以機率密度函數模擬直接逕流歷線之研究

### Modeling Direct Runoff Hydrographs using Probability Density Functions

淡江大學水資源及環境工程學系  
助理教授

蕭政宗

Jenq-Tzong Shiau

成功大學水利及海洋工程學系  
博士班研究生

王心怡

Hsin-Yi Wang

成功大學水利及海洋工程學系  
教授

蔡長泰

Chang-Tai Tsai

#### 摘 要

在防洪及排水工程規劃設計中，洪水歷線是重要的考慮因素之一，然而以往對於洪水歷線的處理，不論是實測或是設計洪水歷線，均採用離散式的紀錄方式，即一個時刻一個時刻的紀錄。若洪水歷線較長則需紀錄較多的數據，而時刻與時刻之間未紀錄的數據也無從得知。利用機率密度函數來模擬直接逕流歷線的形狀，則可以改善此一缺點。本文之研究目的為利用常用的機率密度函數，如 gamma、beta、lognormal、Gumbel 及 Weibull 等五種不同的分佈，來模擬直接逕流歷線，並比較兩種不同的參數推估方式，包括形狀變數法(以形狀平均值與形狀變異數推估)和洪峰法(以洪峰量與洪峰時間推估)，所得模擬直接逕流歷線與實測值之差異。文末以濁水溪流域桶頭(2)流量站五場實測颱風洪水歷線進行檢驗，結果顯示 gamma 分佈配合洪峰法參數推估方式所得之模擬直接逕流歷線最佳。

**關鍵詞：**洪水歷線，直接逕流歷線，基流分離，機率密度函數，參數推估。

#### ABSTRACT

The flood hydrograph is an essential factor in flood control planning and design. Traditional treatments of flood hydrographs use discrete type records. The data between time intervals are not available, however. Using the probability density function to model the flood hydrographs can overcome this problem and thus become continuous recording. The major purpose of this study is applying the probability density function to model the direct runoff hydrograph. The probability density functions considered in this study include gamma, beta, lognormal, Gumbel, and Weibull. Two different parameter-estimation schemes, one using shape variables and the other using flood peak

and time to peak, are employed to investigate the effects on differences between the derived and observed flood hydrographs. The proposed methodology is demonstrated with an application to the Tungtou gauge station in Choshui Creek, Taiwan. The results show that the gamma probability density function associated with flood peak and time to peak parameter-estimation scheme has the best fitting to the observed flood hydrographs.

**Keywords:** Flood hydrograph, Direct runoff hydrograph, Base flow separation, Probability density function, Parameter estimation.

## 一、前言

台灣四面環海，屬亞熱帶海島型氣候，在梅雨及颱風季節經常發生暴雨，其所帶來強度大且延時長的降雨，常造成洪水氾濫及市區淹水，如2001年的納莉、潭美颱風、2000年的象神颱風、1996年的賀伯颱風等均對台灣地區造成甚大的生命及財產損失。為防洪減災而建設之工程多以指定之洪峰流量進行設計，然而實際洪水過程包括洪水來臨時的河川流量迅速上漲，上升至洪峰後隨即消滅，洪水量因時而變，防洪及排水之功能應考慮洪水之變量流現象。

完整的洪水事件描述至少需包括洪峰(peak)、洪水量(volume)及延時(duration)等變數(Goel等, 1998; Yue等, 1999)。用於工程設計的設計洪水歷線(design flood hydrograph)應包括上述三種變數。Yue等(2002)指出較常用於建構工程設計所需之設計洪水歷線的方法有傳統單位歷線法(traditional unit hydrograph method)、合成單位歷線法(synthetic unit hydrograph method)、代表歷線法(typical hydrograph method)及統計法(statistical method)等四種。近年來國內有關歷線的研究較偏重於地貌型瞬時單位歷線(geomorphologic instantaneous unit hydrograph)的推導與應用，例如李光敦及王如意(1995)、王如意等(1996)、楊銘賢及李光敦(1998)與王如意等(2000)。然而，Yue等(2002)指其中以統計法較缺乏有系統之研究。因此，本文將探討統計法於模擬洪水歷線之應用。

統計法係利用機率密度函數的形狀來代表洪水歷線。由實測洪水歷線觀察可知，單峰洪水

歷線(uni-peak flood hydrograph)的形狀與單峰機率密度函數(probability density function, pdf)的形狀類似，因此可利用實測洪水歷線的形狀來推估機率密度函數的參數，進而使用機率密度函數來模擬洪水歷線。利用統計法的優點為可將原本離散的(discrete)資料紀錄方式改為連續的(continuous)紀錄方式，且僅需紀錄機率密度函數的參數即可，無需一個一個時刻的紀錄數據，時刻與時刻間未紀錄的資料亦無需以內插或其他方式推估，直接利用機率密度函數即可求得。

統計法較常應用於研究單位歷線。Aron及White(1982)曾應用gamma分佈機率密度函數來模擬合成的單位歷線；Ciepielowski(1987)曾應用Pearson分佈機率密度函數來研究波蘭Vistula流域洪水歷線，並將之應用於推估無測站河川之洪水歷線；Haktanir及Sezen(1990)應用二參數gamma及三參數beta分佈於模擬土耳其Anatolia地區的單位歷線；Bhunya等(2003)利用簡化的二參數gamma分佈來推導合成單位歷線；最近Yue等(2002)則以形狀變數推估beta分佈機率密度函數之參數，並將之應用於模擬加拿大Ashuapmushuan流域之洪水歷線。由文獻回顧可知gamma及beta分佈是較常用於模擬歷線的機率密度函數，但對機率密度函數的選擇尚無一致的標準，所以應做進一步之比較分析，探討不同機率密度函數之適用性。

本文將選擇五種常用之機率密度函數模擬實際直接逕流歷線，以探討不同機率密度函數的適用性。所選用的機率密度函數為gamma、beta、lognormal、Gumbel及Weibull等。因機率密度函數之參數值會影響模擬結果，而參數推估值與選

用之參數推估法有關，目前常用之參數推估方式有二種，其一為 Yue(2002)所建議的形狀變數(shape variable)法，即以直接逕流歷線的形狀平均值(shape mean)及形狀變異數(shape variance)來推估所適用之機率密度函數之參數，第二種方式為洪峰法即以歷線之洪峰流量與洪峰時間推估所選擇之機率密度函數之參數。為比較何種機率密度函數及參數推估方式可得到較接近於實測歷線的模擬洪水歷線，本文以相關係數、均方根誤差、總洪水體積誤差百分比及洪峰量誤差百分比等指標作為檢驗的依據。本文選擇濁水溪流域桶頭(2)流量站的實測洪水歷線為例說明本文所建議方法的實用性，並以五場颱風洪水歷線進行檢驗以決定該站最佳的函數形式及參數推估方式。

## 二、研究方法

本文以機率密度函數來模擬洪水歷線，方法概述如下：首先說明利用機率密度函數模擬直接逕流歷線的步驟，而所考慮的機率密度函數有 gamma、beta、lognormal、Gumbel 及 Weibull 等五種分佈；其次推導形狀變數法和洪峰法推估機率密度函數參數所需的方程式；最後敘述用於判斷最佳機率密度函數及參數推估方式的檢定指標及方法。

台灣地區河川坡陡流急，因颱風或暴雨所帶來典型的洪水歷線，洪水延時極短，而河川流量由颱風或暴雨來臨前的低流量急速上升至洪峰後又快速下降，如圖 1(a)所示為 1962 年愛美颱風在濁水溪桶頭(2)流量站所形成之單峰洪水歷線，整個洪水歷程不到 48 小時。由於單峰洪水歷線的形狀與機率密度函數的形狀極為類似，因此可以利用機率密度函數來模擬洪水歷線，說明如下：

### (一) 基流分離(base flow separation)

洪水歷線之前段均為基流量，受前場降雨影響，故須先做基流分離，以得出單場暴雨直接影響之洪流量。有數種基流分離的方式 (Singh, 1992)，本文選擇主觀法(subjective method)進行基流分離，即自洪水歷線上升段(rising limb)的起點

以直線連接至退水段(receding limb)的終點，如圖 1(a)中的虛線所示，虛線之下為基流(base flow)，虛線之上為直接逕流(direct runoff)。基流分離後的直接逕流，歷線如圖 1(b)所示。

### (二) 面積轉換

由於機率密度函數曲線下之面積為 1，所以需將實測洪水歷線做適當之轉換以利參數推估。轉換之方法為將直接逕流歷線縱軸除以歷線下之面積，即總直接逕流體積  $V_T$ ，使其歷線下之面積  $V$  為 1，稱為修正直接逕流歷線，就可與機率密度函數之特性一致，可以機率密度函數來代表，如圖 1(c)所示。另 beta 分佈之變數介於 0 與 1 之間，因此橫軸座標需除以直接逕流之延時  $D$ ，成為無因次直接逕流歷線，使其與 beta 分佈之機率密度函數一致。

### (三) 參數推估

選擇一特定之機率密度函數(如圖 1(d)所示)後，利用圖 1(c)面積為 1 之修正直接逕流歷線實測資料推估該特定機率密度函數之參數。

### (四) 模擬洪水歷線

欲利用機率密度函數來模擬洪水歷程，僅需將所推估得之參數代回特定之機率密度函數，乘上總直接逕流體積  $V_T$ ，再加上基流量即可得到該場洪水歷線。

## 三、機率密度函數

本文將選擇常用的機率密度函數，包括 gamma、beta、lognormal、Gumbel 及 Weibull 等五種，來模擬洪水歷線並檢驗其適用性。上述五種機率密度函數之函數形式、平均值(E(X))及變異數(Var(X))分述如下(Castillo, 1988；Shahin 等, 1993)：

#### 1. gamma 分佈：

$$f(x) = \frac{\lambda^\eta}{\Gamma(\eta)} x^{\eta-1} e^{-\lambda x} \quad x \geq 0 \dots\dots\dots (1)$$

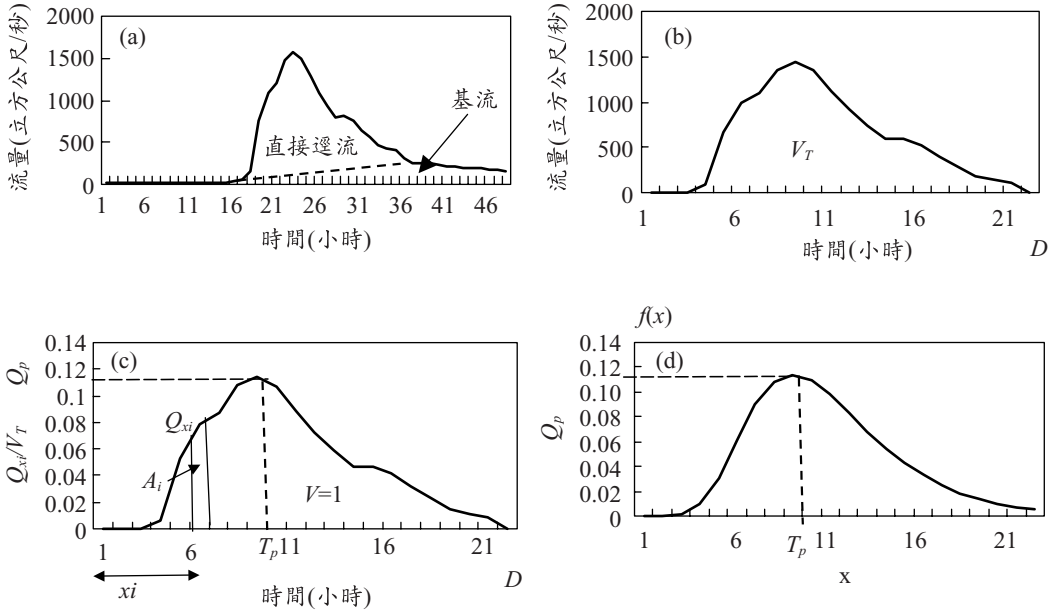


圖 1 以機率密度函數模擬洪水歷線示意圖，(a)實測洪水歷線；(b)直接逕流歷線；(c)面積為 1 之修正直接逕流歷線；(d)機率密度函數

其中  $\lambda$  及  $\eta$  為參數； $\Gamma$  為 gamma 函數，其定義如下：

$$\Gamma(\eta) = \int_0^{\infty} \lambda^\eta x^{\eta-1} e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} t^{\eta-1} e^{-t} dt \quad \dots\dots\dots (2)$$

gamma 分佈之平均值及變異數分別為：

$$E(X) = \frac{\eta}{\lambda} \quad \dots\dots\dots (3a)$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\eta}{\lambda^2} \quad \dots\dots\dots (3b)$$

2. beta 分佈：

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \dots\dots\dots (4)$$

其中  $\alpha$  及  $\beta$  為參數；B 為 beta 函數，其定義如下：

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \times \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \quad \dots\dots\dots (5)$$

beta 分佈之平均值及變異數分別為：

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \dots\dots\dots (6a)$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \quad \dots\dots\dots (6b)$$

3. lognormal 分佈

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma_{\ln(x)}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x) - \mu_{\ln(x)}}{\sigma_{\ln(x)}}\right)^2} \quad x > 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

其中  $\mu_{\ln(x)}$  及  $\sigma_{\ln(x)}$  為參數。

lognormal 分佈之平均值及變異數分別為：

$$E(X) = e^{\mu_{\ln(x)} + \frac{\sigma_{\ln(x)}^2}{2}} \quad \dots\dots\dots (8a)$$

$$\text{Var}(X) = e^{2\mu_{\ln(x)} + \sigma_{\ln(x)}^2} (e^{\sigma_{\ln(x)}^2} - 1) \quad \dots\dots\dots (8b)$$

4. Gumbel 分佈

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}} e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}} \quad -\infty < x < \infty \quad \dots\dots\dots (9)$$

其中  $\alpha$  及  $\beta$  為參數。

Gumbel 分佈之平均值及變異數分別為：

$$E(X) = \alpha + 0.5772\beta \quad \dots\dots\dots (10a)$$

$$\text{Var}(X) = \left(\frac{\beta\pi}{\sqrt{6}}\right)^2 \quad \dots\dots\dots (10b)$$

5. Weibull 分佈

$$f(x) = \frac{\gamma}{x} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\gamma e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\gamma} \quad x \geq 0; \gamma, \alpha > 0 \dots\dots\dots (11)$$

其中  $\alpha$  及  $\gamma$  為參數。

Weibull 分佈之平均值及變異數分別為：

$$E(X) = \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \dots\dots\dots (12a)$$

$$Var(X) = \alpha^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) - \left[\alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\right]^2 \dots\dots\dots (12b)$$

四、參數推估法

(一) 形狀變異數法

Yue 等(2002)建議應用機率密度函數模擬直接逕流歷線時，機率密度函數之平均值及變異數可以直接逕流歷線之形狀平均值(shape mean,  $S_m$ )和形狀變異數(shape variance,  $S_v$ )等二形狀變數(shape variable)來表示。

(1) 形狀平均值  $S_m$ ：為洪水歷線之形心(centroid)，代表歷線中央趨向(central tendency)的程度，可由下式推估：

$$S_m = \frac{1}{A} \sum_{A_i=1}^n x_i A_i = \frac{1}{A} \sum_{A_i=1}^n x_i f(x_i) dx_i \dots\dots\dots (13)$$

其中  $A$  為修正直接逕流歷線下之面積，即整個洪水歷程之總直接逕流量； $x_i$  為原點至面積  $A_i$  中心的水平距離； $f(x_i)$  為  $x$  等於  $x_i$  時之縱軸，各變數詳圖 1(c)。

(2) 形狀變異數  $S_v$ ：直接逕流歷線之變異數，代表歷線分散的程度，可由下式推估：

$$S_v = \frac{1}{A} \sum_{A_i=1}^n (x_i - S_m)^2 A_i = \frac{1}{A} \sum_{A_i=1}^n (x_i - S_m)^2 f(x_i) dx_i \dots\dots\dots (14)$$

(13)及(14)式均可由修正直接逕流歷線推估得到，如圖 1(c)所示。(13)及(14)式應用於機率密度函數即為隨機變數之平均值及變異數，因此令(13)式之  $S_m$  等於各分佈之平均值( $E(X)$ )，(14)式之  $S_v$  等於各分佈之變異數( $Var(X)$ )，即可以由解聯立方程式得到以  $S_m$  及  $S_v$  所表示之參數，上述五種

不同分佈之參數以形狀平均值及形狀變異數來推估之方程式如下所示。

1. gamma 分佈

解聯立方程式  $S_m = \frac{\eta}{\lambda}$  及  $S_v = \frac{\eta}{\lambda^2}$  可以得到以  $S_m$  及  $S_v$  所表示之 gamma 分佈參數  $\lambda$  及  $\eta$ ，如下二式所示。

$$\eta = \frac{S_m^2}{S_v} \dots\dots\dots (15)$$

$$\lambda = \frac{S_m}{S_v} \dots\dots\dots (16)$$

2. beta 分佈

解聯立方程式  $S_m = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$  及  $S_v = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$  可得到以  $S_m$  及  $S_v$  所表示之 beta 分佈參數  $\alpha$  及  $\beta$ ，如下二式所示。

$$\alpha = \frac{S_m^2(1 - S_m)}{S_v} - S_m \dots\dots\dots (17)$$

$$\beta = \alpha \left(\frac{1}{S_m} - 1\right) \dots\dots\dots (18)$$

3. lognormal 分佈

解聯立方程式  $S_m = e^{\mu_{\ln(x)} + \frac{\sigma_{\ln(x)}^2}{2}}$  及  $S_v = e^{2\mu_{\ln(x)} + \sigma_{\ln(x)}^2} (e^{\sigma_{\ln(x)}^2} - 1)$  可得到以  $S_m$  及  $S_v$  所表示之 lognormal 分佈參數  $\mu_{\ln(x)}$  及  $\sigma_{\ln(x)}$ ，如下二式所示。

$$\mu_{\ln(x)} = \ln(S_m) - 0.5\sigma_{\ln(x)}^2 \dots\dots\dots (19)$$

$$\sigma_{\ln(x)} = \left(\ln\left(1 + \frac{S_v}{S_m}\right)\right)^{0.5} \dots\dots\dots (20)$$

4. Gumbel 分佈

解聯立方程式  $S_m = \alpha + 0.5772\beta$  及  $S_v = \left(\frac{\beta\pi}{\sqrt{6}}\right)^2$  可得到以  $S_m$  及  $S_v$  所表示之 Gumbel 分佈參數  $\alpha$  及  $\beta$ ，如下二式所示。

$$\alpha = S_m - 0.5772 \times \left(\frac{\sqrt{6}S_v^{0.5}}{\pi}\right) \dots\dots\dots (21)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{6}S_v^{0.5}}{\pi} \dots\dots\dots(22)$$

5. Weibull 分佈

解聯立方程式  $S_m = \alpha\Gamma(1 + \frac{1}{\gamma})$  及  $S_v = \alpha^2\Gamma(1 + \frac{2}{\gamma}) - [\alpha\Gamma(1 + \frac{1}{\gamma})]^2$  可得到以  $S_m$  及  $S_v$  所表示之 Weibull 分佈參數  $\alpha$  及  $\gamma$ ，如下二式所示。

$$\alpha = \frac{S_m}{\Gamma(1 + \frac{1}{\gamma})} \dots\dots\dots(23)$$

$$S_v = \frac{S_m^2}{[\Gamma(1 + \frac{1}{\gamma})]^2} \Gamma(1 + \frac{2}{\gamma}) - S_m^2 \dots\dots\dots(24)$$

利用 gamma 分佈之機率密度函數來模擬單峰之洪水歷線需符合  $\eta > 1$  的條件，否則機率密度函數便不具有單峰的形式；而利用 beta 分佈之機率密度函數來模擬單峰之洪水歷線需符合  $\alpha > 1$  且  $\beta > 1$  的條件，否則機率密度函數亦不具有單峰的形式。求各分佈之參數時需先由修正直接逕流歷線(圖 1(c))，利用(13)及(14)式求形狀平均值  $S_m$  及形狀變異數  $S_v$ ，之後再代入上述(15)至(24)式即可得到各分佈之參數。惟在 Weibull 分佈中，因參數  $\gamma$  無法直接表為  $S_m$  及  $S_v$  之函數，因此需以試誤法求解。

Yue 等(2002)以 beta 分佈機率密度函數且以(17)式及(18)式推估其參數，應用於模擬加拿大 Ashuapmushuan 流域之洪水歷線，結果顯示洪水歷線形狀類似但洪峰量略有差異，因此再利用三角形歷線修正使其更接近實測之洪峰量。

(二) 洪峰法

為使洪峰量模擬的結果更接近實際值，Croley (1980) 將洪峰量作為推估參數的主要依據。因此，本文除了以形狀變數來推估參數外，另以洪峰量  $Q_p$  及洪峰時間  $T_p$  來推估參數(詳圖 1(c))以作為比較。因洪峰到達時間  $T_p$  即為單峰機率密度函數之眾數(mode) (詳圖 1(d))，而單峰機率密度函數的眾數可由機率密度函數一次微

分， $f'(x)=0$ ，求得，而所求出之  $x$  值即為  $T_p$  值，而將所求出之眾數代入機率密度函數，即  $T_p$  代入  $f(x)$  函數中，所得之值即可代表洪峰量  $Q_p=f(T_p)$ 。五種機率密度函數之參數以洪峰量  $Q_p$  及洪峰時間  $T_p$  推估之方式分述如下。

1. gamma 分佈

令 gamma 機率密度函數((1)式)對  $x$  一次微分為 0 時所得之  $x$  值即為眾數，可用於代表如圖 1(c) 中的洪峰時間  $T_p$ ，而後再將所求得之眾數  $x$  代入 gamma 機率密度函數即為該函數的極大值，可用於代表如圖 1(c) 中的修正直接逕流歷線之洪峰  $Q_p$ 。因此  $T_p$  及  $Q_p$  可表為 gamma 機率密度函數參數  $\eta$  及  $\lambda$  的函數，如下二式所示。

$$T_p = \frac{1}{\lambda}(\eta-1) \dots\dots\dots(25)$$

$$Q_p = \lambda \frac{(\eta-1)^{\eta-1}}{\Gamma(\eta)} e^{-(\eta-1)} \dots\dots\dots(26)$$

前述的推導步驟可用於其他的分佈求取  $T_p$  及  $Q_p$  與參數間之關係式，因此過程不再贅述，僅將結果列於底下。

2. beta 分佈

$$T_p = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2} \dots\dots\dots(27)$$

$$Q_p = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\beta-1}{\alpha+\beta-2}\right)^{\beta-1} \dots\dots\dots(28)$$

3. lognormal 分佈

$$T_p = e^{(\mu_{\ln(x)} - \sigma_{\ln(x)}^2)} \dots\dots\dots(29)$$

$$Q_p = \frac{1}{\sigma_{\ln(x)}\sqrt{2\pi}} e^{\{-\mu_{\ln(x)} + \frac{\sigma_{\ln(x)}^2}{2}\}} \dots\dots\dots(30)$$

4. Gumbel 分佈

$$T_p = \alpha \dots\dots\dots(31)$$

$$Q_p = \frac{1}{\beta} e^{-1} \dots\dots\dots(32)$$

5. Weibull 分佈

$$T_p = \alpha \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \dots\dots\dots(33)$$

$$Q_p = \frac{\gamma}{\alpha} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)} \dots\dots\dots(34)$$

上述結果除 Gumbel 分佈外，其餘均無法將機率密度函數的參數直接表為  $Q_p$  及  $T_p$  的函數，因此在已知  $Q_p$  及  $T_p$  的條件下，需利用試誤法來推估參數，亦即由修正之直接逕流歷線(圖 1(c))得到  $Q_p$  及  $T_p$  值，再由(25)至(34)式以試誤法的方式來推估各機率密度函數之參數。

### 五、檢定指標

為檢驗由機率密度函數所得到的模擬洪水歷線之適用性，本文以模擬洪水歷線與實測洪水歷線間之相關係數、均方根誤差、總洪水體積及洪峰量誤差百分比等指標作為檢驗的依據。

#### 1. 相關係數(Coefficient of Correlation, CC)

$$CC = \frac{\sum_{i=1}^n (Q_i - \bar{Q})(\hat{Q}_i - \bar{\hat{Q}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (Q_i - \bar{Q})^2 \sum_{i=1}^n (\hat{Q}_i - \bar{\hat{Q}})^2}} \quad -1 \leq CC \leq 1 \quad (35)$$

其中  $Q_i$ ：實測洪水歷線之流量； $\bar{Q}$ ：實測流量之平均值； $\hat{Q}$ ：模擬洪水歷線之流量； $\bar{\hat{Q}}$ ：模擬流量之平均值； $n$ ：總模擬個數。

#### 2. 均方根誤差(Root Mean Square Error, RMSE)

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Q_i - \hat{Q}_i)^2}{n}} \quad RMSE \geq 0 \quad \dots\dots\dots(36)$$

#### 3. 總洪水體積誤差百分比

$$\frac{\hat{V} - V}{V} \times 100\% \quad \dots\dots\dots(37)$$

其中  $V$ ：實測洪水歷線下之總洪水體積； $\hat{V}$ ：模擬洪水歷線下之總洪水體積。

#### 4. 洪峰量誤差百分比

$$\frac{\hat{Q}_p - Q_p}{Q_p} \times 100\% \quad \dots\dots\dots(38)$$

其中  $Q_p$ ：實測洪水歷線之洪峰量； $\hat{Q}_p$ ：模擬

洪水歷線之洪峰量。

上述四項檢定指標中，若相關係數愈接近 1 代表推估洪水歷線的趨勢愈接近實測的洪水歷線；均方根誤差愈小，代表推估的洪水歷線愈接近於實測的洪水歷線，所以相關係數愈大且均方根誤差愈小代表所推估之洪水歷線愈接近實測值。同時也比較總洪水體積和洪峰量在模擬值和實測值之差異，若誤差百分比為正值代表模擬值高估，負值代表低估，誤差百分比愈接近於 0，則所推估的結果愈佳。

## 六、應用結果與討論

為瞭解前述五種機率密度函數分佈與兩種參數推估方式所得之模擬洪水歷線與實測洪水歷線間的差異，亦即以何種機率密度函數配合何種參數推估方式可得到最接近於實測洪水歷線的結果，因此本文以濁水溪流域桶頭(2)流量站(測站編號 1510H024)為例，探討洪水歷線以機率密度函數來代表的適用性。桶頭(2)流量站隸屬濁水溪流域，自 1959 年開始設站紀錄流量，自桶頭(2)流量站逐時流量紀錄中選取具有明顯單峰的洪水歷線作為本文分析之依據。本文所選擇的颱風洪水歷線計有 1962 年之愛美、1978 年之黛拉、1980 年之亞力士、1996 年之賀伯及 1997 年之安珀，共五場，其基本資料如表 1 所示，洪水歷線則分別示於圖 2~圖 6。

將所選定的五場颱風洪水歷線依前節所述的步驟進行基流分離，分離後之直接逕流歷線再除以總直接逕流體積得到面積為 1 之修正直接逕流歷線，再以前述之五種機率密度函數及兩種不同參數推估方式，分別推估各機率密度函數的參數，結果如表 2 所示。利用推估之參數可模擬直接逕流歷線，再加回原分離之基流即可得到以機率密度函數模擬之洪水歷線，利用相關係數、均方根誤差、總洪水體積及洪峰量之誤差百分比即可瞭解模擬與實測洪水歷線間之差異。圖 7 所示為安珀颱風以形狀變數法推估參數在不同機率密度函數所得模擬洪水歷線與實測洪水歷線之比較，圖 8 則為安珀颱風以洪峰法推估參數在不同機率密度函數所得模擬洪水歷線與實測洪

表 1 濁水溪流域桶頭(2)流量站五場颱風洪水之基本資料

颱風	時間	洪水歷線		直接逕流歷線			
		洪峰流量 $Q_p$ (cms)	總體積 $V$ (cms.hr)	延時 $D$ (hrs)	洪峰時間 $T_p$ (hrs)	洪峰流量 $Q_p$ (cms)	總體積 $V$ (cms.hr)
愛美	1962/09/05	1580	19120.9	22	9	1443.1	12615.0
黛拉	1978/08/12	466	3660.6	22	2	415.0	1312.2
亞力士	1984/07/03	349	5533.0	42	6	315.9	2753.4
賀伯	1996/08/01	4540	63555.7	36	20	4266.0	45375.2
安珀	1997/08/29	825	9587.3	48	7	797.4	6696.7

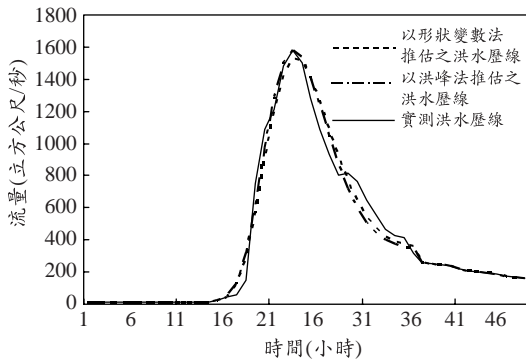


圖 2 愛美颱風以 gamma 機率密度函數在不同參數推估方式下推估之模擬洪水歷線與實測洪水歷線之比較

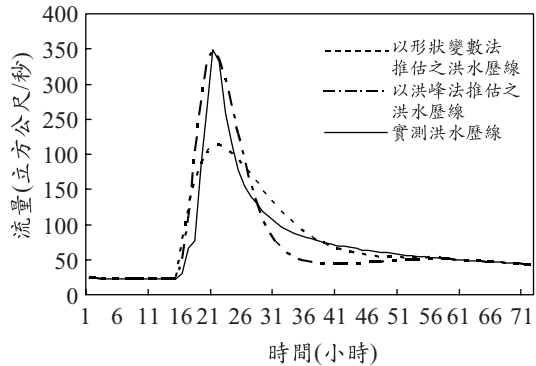


圖 4 亞力士颱風以 gamma 機率密度函數在不同參數推估方式下推估之模擬洪水歷線與實測洪水歷線之比較

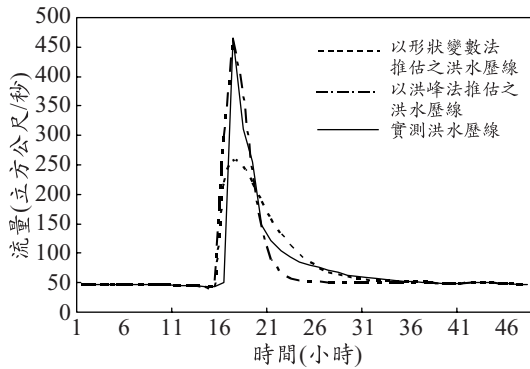


圖 3 黛拉颱風以 gamma 機率密度函數在不同參數推估方式下推估之模擬洪水歷線與實測洪水歷線之比較

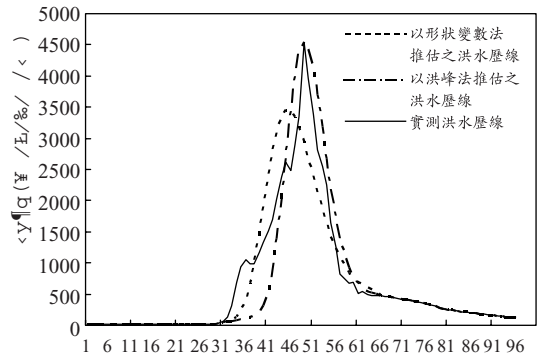


圖 5 賀伯颱風以 gamma 機率密度函數在不同參數推估方式下推估之模擬洪水歷線與實測洪水歷線之比較

水歷線之比較。由圖可知以洪峰法推估參數所得模擬洪水歷線的洪峰量較接近於實測值，而不同機率密度函數所得模擬洪水歷線間之差異不大。其他場颱風所得之結果類似，因此不一一繪出。

表 3 及表 4 所列為五場颱風，以不同機率密度函數和不同參數推估方式來推求其模擬洪水歷線與實測洪水歷線之相關係數與均方根誤差。由表中可看出以洪峰法推估所得之歷線有較大之相關係數及較小的均方根誤差，而不同分佈



表 2 不同機率密度函數以不同方式推估之參數值

愛美颱風(1962)		
分佈	形狀變數法	洪峰法
gamma	$\eta=7.800, \lambda=0.755$	$\eta=7.010, \lambda=0.668$
beta	$\alpha=3.519, \beta=3.778$	$\alpha=4.326, \beta=5.8040$
lognormal	$\mu_{\ln(x)}=2.301, \sigma_{\ln(x)}=0.349$	$\mu_{\ln(x)}=2.392, \sigma_{\ln(x)}=0.364$
Gumbel	$\alpha=8.829, \beta=2.976$	$\alpha=9, \beta=3.220$
Weiubll	$\alpha=11.875, \gamma=3.035$	$\alpha=10.292, \gamma=3.010$
黛拉颱風(1978)		
分佈	形狀變數法	洪峰法
gamma	$\eta=1.855, \lambda=0.399$	$\eta=3.675, \lambda=0.748$
beta	$\alpha=1.252, \beta=4.677$	$\alpha=3.274, \beta=23.74$
lognormal	$\mu_{\ln(x)}=1.321, \sigma_{\ln(x)}=0.657$	$\mu_{\ln(x)}=0.989, \sigma_{\ln(x)}=0.544$
Gumbel	$\alpha=3.111, \beta=2.660$	$\alpha=2, \beta=1.163$
Weiubll	$\alpha=5.085, \gamma=1.379$	$\alpha=2.763, \gamma=2.058$
亞力士颱風(1984)		
分佈	形狀變數法	洪峰法
gamma	$\eta=2.313, \lambda=0.199$	$\eta=4.110, \lambda=0.518$
beta	$\alpha=1.398, \beta=3.666$	$\alpha=3.442, \beta=15.650$
lognormal	$\mu_{\ln(x)}=2.271, \sigma_{\ln(x)}=0.599$	$\mu_{\ln(x)}=2.050, \sigma_{\ln(x)}=0.508$
Gumbel	$\alpha=8.166, \beta=5.946$	$\alpha=6, \beta=3.205$
Weiubll	$\alpha=12.896, \gamma=1.552$	$\alpha=7.939, \gamma=2.185$
賀伯颱風(1996)		
分佈	形狀變數法	洪峰法
gamma	$\eta=9.664, \lambda=0.531$	$\eta=23.38, \lambda=1.119$
beta	$\alpha=4.270, \beta=4.172$	$\alpha=10.025, \beta=8.220$
lognormal	$\mu_{\ln(x)}=2.853, \sigma_{\ln(x)}=0.314$	$\mu_{\ln(x)}=3.039, \sigma_{\ln(x)}=0.208$
Gumbel	$\alpha=15.573, \beta=4.567$	$\alpha=20, \beta=3.913$
Weiubll	$\alpha=20.256, \gamma=3.440$	$\alpha=20.832, \gamma=5.220$
安珀颱風(1997)		
分佈	形狀變數法	洪峰法
gamma	$\eta=2.493, \lambda=0.218$	$\eta=5.528, \lambda=0.647$
beta	$\alpha=1.660, \beta=5.303$	$\alpha=4.611, \beta=22.150$
lognormal	$\mu_{\ln(x)}=2.269, \sigma_{\ln(x)}=0.581$	$\mu_{\ln(x)}=2.135, \sigma_{\ln(x)}=0.435$
Gumbel	$\alpha=8.183, \beta=5.651$	$\alpha=7, \beta=3.070$
Weiubll	$\alpha=12.777, \gamma=1.618$	$\alpha=8.547, \gamma=2.525$

表 3 模擬洪水歷線和實測洪水歷線之相關係數比較表

機率分佈	參數推估方式	颱風				
		愛美	黛拉	亞力士	賀伯	安珀
gamma	形狀變數法	0.93	0.77	0.86	0.82	0.83
	洪峰法	0.94	0.83	0.92	0.90	0.93
beta	形狀變數法	0.88	0.71	0.75	0.91	0.75
	洪峰法	0.91	0.82	0.90	0.94	0.92
lognormal	形狀變數法	0.94	0.87	0.92	0.78	0.91
	洪峰法	0.94	0.88	0.94	0.88	0.95
Gumbel	形狀變數法	0.93	0.75	0.85	0.76	0.84
	洪峰法	0.94	0.82	0.94	0.85	0.94
Weibull	形狀變數法	0.88	0.74	0.80	0.91	0.78
	洪峰法	0.89	0.79	0.87	0.94	0.89

表 4 模擬洪水歷線和實測洪水歷線之均方根誤差比較表

機率分佈	參數推估方式	颱風				
		愛美	黛拉	亞力士	賀伯	安珀
gamma	形狀變數法	68.89	41.42	28.75	389.86	98.52
	洪峰法	66.15	39.06	27.79	384.87	58.64
beta	形狀變數法	125.61	46.67	37.70	112.12	116.91
	洪峰法	112.12	41.13	31.00	265.34	65.38
lognormal	形狀變數法	75.58	29.45	19.35	460.93	69.39
	洪峰法	68.38	29.40	21.27	410.89	41.98
Gumbel	形狀變數法	80.83	43.71	27.31	490.34	98.28
	洪峰法	65.45	39.47	80.83	459.15	52.29
Weibull	形狀變數法	120.37	44.20	33.79	253.22	111.50
	洪峰法	123.04	46.68	36.09	301.62	83.70

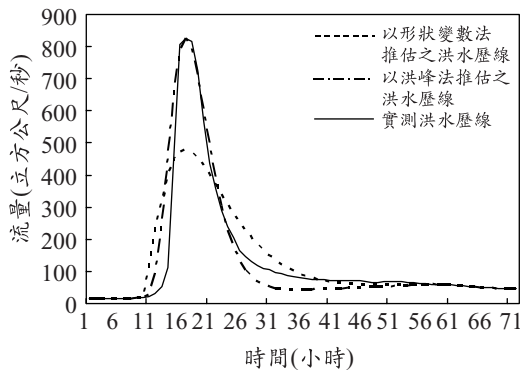


圖 6 安珀颱風以 gamma 機率密度函數在不同參數推估方式下推估之模擬洪水歷線與實測洪水歷線之比較

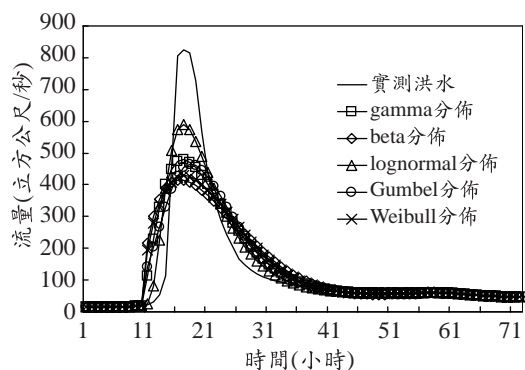


圖 7 安珀颱風以形狀變數法推估參數在不同機率密度函數下推估之模擬洪水歷線與實測洪水歷線之比較

表 5 模擬洪水歷線和實測洪水歷線之總洪水體積誤差百分比比較表 單位：%

機率分佈	參數推估方式	颱風				
		愛美	黛拉	亞力士	賀伯	安珀
實測洪水	$V$ (cms.hr)	19120.9	3660.6	5533.0	63555.7	9587.3
gamma	形狀變數法	-0.41	-0.77	-0.21	-0.39	1.79
	洪峰法	-0.30	0.08	0.00	-0.08	0.00
beta	形狀變數法	0.00	-1.83	-0.49	-0.06	-0.34
	洪峰法	0.00	-0.02	0.00	-0.06	0.00
lognormal	形狀變數法	-0.65	0.01	-0.34	-0.63	-0.19
	洪峰法	-1.03	0.21	-0.02	-0.25	0.00
Gumbel	形狀變數法	-0.67	-2.44	-1.46	-0.73	-1.46
	洪峰法	-0.99	-0.65	-0.17	-1.04	-0.01
Weibull	形狀變數法	-0.06	-1.35	-0.36	-0.04	-0.32
	洪峰法	0.00	-0.68	-0.07	0.00	-0.02

表 6 模擬洪水歷線和實測洪水歷線之洪峰量誤差百分比比較表 單位：%

機率分佈	參數推估方式	颱風				
		愛美	黛拉	亞力士	賀伯	安珀
實測洪水	$Q_p$ (cms)	1580.0	466.0	349.0	4540.0	825.0
gamma	形狀變數法	-3.18	-45.00	-39.03	-24.00	-42.02
	洪峰法	-0.16	0.00	-0.43	0.00	0.00
beta	形狀變數法	-14.35	-50.15	-47.85	-32.07	-49.75
	洪峰法	-0.02	0.00	0.00	-0.07	0.00
lognormal	形狀變數法	5.74	-34.87	-25.62	-18.21	-28.40
	洪峰法	-0.34	0.00	0.26	0.02	0.10
Gumbel	形狀變數法	7.31	-50.15	-41.40	-14.91	-43.75
	洪峰法	-0.11	0.02	0.06	0.00	0.62
Weibull	形狀變數法	-10.51	-48.37	-44.36	-29.16	-48.07
	洪峰法	0.11	0.02	0.09	0.00	0.02

間之差異有限。表 5 及表 6 為五種機率密度函數以不同參數推估方式比較其總洪水體積和洪峰量的誤差百分比，結果可知兩種參數推估方式所得之模擬總洪水體積均非常接近實測值，但洪峰量的推估則以洪峰法推估參數的值較接近實際值，以形狀變數法推估參數所得之模擬洪峰量則有甚大的差異。由表 3~表 6 的分析結果可知以洪峰法推估參數所得之模擬洪水歷線較以形狀變數法推估參數更接近實測洪水歷線。

為進一步瞭解何種分佈較佳，本文以加權分數排名表示，在同一場颱風中檢定指標值最佳之機率密度函數為 5 分，最差為 1 分，分別針對四

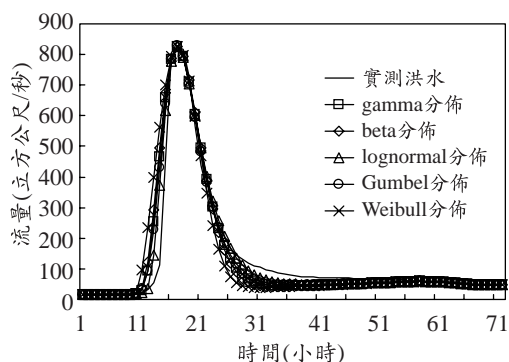


圖 8 安珀颱風以洪峰法推估參數在不同機率密度函數下推估之模擬洪水歷線與實測洪水歷線之比較

表 7 以形狀變數法推估參數之最適當分佈加權分數排名表

檢定指標	颱風	分佈				
		gamma	beta	log-normal	Gumbel	Weibull
相關係數	愛美	4	2	5	4	1
	黛拉	4	1	5	3	2
	亞力士	4	1	5	3	2
	賀伯	3	5	2	1	4
	安珀	3	1	5	4	2
均方根誤差	愛美	5	1	4	3	2
	黛拉	4	1	5	3	2
	亞力士	4	1	5	3	2
	賀伯	3	4	2	1	5
	安珀	3	1	5	4	2
總洪水體積誤差百分比	愛美	3	5	1	2	4
	黛拉	4	2	5	1	3
	亞力士	5	2	3	1	4
	賀伯	3	4	2	1	5
	安珀	1	3	5	2	4
洪峰量誤差百分比	愛美	5	1	4	3	2
	黛拉	4	2	5	2	3
	亞力士	4	1	5	3	2
	賀伯	3	1	4	5	2
	安珀	4	1	5	3	2
平均		3.60	2.40	4.05	2.85	2.40
排名		2	4	1	3	4

種檢定指標及五場颱風逐一評定，而後將累計之評分予以平均，以分數最高者為最佳分佈。以表 3~表 6 分析結果為依據，形狀變數法推估參數最適合的分佈排名如表 7 所示，可知最適合的分佈為 lognormal 分佈，其次為 gamma 分佈；表 8 為以洪峰法推估參數最適合的分佈排名，其最適合的分佈為 gamma 分佈，其次為 lognormal 分佈。

依據前述四種檢定指標及加權分數排名結果，gamma 分佈配合以洪峰法推估參數為推求洪水歷線最適合的機率密度函數。圖 2~6 為五場颱風之實測洪水歷線與 gamma 分佈模擬所得模擬洪水歷線分別以不同參數推估方式之比較，很明顯的看出，以洪峰法推估參數的歷線較接近於實測洪水歷線。因此本文建議可以 gamma 分佈之機率密度函數，配合以洪峰法推估參數來模擬桶頭(2)流量站之洪水歷線。

表 8 以洪峰法推估參數之最適當分佈加權分數排名表

檢定指標	颱風	分佈				
		gamma	beta	log-normal	Gumbel	Weibull
相關係數	愛美	5	2	5	5	1
	黛拉	4	3	5	3	1
	亞力士	3	2	5	5	1
	賀伯	3	5	2	1	4
	安珀	3	2	5	4	1
均方根誤差	愛美	5	2	3	4	1
	黛拉	4	2	5	3	1
	亞力士	3	2	5	4	1
	賀伯	3	4	2	1	5
	安珀	3	2	5	4	1
總洪水體積誤差百分比	愛美	3	5	1	2	4
	黛拉	4	5	3	2	1
	亞力士	5	5	3	1	2
	賀伯	3	4	2	1	5
	安珀	5	4	3	2	1
洪峰量誤差百分比	愛美	2	5	1	4	4
	黛拉	5	5	5	2	2
	亞力士	1	5	2	4	3
	賀伯	4	1	2	5	4
	安珀	5	5	2	1	3
平均		3.70	3.10	3.35	2.65	2.65
排名		1	3	2	4	4

## 七、結論與建議

經以濁水河流域桶頭(2)流量站之實測洪水歷線探討以機率密度函數模擬洪水歷線的適用性，在經過五種不同機率密度函數及兩種不同參數推估方式的檢驗後，可獲得以下結論。

1. 具明顯單峰之洪水歷線可以利用機率密度函數來模擬。
2. 以濁水河流域桶頭(2)流量站為例，經由五種機率密度函數(gamma, beta, lognormal, Gumbel, Weibull)和兩種參數推估方式(形狀變數法、洪峰法)測試五場颱風模擬洪水歷線，發現參數推估方式對歷線形狀的影響遠較機率密度函數的種類來的大。

3. 以濁水溪流域桶頭(2)流量站為例，經由不同機率密度函數及參數推估方式測試五場颱風，結果顯示以洪峰法推估參數所得到的洪水歷線比以形狀變數法推估的更接近實測洪水歷線。
4. 以洪峰法推估參數，在五種分佈中以 gamma 分佈推估之模擬洪水歷線之相關係數較大、均方根誤差較小，總洪水體積與洪峰量最為接近實測洪水歷線，因此本文建議以 gamma 分佈之機率密度函數配合以洪峰法推估參數來模擬桶頭(2)流量站之洪水歷線。

本文以機率密度函數模擬單峰洪水歷線，可將原本屬於離散形式的洪水歷線紀錄方式改為連續形式的函數紀錄方式，不僅紀錄洪水歷線的方式較為簡捷，且可進行後續的研究工作，例如多峰洪水歷線模擬之研究等。另外配合洪水事件之多變數分佈，進行洪水歷線頻率分析可以得到不同回歸期之洪水歷線，在工程設計上即可得到具統計特性且較方便計算的設計洪水歷線。

## 誌 謝

本研究部分研究經費承國科會經費補助(NSC-92-2211-E-032-006)，特此表示謝忱。

## 參考文獻

- 李光敦、王如意，1995，無因次地貌瞬時單位歷線之研究，台灣水利，第 43 卷，第 4 期，第 1-8 頁。
- 王如意、王鵬瑞、謝龍生，1996，地貌型瞬時單位歷線通式演繹及其應用，台灣水利，第 44 卷，第 2 期，第 24-46 頁。
- 楊銘賢、李光敦，1998，逕流運行時間分佈對運動波-地貌瞬時單位歷線影響之初步研究，台灣水利，第 46 卷，第 4 期，第 76-89 頁。
- 王如意、陳展榮、王鵬瑞，2000，河川網路寬度函數之地貌型瞬時單位歷線模式，農業工程學報，第 46 卷，第 4 期，第 1-19 頁。
- Aron, G., and White, E., 1982, Fitting a gamma distribution over a synthetic unit hydrograph, *Water Resources Bulletin*, 18(1), 95-98.
- Bhunya, P. K., Mishra, S. K., and Berndtsson, R., 2003, Simplified two-parameter gamma distribution for derivation of synthetic unit hydrograph, *Journal of Hydrologic Engineering*, 8(4), 226-230.
- Castillo, E. 1988, *Extreme Value Theory in Engineering*, Academic Press. Inc., San Diego.
- Ciepielowski, A., 1987, Statistical methods of determining typical winter and summer hydrographs for ungauged watersheds, in *Flood Hydrology*, V. P. Singh (ed.), 117-124.
- Croley II, T. E., 1980, Gamma synthetic hydrographs, *Journal of Hydrology*, 47, 41-52.
- Goel, N. K., Seth, S. M., and Chandra, S., 1998, Multivariate modeling of flood flow, *Journal of Hydraulic Engineering*, 124(2), 146-155.
- Haktanir, T., and Sezen, N., 1990, Suitability of two-parameter gamma and three-parameter beta distributions as synthetic unit hydrographs in Anatolia, *Journal of Hydrological Sciences*, 35(2), 167-184.
- Singh, V. P., 1992, *Elementary Hydrology*, Prentice Hall Inc., New Jersey.
- Shahin, M., Van Oorschot, H. J. L., De Lange, S. J., 1993, *Statistical Analysis in Water Resources Engineering*, A. A. Balkema, Rotterdam.
- Yue, S., Ouarda, T. B. M. J., Bobee, B., Legendre, P., and Bruneau, P., 1999, The Gumbel mixed model for flood frequency analysis, *Journal of Hydrology*, 226, 88-100.
- Yue, S., Ouarda, T. B. M. J., Bobee, B., Legendre P., and Bruneau P., 2002, Approach for describing statistical properties of flood hydrograph, *Journal of Hydrologic Engineering*, 7(2), 147-153.

收稿日期：民國 93 年 1 月 12 日  
 修正日期：民國 93 年 3 月 1 日  
 接受日期：民國 93 年 3 月 5 日