

## 有限深度土層內經隔板非受壓流之探討

### Investigation on an Unconfined Flow through a Sheetpile in Stratum with Finite Depth

淡江大學水資源及環境工程學系

施 清 吉

Ching-chi Shih

#### 摘 要

飽和含水土層上方為一定水位  $h$  之蓄水，其下之滲流流經土層內的隔板後，形成一二維非受壓流。假設隔板之下游自由面為水平，但其深度  $d$  未定，利用 Schwarz-Christoffel 轉換函數求其「解」；未知變數甚多，但只決定於隔板深度  $s$  與土層厚度  $D$  間之比值  $s/D$ ，以及另一比值  $h/D$ 。研究結果顯示自由面位於隔板末端之下方，且其「解」係由非反正切函數所組成；另無因次單位寬度流量有極大值。

**關鍵詞：**非受壓流，地下水，Schwarz-Christoffel 轉換函數。

#### ABSTRACT

A constant depth  $h$  of storage of water above a saturated stratum resulted in a seepage, and through the sheetpile in the stratum a two dimensional unconfined flow was formed. It was assumed that the free surface downstream of the sheetpile was horizontal with an unknown depth  $d$ , and the Schwarz-Christoffel transformation was utilized to obtain the solution. In the analysis a lot of unknown variables were involved, however all were dependent of the ratio between the sheetpile depth  $s$  and the stratum thickness  $D$ , and the other ratio  $h/D$ . Results indicated that the free surface was under the tip of the sheetpile and the solution consisted mainly with functions exclusive of the arc tangent. It was further shown that the dimensionless discharge per unit width is with a maximum.

**Keywords:** Unconfined flow, Groundwater, Schwarz-Christoffel transformation.

## 一、前言

傳統水資源開發的項目頗多，其中之一為埤塘或池塘。通常是在地勢較低窪，容易積水或長年有水的地方，四周圍一道土堤蓄水，有時候也為了實際上的需求挖掘出來。池塘的功能除了提供用水及灌溉作物外，尚可補助地下水、滯洪等，這些功能的考量均與流量有關。本研究探討的題目極類似上述的池塘，其底為一不透水層，但四周改為隔板(sheetpile)，同時以二維取代軸對稱，以便分析。除供特種情況之用途外，本文以學術之基礎研究為主。類似問題之探討也常見於相關的期刊論文(Mkhitarian, 1953; Nelson-Skornyakov, 1949; Voshchinin, 1939)。

俄國學者在這一領域的貢獻相當大，大部份的研究成果收集於 Theory of Groundwater Movement (作者為 P. YA. Polubarinova-Kochina)，但是非常偏重於應用數學。雖然仍沿用前人研究成果，可是有兩點很值得一提。一是因問題的特殊及自由面假設為未知的水平線，故構建轉換函數(Transformation)或映射(Mapping)完全迥異於前人所用的配置：此問題屬於非受壓流(Unconfined flow)，很類似渠流，故甚多分析的著眼點是基於後者。

## 二、理論分析

如圖 1(a)所示之二維滲流(Two dimensional seepage)，自左向右流，經一隔板，其與土層頂之交界分別為 B 與 D'，兩點均為座標軸零點，y 軸向上，水平座標軸 x 與土層頂吻合。土層厚度為 D，底為一不透水層，其上為一飽和含水層，滲透係數(Permeability)為 k。隔板深入土層，其末端深度為 s，如圖 1(a)之 C 點所示。隔板左邊之水位為 h，位於土層上方，而右邊的自由面位於土層內，其與隔板之交界點為 D，深度 d 為未知，假設此自由面為水平。受重力影響，水首先自其與左邊土層之交界向下流，但受阻於底層，折向右流，經隔板，流入右邊土層，形成一非受壓流(Unconfined flow)。假設土層內之流動為勢能流或勢位流(Potential flow)，定義速度勢能函數

(Velocity potential function)  $\phi$  為

$$\phi = -k \left( \frac{p}{\gamma} + y \right) = -kh_p \quad \dots\dots\dots(1)$$

式中， $\gamma$  為水之單位體積重， $p$  為孔隙壓(Pore pressure)， $h_p$  為儀壓頭(Piezometric head)(Harr, 1962)。另，水平速度  $u$  與垂直速度  $v$  可分別由式(1)求得，即

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -k \frac{\partial h_p}{\partial x} \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -k \frac{\partial h_p}{\partial y} \quad \dots\dots\dots(3)$$

配合連續方程式(Continuity equation)，由式(1)、式(2)與式(3)可得

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

式(4)為土層內非受壓流之控制方程式。以複變函數處理， $\phi$  相當於 Solution plane  $w$  之實數部份，另虛數部份為流函數(Stream function)，即  $w(z) = \phi + i\psi$ ；而圖 1(a)為 physical plane， $z = x + iy$ 。式(4)之邊界條件為沿  $A_\infty B$ ， $\phi = -kh$ ；沿  $BCD$ ， $\psi = 0$ ；沿  $DE_\infty$ ， $\phi = kd$ ；延不透水層  $A_\infty FE_\infty$ ， $\psi = -q$ 。如果土層厚度  $D$  與隔板深度  $s$  為已知，則其「解」與流經隔板底下間隙之流量  $q$ ，可利用保角映射(Conformal mapping)，層層轉換構建而得。

### (一) z-plane 與 t-plane 間之轉換

示於圖 1(a)，z-plane 之圖形邊界係利用 Schwarz-Christoffel 轉換映射到 t-plane 的實數軸，如圖 1(b)所示， $CBA_\infty FE_\infty DC$ ，其在 t-plane 之位置分別設於  $t = -\infty, -\sigma_1, -1, 0, +1, +\sigma_2$  與  $+\infty$ ，土層內部轉換到 t-plane 之下半平面，其間的轉換函數為(Brown and Churchill, 2003)

$$z = M_1 \int_0^t \frac{d\tau}{(1-\tau^2)\sqrt{(\sigma_1+\tau)(\sigma_2-\tau)}} + N_1 \quad \dots\dots\dots(5)$$

式中， $M_1$  為未定 Scale factor， $N_1$  為未定常數，兩者可為複數或實數； $\sigma_1$  與  $\sigma_2$  為未定實常數，

均大於 1。式(5)可直接積分求得。首先，分別針對  $(1-\tau)^{-1}$  與  $(1+\tau)^{-1}$  求其對應的部份分數，而後再分別更改其積分變數，即令  $\mu=(1-\tau)^{-1}$  與  $\nu=(1+\tau)^{-1}$ ，其結果有兩種形式，分別為 (Gradshteyn and Ryzhik, 1994)

$$z = M_1 \left\{ \frac{1}{2\sqrt{(\sigma_2-1)(\sigma_1+1)}} \sin^{-1} \left[ \frac{-2(\sigma_2-1)(\sigma_1+1) - 2 + \sigma_2 - \sigma_1}{1-\tau} \right] \right. \\ \left. - \frac{i}{2\sqrt{(\sigma_1-1)(\sigma_2+1)}} \sin^{-1} \left[ \frac{-2(\sigma_1-1)(\sigma_2+1) - 2 - \sigma_2 + \sigma_1}{1+\tau} \right] \right\} + N_1 \dots (6)$$

與

$$z = M_1 \left\{ \frac{1}{2\sqrt{(\sigma_2-1)(\sigma_1+1)}} \log \left[ \sqrt{-1 + \frac{2-\sigma_2+\sigma_1}{1-\tau} + \frac{(\sigma_2-1)(\sigma_1+1)}{(1-\tau)^2}} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sqrt{(\sigma_2-1)(\sigma_1+1)}}{1-\tau} + \frac{2-\sigma_2+\sigma_1}{2\sqrt{(\sigma_2-1)(\sigma_1+1)}} \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{2\sqrt{(\sigma_1-1)(\sigma_2+1)}} \log \left[ \sqrt{-1 + \frac{2+\sigma_2-\sigma_1}{1+\tau} + \frac{(\sigma_1-1)(\sigma_2+1)}{(1+\tau)^2}} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sqrt{(\sigma_1-1)(\sigma_2+1)}}{1+\tau} + \frac{2+\sigma_2-\sigma_1}{2\sqrt{(\sigma_1-1)(\sigma_2+1)}} \right] \right\} + N_1 \dots (7)$$

式(6)與式(7)之組成分別以反正弦(Arc sine)與對數為主。反正弦的定義域介於 -1 與 +1 之間 (包括等號)；若引數值(Argument)超出定義域，就須改採用式(7)。不過由式(6)計算而得的值恆為

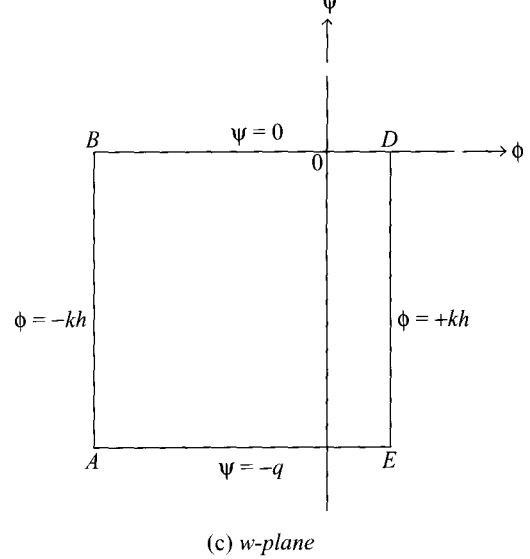
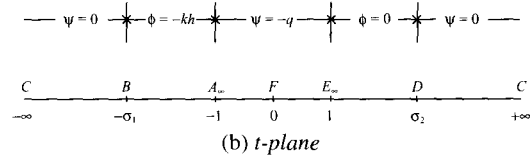
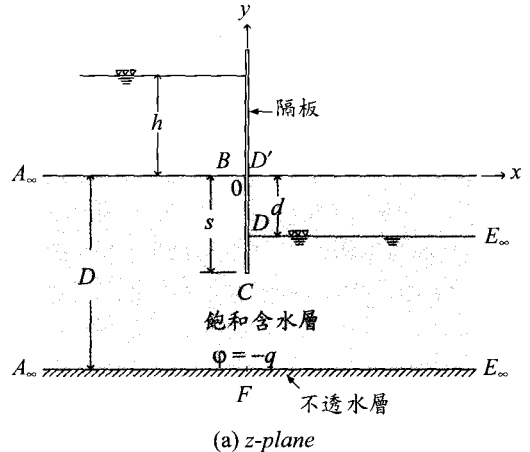


圖 1 問題示意圖

虛數。相反地，由式(7)計算而得的值視引數值大於 0 或小於 0 而定；若大於 0，則其結果為實數，小於 0 則改為複數。

圖 1(a)、圖 1(b)、式(6)與式(7)之已知數為  $h$ 、 $D$  與  $s$ ，而未知數計有： $M_1$ 、 $N_1$ 、 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  與  $q$ ，部份未知數可利用某些特殊點在兩平面之位置求得。首先，引用 F 點，其位置為  $z = -iD$ ， $t = 0$ 。

由式(5)得知

$$N_1 = -iD \quad \dots\dots\dots(8)$$

其次，引用位於  $z=0$ ， $t=-\sigma_1$  之 B 點，由式(5)可求得

$$N_1 = M_1 \int_{-\sigma_1}^0 \frac{d\tau}{(1-\tau^2)\sqrt{(\sigma_1+\tau)(\sigma_2-\tau)}} \quad \dots\dots(9)$$

式(9)代入式(5)，則式(5)簡化為

$$z = M_1 \int_{-\sigma_1}^t \frac{d\tau}{(1-\tau^2)\sqrt{(\sigma_1+\tau)(\sigma_2-\tau)}} \quad \dots\dots(10)$$

式(10)與式(5)之差異為下限由 0 改為  $-\sigma_1$ ，且可消掉  $N_1$ 。接著再引用 C 點， $z=-is$ ， $t=\infty$ ，由式(6)又得知

$$\begin{aligned} -\frac{s}{M_1} &= \frac{1}{2\sqrt{(\sigma_2-1)(\sigma_1+1)}} \sin^{-1} \left[ \frac{-2+\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{(\sigma_1-1)(\sigma_2+1)}} \sin^{-1} \left[ \frac{-2-\sigma_2+\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2} \right] \\ &\quad + \frac{\pi}{4} \left[ \frac{1}{\sqrt{(\sigma_2-1)(\sigma_1+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(\sigma_1-1)(\sigma_2+1)}} \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(11)$$

由於  $\sigma_1 > 1$  與  $\sigma_2 > 1$ ，式(11)等號右邊反正弦之引數值介於  $-1$  與  $+1$  之間。所以， $M_1$  為實數，但是仍為未知數，其值必須由式(8)與式(9)求得。然而，若式(9)的積分結果採用式(6)，因上下限改為 0 與  $-\sigma_1$ ，故可不計  $N_1$ ，但  $\tau=-\sigma_1$  時，則式(6)第二個反正弦之引數值就會超出定義域，故必須改使用式(7)。參閱式(8)與式(9)，引用式(7)，上下限仍然分別為 0 與  $-\sigma_1$ （不計  $N_1$ ），積分結果包含實數部份  $D_R$  與虛數部份  $D_I$ ，即

$$-iD = M_1 D_R + iM_1 D_I \quad \dots\dots\dots(12)$$

式中，

$$D_R = \frac{1}{2\sqrt{(\sigma_2-1)(\sigma_1+1)}} \times$$

$$\left\{ \text{Log} \left[ \sqrt{\sigma_1\sigma_2} + \sqrt{(\sigma_2-1)(\sigma_1+1)} + \frac{2-\sigma_2+\sigma_1}{2\sqrt{(\sigma_2-1)(\sigma_1+1)}} \right] \right.$$

$$\left. - \text{Log} \left[ \frac{\sqrt{(\sigma_2-1)(\sigma_1+1)}}{1+\sigma_1} + \frac{2-\sigma_2+\sigma_1}{2\sqrt{(\sigma_2-1)(\sigma_1+1)}} \right] \right\}$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{(\sigma_1-1)(\sigma_2+1)}} \times$$

$$\left\{ \text{Log} \left[ \sqrt{\sigma_1\sigma_2} + \sqrt{(\sigma_1-1)(\sigma_2+1)} + \frac{2+\sigma_2-\sigma_1}{2\sqrt{(\sigma_1-1)(\sigma_2+1)}} \right] \right.$$

$$\left. - \ln \left[ \frac{\sqrt{(\sigma_1-1)(\sigma_2+1)}}{1-\sigma_1} + \frac{2+\sigma_2-\sigma_1}{2\sqrt{(\sigma_2-1)(\sigma_1+1)}} \right] \right\} \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$D_I = \frac{1}{2\sqrt{(\sigma_1-1)(\sigma_2+1)}} \theta \quad \dots\dots\dots(14)$$

式(13)等號右邊共包括四項。前三項採用主對數 *Log*，主幅角  $\Theta$  (Principal argument) 均為 0，故這三項均為大於 0 之實數。但第四項因對數內的引數值小於 0，故採用實數對數 *ln*，其幅角  $\theta$  併入虛數部份如式(14)所示。 $\theta$  為多值函數，即  $\theta = (2n+1)\pi$ ， $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。式(12)等號左邊只有虛數部份  $-iD$ ，所以

$$D_R = 0 \quad \dots\dots\dots(15)$$

另外，由於虛數部份為小於 0，且  $D$  為正實常數，故  $n$  值必須採用  $-1$ ，則  $\theta = -\pi$ ，再由式(14)與式(12)即可得知

$$M_1 = -\frac{2\sqrt{(\sigma_1-1)(\sigma_2+1)} D}{\pi} \quad \dots\dots\dots(16)$$

隔板末端 C 點為奇異點 (Singular point)，其處  $\frac{dw}{dz} = \infty$  (Polubarinova-Kochina, 1962; Vallentine, 1959)。但  $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \frac{dz}{dt}$ ，故  $\frac{dz}{dt} = 0$ ，由式(5)可得

$$\frac{1}{(1-t_c^2)\sqrt{(\sigma_1+t_c)(\sigma_2-t_c)}} = 0 \quad \dots\dots\dots(17)$$

式中， $t_c > \sigma_2$ ，但為未知數；可由式(6)求得，即

$$-\frac{d}{M_1} = \frac{1}{2\sqrt{(\sigma_2-1)(\sigma_1+1)}} \times$$

$$\left\{ \sin^{-1} \left[ \frac{-2(\sigma_2 - 1)(\sigma_1 + 1) - 2 + \sigma_2 - \sigma_1}{1 - t_c} \frac{1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right] + \frac{\pi}{2} \right\} \\ - \frac{1}{2\sqrt{(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 + 1)}} \times \\ \left\{ \sin^{-1} \left[ \frac{-2(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 + 1) - 2 - \sigma_2 + \sigma_1}{1 + t_c} \frac{1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right] - \frac{\pi}{2} \right\} \\ \dots\dots\dots(18)$$

總之，由 z-plane 轉換到 t-plane，其間的主要輸入為 D 與 s 兩值，未知數計有：M<sub>1</sub>、N<sub>1</sub>、σ<sub>1</sub>、σ<sub>2</sub>、d 與 t<sub>c</sub>，其中 N<sub>1</sub> = -iD 如式(8)所示；其餘五個未知數 M<sub>1</sub>、σ<sub>1</sub>、σ<sub>2</sub>、d 與 t<sub>c</sub> 可由五個方程式解得，即式(11)及由式(15)至式(18)。但是，流經隔板底下間隙之流量 q 仍有待由另一映射求得。

(二) t-plane 與 w-plane 間之轉換

參閱圖 1(b)與圖 1(c)，後者為 w-plane，即為 solution plane，w = φ + iψ。仍然利用 Schwarz-Christoffel 轉換，將 t-plane 之實數軸及其下半面影射到 w-plane 之長方形 A<sub>∞</sub>BDE<sub>∞</sub>，其間之轉換函數為

$$w = M_2 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau + \sigma_1)(\tau + 1)(\tau - 1)(\tau - \sigma_2)}} + N_2 \\ \dots\dots\dots(19)$$

式中，M<sub>2</sub> 與 N<sub>2</sub> 為兩平面間之未知 Scale factor 與未知常數。等號右邊的積分稱為第一類橢圓積分(Elliptic integral of the first kind)，利用兩次更改積分變數，式(19)可簡化為另一常用的 Legendre 型(其值可查表或利用數值方法求得)，即

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau + \sigma_1)(\tau + 1)(\tau - 1)(\tau - \sigma_2)}} \\ = \int_0^{\theta} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \eta}} = \mu F(m, \sin^{-1} \theta) \dots\dots\dots(20)$$

式中，θ 與 m 分別稱為 Integral angle 與 Integral modulus，且 m < 1，兩值都視積分上下限所座落之區間而定，另外

$$\mu = \frac{2}{\sqrt{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)}} \dots\dots\dots(21)$$

由於 σ<sub>1</sub> > 1 與 σ<sub>2</sub> > 1，故 μ 值恆大於 0，且與式(19)之上下限無關。式(19)之被積分函數(Integrand)包含四個根號，均出現於分母，有四個零點(zeros)，即 -σ<sub>1</sub>、-1、1 與 σ<sub>2</sub>。故 t-plane 的實數軸共分成五個區間，t = -∞ 至 -σ<sub>1</sub>、t = -σ<sub>1</sub> 至 -1、t = -1 至 +1、t = +1 至 +σ<sub>2</sub> 與 t = +σ<sub>2</sub> 至 +∞。積分係採用實數運算，上下限必須落於同一區間。通常上下限中有一個是零點，則另一個就落於該零點與其鄰近零點的區間內。若上下限均為零點，則 θ = π/2，式(20)簡化為第一類完全橢圓積分，並以 K(m) 取代 F(m, sin<sup>-1</sup> θ)。下限與上限之安排必須順乎 t-plane 實數軸之指向，由左而右；否則，須對調上限與下限，所得之積分值須乘以 -1。在此限制下的同時，根號內的值必須大於 0；若小於 0，則分母須乘以 √-1，使其根號內的值由小於 0 轉為大於 0，以便實數運算。但是，分母乘以 √-1，卻相當於積分值乘上 -i，其值由實數變為虛數。最後，若積分上下限不落於同一區間，還須分區間積分(Byrd and Friedmann, 1971)。

如前節所述，若土層厚度 D 與隔板深度 s 的兩值為已知，則由相關式可求得 d、σ<sub>1</sub> 與 σ<sub>2</sub> 等值。因此，示於式(19)之另兩個未知數，M<sub>2</sub> 與 N<sub>2</sub>，其值就可利用在兩平面(t-plane 與 w-plane)之特殊位置求得。引用式(19)與式(20)於 D 點及 B 點，其位置分別為 w = kd，t = σ<sub>2</sub> 與 w = -kh，t = -σ<sub>1</sub>，即可求得

$$\frac{M_2}{kD} = -\frac{\frac{h}{D} + \frac{d}{D}}{R + L} \dots\dots\dots(22)$$

$$\frac{N_2}{kD} = -\frac{\frac{h}{D}R - \frac{d}{D}L}{R + L} - i \frac{C\left(\frac{h}{D} + \frac{d}{D}\right)}{R + L} \dots\dots\dots(23)$$

式中

$$R = \mu F \left[ \sqrt{\frac{2(\sigma_2 + \sigma_1)}{(\sigma_2 + 1)(1 + \sigma_1)}}, \sin^{-1} \sqrt{\frac{\sigma_2 + 1}{2\sigma_2}} \right] \dots\dots\dots(24)$$

$$L = \mu F \left[ \sqrt{\frac{2(\sigma_2 + \sigma_1)}{(\sigma_2 + 1)(1 + \sigma_1)}}, \sin^{-1} \sqrt{\frac{1 + \sigma_1}{2\sigma_1}} \right] \dots\dots\dots(25)$$

$$C = \mu K \left[ \sqrt{\frac{(\sigma_2 - 1)(\sigma_1 - 1)}{(\sigma_2 + 1)(1 + \sigma_1)}} \right] \dots\dots\dots(26)$$

而上述三式中的  $\mu$  業已定義於式(21)。參閱式(26)， $K$  為第一類完全橢圓積分， $\theta = \frac{\pi}{2}$ ，

$$K(m) = F\left(m, \frac{\pi}{2}\right)。$$

另外，上述兩點之引用，式(19)

的積分上下限並不在同一區間，必須分區間積分；同時還須對調上下限，以及乘以  $\sqrt{-1}$  使根號內的值由小於 0 變為大於 0。求得了  $M_2$  與  $N_2$  之兩值後，再應用於 E 點，其位置為  $w = -qi$  與  $t=1$ ，由式(19)可得

$$\frac{q}{kD} = \frac{C \left( \frac{h}{D} + \frac{d}{D} \right)}{R + L} \dots\dots\dots(27)$$

### 三、數值方法

本研究探討之二維非受壓流，土層厚度  $D$ 、土層滲透係數  $k$ 、隔板上游水深  $h$  與隔板深度  $s$  等四項為已知；而未知數計有： $M_1$ 、 $N_1$ 、 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $t_c$ 、 $d$ 、 $M_2$ 、 $N_2$  與  $q$ ，後三者來自式(19)，其餘的來自式(5)。除了  $N_1 = -iD$  如式(8)所示外，總共有八個未知數，相關方程式計有：式(11)、式(15)、式(16)、式(17)、式(18)、式(22)、式(23)與式(27)等八式，均為非線性方程式。如果針對上述四項的已知值，求諸未知數的值，則必須以矩陣方式，同時求解八個方程式之根，其程序不但麻煩複雜，而且不易掌握根之所在。本文不採用這種方式，而改採用「反方向」方式，儘可能直接代入計算，分類與整理計算結果。在上述八個未知數當中，以  $\sigma_1$  與  $\sigma_2$  最為關鍵與最為直接。如果  $\sigma_1$  與  $\sigma_2$  的兩值為已知，則數個組合無因次未知數的值可直接代入相關方程式計算而

得，計有  $-\frac{s}{M_1}$ 、 $-\frac{M_1}{D}$ 、 $\frac{M_2}{kD}$ 、 $\frac{N_2}{kD}$  與  $\frac{q}{kD}$ ；

若再配合由式(17)所求得的  $t_c$  值，又可直接代入式(18)求得  $\frac{-d}{M_1}$  的值。這樣算起來好像還有二個

未知數  $\sigma_1$  與  $\sigma_2$ ，但是由於  $s$  並不是未知數，而是已知的，所以實際上只剩下  $\sigma_1$  與  $\sigma_2$  中的一個而已。最後一個未知數的值可由式(15)求得，即  $D_R = 0$ ， $D_R$  定義於式(13)。

定義於式(13)的式(15)只包含兩未知數， $\sigma_1$  與  $\sigma_2$ ，若其中一未知數的值為已知，則必須採用試誤法以求得另一個未知數的值。如果  $\sigma_1 = \sigma_2$ ，則  $D_r$  恆等於 0，計算結果顯示不論  $\sigma_1$  值為若干， $\frac{s}{D}$  恆等於 1。雖然非常準確，真正等於零，但是這就完全失去了意義。因為在最後計算結果之歸類中，有一項是  $\frac{s}{D}$ ，而且這一項是最

主要的影響因素，探討的重點之一，即分析未知數受此項大小的影響。故本文改採用  $D_r \leq 0.001$ ，以取代式(15)。另一道須採用試誤法的方程式為式(17)。如果  $\sigma_1$  與  $\sigma_2$  的兩值為已知，即可由式(17)求得  $t_c$  的值；理論上， $t_c$  必須趨近於無窮大。本研究採用殘餘值為 0.001，而不是 0，但  $t_c$  必須大於  $\sigma_2$ 。

由前兩段的討論即可發現，數值計算只須針對未知數  $\sigma_1$ ，輸入一系列的不同值，就可取得所有未知數或組合未知數的計算結果。總共有十項： $\frac{s}{D}$ 、 $t_c$ 、 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $-\frac{M_1}{D}$ 、 $\frac{d}{D}$ 、 $\frac{M_2}{k}$ 、 $\frac{N_2}{kD}$ 、

$\frac{q}{kD}$  與  $\frac{s}{D}$ ，以  $\frac{s}{D}$  做為各圖的水平座標軸，其幅度為  $0 < \frac{s}{D} \leq 1$ ，其餘的九項分別做為各圖的垂直

座標軸，其結果分別展示於圖 2 至圖 9。另外，圖 7 至圖 9，並以  $\frac{h}{D}$  為參數；參閱式(19)，第一

類橢圓積分以  $F(m, \sin^{-1}\theta)$  表之，呈現於式(24)

至式(26)，其值之求得採用數值計算 (Carlson, 1977; Press 等, 1992; Abramowitz 等, 1972)。 $\sigma_1$  的最小值為 1.01 ( $\sigma_1$  必須大於 1)，間距為 5，最大值為 10001.01。

#### 四、結果與討論

計算結果展示於圖 2 至圖 9，其相關方程式為式(11)、式(15)至式(18)、式(22)、式(23)與式(27)，共有八式，均為非線性，其已知數或自變數為  $s$ 、 $D$  (或  $s/D$ ) 與  $h$ 。一般數值求解非線性聯立方程式的方法，通常是先設定自變數或已知數  $s/D$  的值，再推求因變數或未知數之值，諸如  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\dots$  等共八個；由於係針對自變數而輸入一系列且規則的值，故所獲得之「解」當可均勻地分散於圖上，但其缺點是求解方式過份複雜，甚至不可能找到「解」。本研究改採用「反方向」求解。先設定因變數之值，再求自變數的值，優點是求解方法相當簡單，但是對於自變數 ( $s/D$ ) 的範圍，其缺點為所獲得之「解」會有過分集中或過於分散的情形。環視圖 2 至圖 9 的數據分佈，即可發現絕大部份數據集中於圖之左半邊，而且形成振盪分佈，這個範圍大致座落於自  $s/D=0.08$  至  $0.3$ 。形成振盪之確實原因，據作者之推斷可能來自零點(zeros)的影響。參閱式(5)，其分母共有四個零點(分母等於 0)，計有  $-\sigma_1$ 、 $-1$ 、 $1$  與  $\sigma_2$ 。如果式(5)無法直接積分求得，這表示在零點附近，其積分值可能變成無窮大。而今式(5)可直接積分求得，其結果如式(6)或式(7)所示，即顯示在零點附近，積分值並不趨近於無窮大，但敏感度相當大。數據振盪呈現於  $s/D=0$  之附近，其處正好接近於  $\sigma_2=1$ ，如圖 4 所示。另外，由於這種方式又無法掌握數據之分佈及其變化，因此輸入計算之數據個數往往為前述頭一種方式的數十倍或更多。圖 2 與圖 9 的水平座標軸均為  $s/D$ ，其座落範圍為自  $s/D=0.08$  至  $0.99$ 。若要使  $s/D$  的值更接近 0，則須再提高  $\sigma_1$  的輸入值，目前  $\sigma_1$  的最大值已高達 10000 左右。

##### (一) 未知數 $M_1$ 、 $N_1$ 、 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $t_c$ 、 $d$

除了  $N_1$  可直接由式(8)計算而得外，示於式(6)與式(7)的未知數  $M_1$ 、 $\sigma_1$  與  $\sigma_2$  等值，與示於式(18)的自由面深度  $d$  以及對應的  $t_c$  兩值都可由已知的比值  $s/D$  分別利用展示於圖 2 至圖 6 之

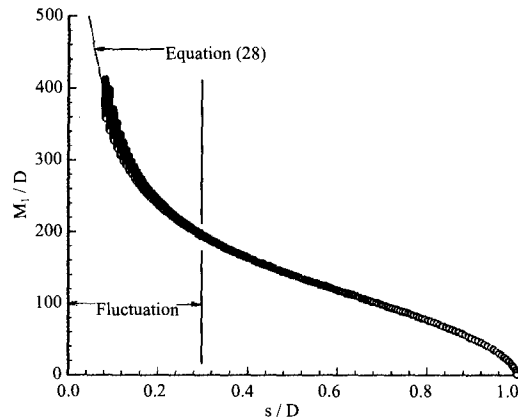


圖 2  $M_1/D$  與比值  $s/D$  關係圖

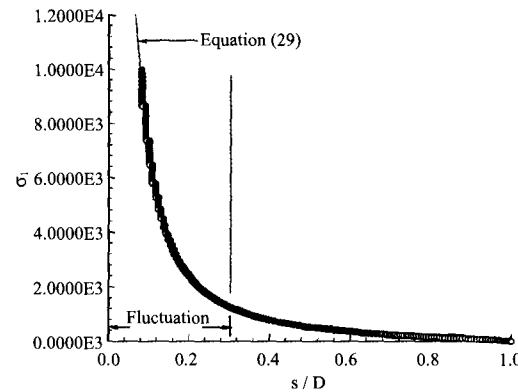


圖 3  $\sigma_1$  與比值  $s/D$  關係圖

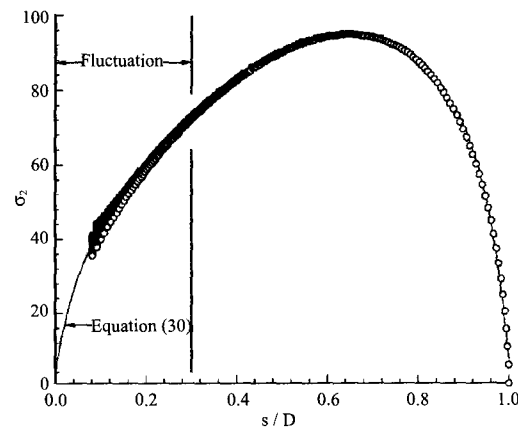


圖 4  $\sigma_2$  與比值  $s/D$  關係圖

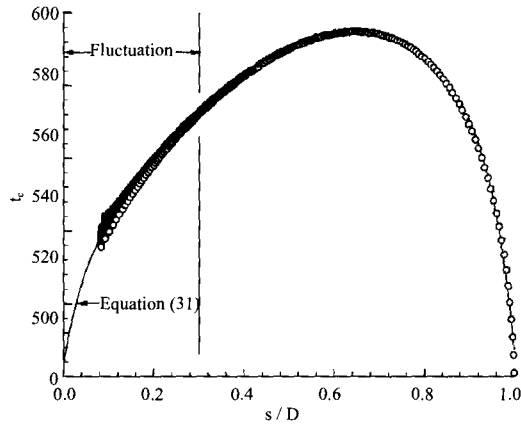


圖 5  $\tau_c$  與比值  $\frac{s}{D}$  關係圖

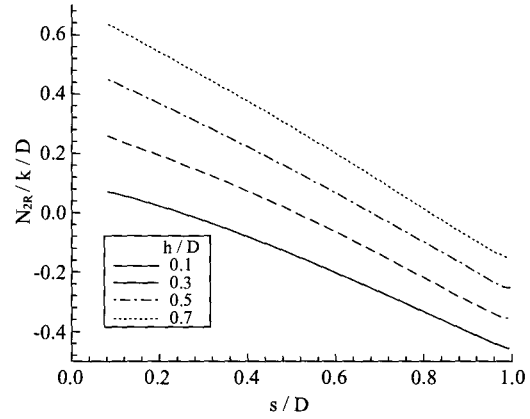


圖 8  $\frac{N_{2R}}{kD}$  與比值  $\frac{s}{D}$  關係圖

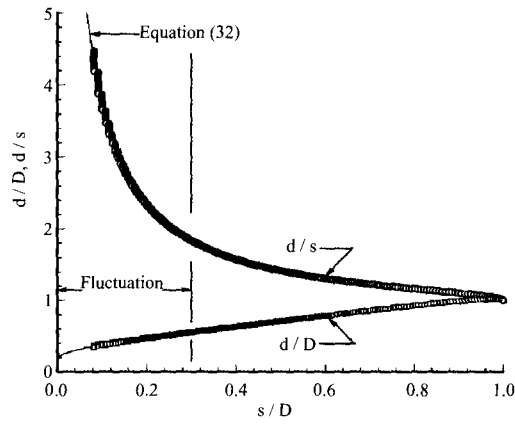


圖 6  $\frac{d}{s}$  及  $\frac{d}{D}$  與比值  $\frac{s}{D}$  關係圖

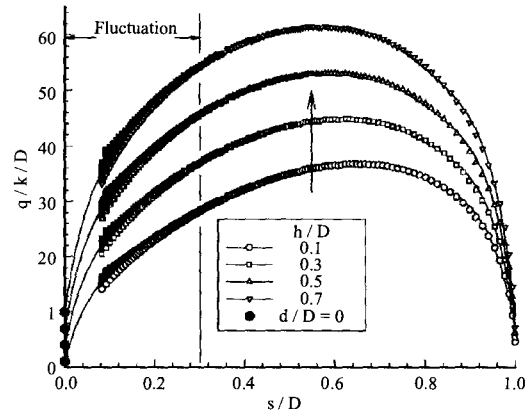


圖 9 無因次流量  $\frac{q}{kD}$  與比值  $\frac{s}{D}$  關係圖

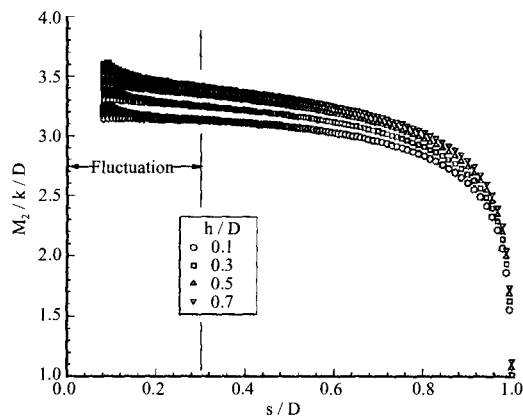


圖 7  $\frac{M_2}{kD}$  與比值  $\frac{s}{D}$  關係圖

數據分佈求得，或分別利用相關的迴歸式計算而得，即

$$\begin{aligned}
 -\frac{M_1}{D} = & 727.5455 - 6573.985\left(\frac{s}{D}\right) + 39411.74\left(\frac{s}{D}\right)^2 \\
 & - 140593.9\left(\frac{s}{D}\right)^3 + 303699.5\left(\frac{s}{D}\right)^4 \\
 & - 398648.4\left(\frac{s}{D}\right)^5 + 306904.7\left(\frac{s}{D}\right)^6 \\
 & - 125113.0\left(\frac{s}{D}\right)^7 + 201904.2\left(\frac{s}{D}\right)^8 \dots\dots\dots (28)
 \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = 38399.07 - 652234.4\left(\frac{s}{D}\right) + 5161043.0\left(\frac{s}{D}\right)^2$$



$$\begin{aligned}
& -22956211\left(\frac{s}{D}\right)^3 + 61264560\left(\frac{s}{D}\right)^4 \\
& -99805659\left(\frac{s}{D}\right)^5 + 96950839\left(\frac{s}{D}\right)^6 \\
& -51490064\left(\frac{s}{D}\right)^7 + 11489524\left(\frac{s}{D}\right)^8 \dots\dots\dots(29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_2 = & 3.681672 + 741.7915\left(\frac{s}{D}\right) - 6039.180\left(\frac{s}{D}\right)^2 \\
& + 34267.38\left(\frac{s}{D}\right)^3 - 114763.8\left(\frac{s}{D}\right)^4 \\
& + 227627.2\left(\frac{s}{D}\right)^5 - 263051.1\left(\frac{s}{D}\right)^6 \\
& + 163268.2\left(\frac{s}{D}\right)^7 - 42046.80\left(\frac{s}{D}\right)^8 \dots\dots\dots(30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_c = & 503.6808 + 741.8185\left(\frac{s}{D}\right) - 6039.461\left(\frac{s}{D}\right)^2 \\
& + 34268.88\left(\frac{s}{D}\right)^3 - 114768.4\left(\frac{s}{D}\right)^4 \\
& + 227635.4\left(\frac{s}{D}\right)^5 - 263059.7\left(\frac{s}{D}\right)^6 \\
& + 163273.1\left(\frac{s}{D}\right)^7 - 42047.93\left(\frac{s}{D}\right)^8 \dots\dots\dots(31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{s} = & 10.25873 - 123.8323\left(\frac{s}{D}\right) + 876.2791\left(\frac{s}{D}\right)^2 \\
& - 3654.697\left(\frac{s}{D}\right)^3 + 9342.832\left(\frac{s}{D}\right)^4 \\
& - 14748.96\left(\frac{s}{D}\right)^5 + 13980.64\left(\frac{s}{D}\right)^6 \\
& - 7278.400\left(\frac{s}{D}\right)^7 + 1596.903\left(\frac{s}{D}\right)^8 \dots\dots\dots(32)
\end{aligned}$$

迴歸線均以實線示於圖上，但由於貫穿所有數據，直線都被蓋住了，故未顯現，僅能顯示無數據的部份實線。示於圖 2 至圖 6 之數據分佈可分為兩類。一類是呈現單調遞減趨勢，如圖 2、圖

3 與圖 6，其垂直座標軸分別為  $-\frac{M_1}{D}$ 、 $\sigma_1$  與  $\frac{d}{s}$ ；另一類是先呈遞增走向而後再改為遞減走向，故有極大值，大概落於  $\frac{s}{D}=0.62$  之附近，如圖 4 與

圖 5，其垂直座標軸分別為  $\sigma_2$  與  $\frac{d}{s}$ （及  $\frac{d}{D}$ ）。

圖 2、圖 3 與圖 6 的數據分佈都呈現單調遞減，極小值呈現於比值  $\frac{s}{D}$  等於 1，其時  $-\frac{M_1}{D}$ 、

$\sigma_1$  與  $\frac{d}{s}$  分別趨近於 4、1 與 1。 $\frac{s}{D}$  等於 1 代表隔

板末端已抵觸土層底，其下毫無空隙，滲流完全停止，呈靜止狀態。若  $\frac{s}{D}$  小於 1，即表示土層內

有滲流，則圖 6 顯示自由面位於隔板末端之下方，因  $\frac{d}{s} > 1$ 。這一現象非常類似洩水閘門流，

其下游水面線也是同樣位於閘門末端之下方。固然目前本文探討之土層非受壓流與洩水閘門流

不盡相同，但是兩者的自由面或水面線都是深受流線由垂直改成水平的影響。若閘門下游坡度不

夠陡，或有阻礙物，則閘門後之超臨界流會被下游的次臨界流淹沒，水面線不再位於閘門末端之

下方，而轉為位於末端之上方，但這種轉變並不會發生於土層內之非受壓流，因為其速度相當緩

慢，並無超臨界流與次臨界流之區分。所以隔板下游的自由面位於隔板末端之下方是合理的。圖

2、圖 3 與圖 6 的另一極端為  $\frac{s}{D}$  趨近於 0。首先，式(11)顯示若  $\frac{s}{D}$  趨近於 0，則  $\sigma_1$  將趨近於無

窮大，如圖 3 所示；同時式(16)又顯示，由於  $\sigma_1$  趨近於無窮大，所以  $-\frac{M_1}{T}$  也跟著趨近於無窮

大，如圖 2 所示。另一個同樣也是趨近無窮大的未知數為  $\frac{d}{s}$ ，如圖 6，這是由於  $s$  趨近於 0。如

果自由面深度  $d$  改以土層厚度  $D$  予以無因次化，則  $\frac{d}{D}$  並不趨近於無窮大，參閱圖 6 下方曲線，其極值大致介於 0.1 與 0.2 之間。易言之，無論

隔板深入土層多深，其右之自由面都位於隔板末

端之下方。

如前段所述，若  $\frac{s}{D}$  趨近於 0， $\sigma_1$  將趨近於無窮大，由圖 1(b)得知，B 點將移至 t 平面實數軸之兩端點，即  $t=+\infty$  與  $-\infty$ ，C 點也將因而消失，式(5)的被積函數就可簡為  $1/\left[(1-\tau^2)\sqrt{\sigma_2-\tau}\right]$ 。所

以，從反方面而言，自由面位於隔板末端之下方有兩個意義。首先，配合上述情況，若自由面位於隔板末端之上方，且非常靠近土層頂， $E_{\infty}DC$  之外偏角非常小，幾乎可以 0 計，如圖 1(a)所示，則上述被積函數就可再簡化為  $1/\left[1-\tau^2\right]$ ，其積分結果為一反正切函數。另一個意義，不是就數學觀點而論，而是就實際觀點而言，一旦自由面與土層頂等高，則非受壓流就轉變為受壓流 (Confined flow)。圖 1(a)為非受壓流，含一自由面，若改為受壓流，則隔板右邊就不再自由面，而改為小於上游水深  $h$  的另一下游水深。此時，無論是採用如圖 1(b)的配置方式或其他方式，將 z-plane 的邊界映射到 t-plane 之實數軸，其 Schwarz-Christoffel 轉換都可直接積分求得，其結果包含反正切函數 (Pavlovsky, 1922)。上述的討論可歸成如下的結論：若自由面位於隔板末端之上方，非受壓流可能轉變為受壓流。但是本研究指出自由面位於隔板末端之下方，故非受壓流不可能轉變為受壓流。針對流經土層內隔板之滲流而言，受壓流與非受壓流之差異在於 Schwarz-Christoffel 轉換之積分結果，前者以反正切函數為主，而後者係以非反正切的其他函數所組成。

除了垂直座標軸的不同尺度外，圖 4 與圖 5 的數據分佈是完全吻合的，這是在意料中。 $t_c$  值並不像  $\sigma_2$  一般，同樣都是由式(15)利用試誤法求得，實際上  $t_c$  值是根據先求得的  $\sigma_2$  值，而後再由式(17)求得。圖 4 與圖 5 顯示  $\sigma_2$  與  $t_c$  都有極大值，其位置大致落於  $\frac{s}{D}$  等於 0.62 之附近。另外，流況趨近於靜止時 (相當於  $\frac{s}{D}$  趨近於 1)，則  $\sigma_2$  同  $\sigma_1$  一樣，也趨近於 1；可是  $\frac{s}{D}$  趨近於 0， $\sigma_2$  卻

趨近於某一固定值 (大約等於 4)，而不是趨近於無窮大。其次，由於  $t_c$  大於  $\sigma_2$ ，所以上述兩種極端情形也同樣呈現於圖 5，即  $t_c$  也分別趨近於另外兩個不同的常數，只不過這兩個常數都大於 500，後者視式(17)的殘餘值而定，本文設定為 0.001。

## (二) 未知數 $M_2$ 、 $N_2$ 與 $q$

自 t 平面映射到 w 平面的轉換函數示於式 (19)，其未知數為  $M_2$  與  $N_2$ ，另一可由式(19)計算而得的相關未知數為單位寬度流量  $q$ 。諸未知數之值均視  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $h/D$  與  $s/D$  而定。計算結果展示於圖 7 至圖 9，水平座標軸均為  $s/D$ ，垂直座標軸均為無因次未知數，另以  $h/D$  為參數，採用四個比值： $h/D=0.1$ 、 $0.3$ 、 $0.5$  與  $0.7$ 。

參閱圖 7，無論參數  $\frac{h}{D}$  的值為若干，不同參數值的數據分佈都呈現相同的變化趨勢，均為單調遞減，但是遞減速率不一。隨著  $s/D$  值的增加， $\frac{M_2}{kD}$  值首先緩慢地遞減，且速率愈來愈慢，直到  $\frac{s}{D}$  接近 1， $\frac{M_2}{kD}$  才改為急劇下降，且重疊成幾乎為垂直走向。 $\frac{s}{D}$  等於 1 時， $\frac{M_2}{kD}$  大約等於 1。由於本文所收集的數據，其  $\frac{s}{D}$  都大於 0.08；故在  $\frac{s}{D}=0$  之附近，數據之確實分佈無法得知。不過，介於  $\frac{s}{D}=0.08$  與 0.3 間的數據分佈顯示，若  $\frac{s}{D}$  趨近於 0， $\frac{M_2}{kD}$  似乎並不如圖 2 與圖 3 一般，趨近於無窮大。

未知數  $N_2$  為一複數。實數部份  $\frac{N_{2R}}{kD}$  與虛數部份  $\frac{N_{2I}}{kD}$  ( $=\frac{q}{kD}$ ) 分別示於圖 8 與圖 9。如前所述，展示於圖 2 至圖 9 的計算結果，並不是直接輸入兩已知值， $s$  與  $D$ ，再由相關的方程式「解」得諸未知數的值；而是改用「反方向」方式，輸

入一系列的 $\sigma_1$ 值,先由相關的方程式直接計算諸未知數的值,最後再收集及分類,並展示各未知數與已知數間之關係。檢視圖2至圖9,即可發現除了圖8外,其餘的圖都顯示介於 $\frac{s}{D}=0.08$ 與0.3之數據分佈都稍微振盪。是否因為採用「反方向」方式才造成數據振盪?以及為何只有 $N_2$ 的實數部份不呈現振盪,其餘的都出現振盪呢?到目前為止,這些疑問都不得而知。本研究曾嘗試使用直接方式,輸入兩已知值, $s$ 與 $D$ ,採用試誤法「解」聯立方程式之根(未知數)。但因方程式及其導數都相當複雜,而且未知數的個數又太多,最後只好放棄。圖8的數據分佈頗類似圖7,都是呈現單調遞減;但是除了上述的差異外,還有兩點不同。一是示於圖8的數據分佈幾乎趨近線性遞減;二是 $\frac{N_2 R}{kD}$ 不一定大於0;但 $\frac{M_2}{kD}$ 一定大於0。

圖1(c)的E點位於 $w=kd-iq$ ,由此得知 $N_2$ 的虛數部份應為無因次流量 $\frac{q}{kD}$ ,因 $M_2$ 為實數,這正符合類似問題的分析結果。無因次流量 $\frac{q}{kD}$ 與無因次隔板深度 $\frac{s}{D}$ 及無因次有效水頭 $\frac{h}{D}$ 間的關係展示於圖9,後者為參數,不同的圖型符號代表不同的 $\frac{h}{D}$ 值( $\frac{h}{D}=0.1、0.3、0.5、0.7$ ),其對應的迴歸式均以實線表之,其與垂直座標軸分別交於 $\frac{q}{kD}=1.073478、4.037058、7.000621$ 與9.964169,均代表隔板深度等於0的無因次流量,如實心圓所示。圖9顯示不同圖型符號之數據分佈都呈現相同的變化趨勢,且都有一個極大值,其位置大致都座落於 $\frac{s}{D}=0.6$ 的附近。增加有效水頭,流量跟著增加,故圖9顯示 $\frac{h}{D}$ 值增加,數據往上移,如粗箭頭所示。滲流停止即相當於 $\frac{s}{D}=1$ ,所以 $\frac{s}{D}$ 趨近1時,不同圖型符號之數據統統趨近於 $\frac{q}{kD}=0$ ,如圖9所示。其次,

由於非受壓流類似渠流,兩者都含有自由面,同時圖1(a)的配置又類似洩水閘門流;因此,示於圖九之數據分佈呈現極大值之由來可利用洩水閘門流量公式予以說明。如果收縮係數 $C_c$ 視為常數(實際上,其值視閘門間隙 $a$ 與上游比能之比值而定,但變化幅度很小),且上游水位 $H_1$ 保持不變,則單位寬度流量 $q=C_c\sqrt{1+\left(\frac{a}{H_1}\right)^2}C_c \times a\sqrt{2gH_1}$  (Subramanya, 1997)。以示圖1(a)之非受壓流而言,由上述流量公式得知,其流量 $q$ 與間隙 $(1-\frac{s}{D})$ 成正比,同時又與 $\sqrt{1+\left(1-\frac{s}{D}\right)^2}/(h+D) \times C_c$ 成反比,其中 $h+D=$ 常數。故,圖9的數據分佈呈現極大值是合理的。

## 五、結論

1. 飽和含水土層內流經一隔板之非受壓流,其已知數計有隔板上游水位 $h$ 、含水土層厚 $D$ 、隔板深度 $s$ 與土層滲透係數 $k$ ;而未知數為 $M_1、N_1、\sigma_1、\sigma_2、t_c$ 、自由面深度 $d、M_2、N_2$ 與流量 $q$ , $N_2$ 為複數,其餘的均為實數。
2. 無因次未知數 $\sigma_1、\sigma_2、t_c、\frac{M_1}{D}、\frac{N_1}{D}$ 與 $\frac{d}{D}$ 只受制於無因次已知數 $\frac{s}{D}$ ;但 $\frac{M_2}{kD}、\frac{N_2}{kD}$ 與 $\frac{q}{kD}$ 同時受制於 $\frac{h}{D}$ 。
3. 數據之展示不適宜採用直接方式,輸入已知數之值,再「解」未知數之值;必須改採用「反方向」方式,輸入未知數之值,再直接計算已知變數之值,最後藉由分類、收集與整理,以展示已知數與未知數間的關係。
4. 數據計算採用「反方向」方式之優點為方便,可掌握根之所在,缺點為介乎 $\frac{s}{D}=0$ 與0.3(大約)之數據分佈略呈振盪現象。
5. 以流經一隔板之滲流而言,受壓流與非受壓流之主要差異在於自 $z$ 平面映射到 $t$ 平面之函數

- 型式(積分結果),前者由反正切函數所組成,而後者係由非反正切函數之其他型式函數所組成。
6. 隔板之下游自由面位於隔板末端之下方,這正符合洩水閘門後之自由面位於閘門末端之下方。
  7. 無因次流量  $\frac{q}{kD}$  與無因次隔板深度  $\frac{s}{D}$  間的關係式有極大值。
  7. Mkhitarian, A. M., "Computations for the Seepage through an Earth Dam with a Sheetpile and Drain", *Inzhenernii Sbornik*, vol.15,1953.
  8. Nelson-Skornyakov, F. B., "Seepage in Homogeneous Media", Gosudarctvennoe Izd. Sovetskaya Nauka, Moscow, 1949.
  9. Pavlovsky, N. N., *Theory of Groundwater Flow under Hydraulic Structures and its Basic Applications*, Petrograd, 1922.
  10. Polubarinova-Kochina, P. Ya. *Theory of Ground Water Movement*, translated from the Russian by J. M. Roger Dewiest, Princeton University Press, Princeton, N. J., pp.120-121, 1962.
  11. Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P., *Numerical Recipes in Fortran*, 2nd ed., Cambridge University Press, pp.254-263, 1992.
  12. Subramanya, K., *Flow in Open Channels*, 2nd ed., Tata McGraw-Hill Pub. Co. Limited., New Delhi, pp.360-361, 1997.
  13. Vallentine, H. R., *Applied Hydrodynamics*, Butterworth & Co. (publishers) Limited, London, pp.172-177, 1959.
  14. Voshchinin, A. P., "Flow of Ground Water in the body and Base of an Homogeneous Earth Dam with an Horizontal Underdrain with a Finite Depth of Permeable Material", *DAN*, vol.25, no.9, 1939.

### 謝 誌

本研究承蒙淡江大學水資源及環境工程學系蔡哲慧小姐多方面協助,在此致上深厚謝意。

### 參考文獻

1. Abramowitz, Milton and Stegun, Iren A., *Handbook of Mathematical Functions*, 9th ed., Dover Publications, Inc., New York, pp.587-626, 1972.
2. Brown, J. W. and Churchill, R. V., *Complex Variables and Applications*, 7th ed., McGraw-Hill, Inc., pp.393-396, 2003.
3. Byrd, P. F. and Friedmann, M. D. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, pp.98-134, 1971.
4. Carlson, B. C., "Elliptic Integrals of the First Kind", *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 8, No.2, pp. 231-242, 1977.
5. Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M., *Table of Integrals, Series, and Products*, 5th ed., Academic Press, New York, p.89, 1994.
6. Harr, M. E., *Groundwater and Seepage*, McGraw-Hill, Inc., pp.15-16, 1962.

收稿日期：民國 92 年 12 月 8 日

修正日期：民國 93 年 1 月 8 日

接受日期：民國 93 年 1 月 13 日