農業工程學報　第 50 卷第 1 期
中華民國 93 年 3 月出版

Journal of Chinese Agricultural Engineering
Vol. 50, No. 1, March 2004

專　論

水庫線性標的規劃模式與其對偶模式－網絡解釋

A Linear Goal Programming Model and Its Dual for Reservoir Planning – Network Interpretations

國立台灣大學生物環境系統工程學系教授

劉 佳 明

Chia-Ming Liu

摘　要

本文藉簡單案例說明水庫線性標的規劃模式與其對偶模式，並以位勢與流量網絡分別解釋這一對原、偶模式，位勢網絡呈現水庫供需運轉的歷程，流量網絡則展示水庫接受替代服務的價格條件。

標的規劃模式考慮水庫的蓄洪、供水與貯水三類服務功能，各時期各功能的收益是其供應量的片段線性函數，供應量在最小值與標的值之間的收益線性增加，之後維持定值不變。因此上述各項服務都有一對需求參數(標的值與最小值)，它們衡量水庫各功能項的需求程度或服務水準，而且分別就是模式一對限制式的右端常數。在水庫維持模式最佳方案的情況下，任一需求參數變動時，水庫收益隨之變動，其單位參數的收益變動率就是該參數的(影子)價格，這些價格組成一個方案，也就是對偶模式所求：水庫同業在提供替代服務時，爲使收益最高，如何決定能爲水庫所接受的需求參數價格方案。

原、偶模式的這一對位勢與流量網絡，其節點與管線配置相同，但是變數(位勢或流量)與變數關係式則不同，分別對應於原、偶模式的變數與限制條件。透過這一對網絡自然生動的觀點，可以全面而又深入的了解與掌握原、偶模式的基本結構，這與傳統模式近乎黑箱的作業方式有相當的區別，因此，它們是探討水庫運轉機制、分析需求參數影子價格、處理模式資料結構與演算法的理想工具。

關鍵詞：水庫運轉，水庫規劃，線性規劃，標的規劃，網絡規劃，凸規劃。

ABSTRACT

Both potential network model for reservoir planning and its dual flow network model for sensitivity analysis are explained in their network contexts with simple examples. The primal model concerns reservoir capacity analysis and operations planning. The three functional services of the reservoir considered are: reserved space for flood control, water supply, and pooling of water. The reservoir is operated to meet minimum demands for each service item in each period. The profit for each service item is a piecewise linear function of its supply. It is linearly increased with the supply between the minimum demand and the goal, but remains constant for any supply more than the goal. The total profit from all services is to be maximized.

The dual model is for analyzing the shadow prices of functional goals and minimum demands in each period. It is constructed from the viewpoint of a purchaser who proposes the trade for all the services. This is possible only when the purchaser convinces the reservoir management of the trade that causes no decrease in the profit and these convincing terms constitute the constraints of the dual model. The objective function of the purchaser is to minimize the total cost of purchasing the services.

Keywords: Reservoir operations, Reservoir planning, Goal programming, Linear programming, Network programming.

一、前　言

本文介紹多功能水庫的線性標的規劃模式(劉佳明, 1993)，考慮水庫的三類功能：(1)蓄洪：水面與庫頂之間，未蓄水的備用空間，提供滯洪或出水高等需求容積，(2)供水：水庫對外界供應的水量，提供農業、工業與民生等用水，(3)貯水：水面與庫底之間，貯存庫內的水量，提供航運、遊憩、生態等非消耗性使用，緊急時亦可移作供水。參考圖 1，說明詳後。

水庫規劃問題常以線性規劃模式分析(劉佳明, 1976; 胡文章, 1977)，因爲它的程式普遍，取得容易。上述水庫標的模式與對偶模式(Liu, 1987)雖然也都是線性模式，但是前者能以位勢網絡呈現水庫運轉的歷程，後者則以流量網絡展示水庫接受同業各項替代服務的價格條件。這一對模式的網絡解釋，自然生動，有別於一般模式的黑箱處理方式。何況根據模式網絡結構所撰寫的程式，其演算效率常比一般單純形法高出千百倍，問題越大倍數越多。所以這一對原、偶模式是分析水庫規劃問題的理想工具。

二、規劃案例與方案可行性

本文假定水庫各時期各功能的收益是供應量的片段線性函數，供應量不得小於最小值，在最小值與標的值之間收益線性增加，在標的值之上則維持定值不變(劉佳明, 1987; 1993)。

參考圖 2，根據上述假設，各時期各功能都有四個已知數：(1)**標的值**，供應量有收益的上限值，超過部分無收益，(2)**最小值**，需求的下限値，供應量不能小於這個值，(3)**單價**，在最小值與標的值之間，每一單位供應量的收益，(4)**標的收益**，供應量在標的值時的收益。

表 1 是一個簡化的規劃**案例**資料。本文藉符號來區分已知數與未知數，二者分別以小寫羅馬字與其它字(大寫羅馬字或希臘字)表示。各符號下標 t 表示時期，t=1, 2, …, n，n 爲總期數，並設參變數的周期皆爲 n，即 $x_{n+t} = x_t$。

已知數的符號爲：水庫單位容量建造營運成本 c_0，進水量 q_t，蓄洪、供水與貯水等服務參數分別爲：(1)標的值 f_t, y_t, l_t，(2)最小值 $\underline{f}_t, \underline{y}_t, \underline{l}_t$，(3)單價 b_t, c_t, a_t，(4)標的收益 v_t, w_t, u_t，其中各服務項目的一對標的值與最小值稱爲各該服務的**需求參數**，代表該項服務的需求程度或供應水準。

本文考慮的變數有二組：主變數與差額變數。其中差額變數留待探討目標函數時解釋。主變數再分爲二類：(1)**狀態變數**，包括庫頂容積(水庫容量)S_v、庫底容積 S_o 及 t 時期初水面容積(蓄水量)S_t。這些容積都由一基準面起算，本文設 $S_o = 0$，即以呆水位爲基準，因此，$S_v - S_o = S_v$ 水庫容量，貯水量 $S_t - S_o = S_t$ 蓄水量；(2)**供應變數**，各項服務的供應量(見圖 1)，能以狀態變數表

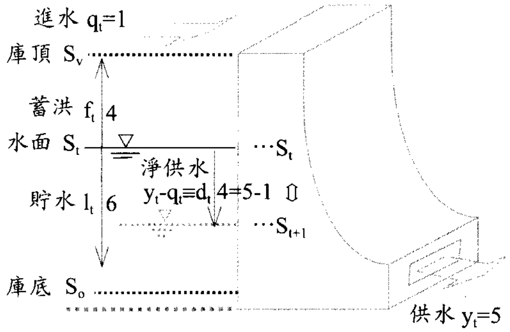


圖 1　水庫功能示意圖(案例　時期 t=1)

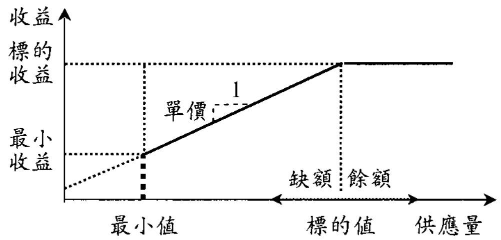


圖 2　片段線性收益函數

示：蓄洪量 $F_t \equiv S_v - S_t$、供水量 $Y_t = S_t - S_{t+1} + q_t$、貯水量 $L_t \equiv S_t - S_o$。其中，蓄洪與貯水二式是定義；供水式，導自水庫水量收支平衡關係式 $S_t + q_t - Y_t = S_{t+1}$，式中供水量 Y_t 包含需求量與排水量，因期間內水庫出、入水量的累積值有可能超過水庫容量。

本文考慮的水庫規劃問題是「決定變數值(水庫容量、各期蓄水量或各項供應量等)，滿足預定需求，並使淨收益最大」。在建立這個問題的模式之前，先以幾節篇幅說明可行方案、供需關係、位勢網絡與目標函數等觀念。

本節先檢視表 1 案例的一個**解**，即通稱(服務供應計畫)的**方案**，其滿足預定需求者稱爲**可行解**或**可行方案**。方案的變數值可先只設定一部份，其它變數值再由水量收支等式求得，最後還需檢驗供需情況，以確定其滿足最小需求條件。茲設定表 1 案例**方案一**的部分變數值：水庫容積 $S_v = 7$，庫底容積 $S_o = 0$，時期 1 的蓄水量 $S_1 = 6$，供水量 $Y_1 = 3$。以下各段將仔細檢視這個方案，藉以了解水量收支與各類服務供需等條件。

圖 1 是水庫時期 1 各供應量與狀態值關係的示意圖，其中蓄洪與貯水二類供應量都是狀態值的差。先計算並檢驗**時期 1** 二類供應量：蓄洪量 $F_1 = S_v - S_1 = 7 - 6 = 1 \geq \underline{f}_1 = 1$，貯水量 $L_1 = S_1 - S_o = 6 - 0 = 6 \geq \underline{l}_1 = 3$；至於供水量 $Y_1 = 3 \geq \underline{y}_1 = 3$，故本期各項供應量都滿足最小值的需求。

爲了計算**時期 2** 各項供應量，必需先求得本期蓄水量 S_2，因此利用前期的水量收支式，由前期初蓄水量 S_1 與前期供水量 Y_1 等已知數推求其期末蓄水量：$S_2 = S_1 - Y_1 + q_1 = 6 + 1 - 3 = 4$。

既得時期 2 期初蓄水量 S_2，可計算並檢驗同期蓄洪量 $F_2 = S_v - S_2 = 7 - 4 = 3 \geq \underline{f}_2 = 2$ 與貯水量 $L_2 = S_2 - S_o = 4 - 0 = 4 \geq \underline{l}_2 = 1$。至於供水量 Y_2，則利用時期 2 的水量收支式，以期初蓄水 S_2 與期末蓄水 $S_3 (= S_1)$ 等已知量推求其值，並檢驗其下限條件：$Y_2 = S_2 - S_3 + q_2 = 4 - 6 + 7 = 5 \geq \underline{y}_2 = 1$。

表 1　水庫規劃案例資料表

服務功能	服務參數	時期	
		1	2
蓄洪	標的值 f_t	4	6
	最小值 $\underline{f}_t$	1	2
	單價 b_t	2	3
	標的收益 v_t	10	20
供水	標的值 y_t	5	2
	最小值 $\underline{y}_t$	3	1
	單價 c_t	1	2
	標的收益 w_t	10	10
貯水	標的值 l_t	6	3
	最小值 $\underline{l}_t$	3	1
	單價 a_t	3	3
	標的收益 u_t	20	10
*淨供水	標的值 $d_t \equiv y_t - q_t$	4	-5
	最小值 $\underline{d}_t \equiv \underline{y}_t - q_t$	2	-6
水庫	進水量 q_t	1	7
	單位容量(建造營運)成本		c_0　6
附註	*淨供水標的值與最小值是各該參數值與進水量的差值，見表 3。		

表 2 詳列方案一的檢驗過程，首先以水量收支式求未知量：時期 1 期末蓄水量與時期 2 供水量；然後以各項供應-狀態式計算供應量並檢驗下限條件。

表 2　方案一與其下限條件檢驗

方案已知	水庫容積 $S_v=7$	時期 1 蓄水量 $S_1=6$	
	庫底容積 $S_o=0$	時期 1 供水量 $Y_1=3$	
收支式解	時期 2 蓄水量	$S_2=S_1-Y_1+q_1=6+1-3=(4)$	
	時期 2 供水量	$Y_2=S_2-S_3+q_2=4-6+7=(5)$	
資料	$q_1=1, q_2=7$	$S_1=6, Y_1=3$	$S_2=(4), Y_2=(5)$
項目	供應式與下限式	時期 1	時期 2
蓄洪	$F_t(\equiv S_v-S_t)\geq \underline{f}_t$	$1(=7-6)\geq 1$	$3=(7-4)\geq 2$
供水	$Y_t(=S_t-S_{t+1}+q_t)\geq \underline{y}_t$	$3(=6-4+1)\geq 3$	$5=4-6+7\geq 1$
貯水	$L_t(\equiv S_t-S_o)\geq \underline{l}_t$	$6(=6-0)\geq 3$	$4=(4)-0\geq 1$
淨供水	$D_t(\equiv Y_t-q_t=S_t-S_{t+1})$ $\geq \underline{d}_t(\equiv \underline{y}_t-q_t)$	$2(=3-1=6-4)$ $\geq 2(=3-1)$	$-2(=5-7=4-6)$ $\geq -6(=1-7)$
附註	供水 $Y_t\geq \underline{y}_t \rightarrow$ 淨供水 $D_t\equiv Y_t-q_t\geq \underline{d}_t\equiv \underline{y}_t-q_t$(表 3)		

表 3　淨供水參變數定義與方案一各數淨值

項目		定義	時期 1	時期 2
淨供水	供應量	$D_t\equiv Y_t-q_t$	2	-2
	標的值	$d_t\equiv y_t-q_t$	4	-5
	最小值	$\underline{d}_t\equiv \underline{y}_t-q_t$	2	-6
附註	淨供水參變數值= 參變數- 進水量			
	淨供水下限式 $D_t\geq \underline{d}_t$ 代替原 $Y_t\geq \underline{y}_t$			

三、供應-狀態式與位勢網絡

將時期 t 的水收支式 $S_t- Y_t+ q_t = S_{t+1}$ 改寫：

出入水量差 $= Y_t- q_t= S_t- S_{t+1} =$ 蓄水量差

又定左端(出入水量差)為 **淨供水量** $D_t\equiv Y_t- q_t$ 則收支式化為 $D_t= S_t- S_{t+1}$，即 淨供水量= 蓄水量差，這與另二類供應量的形式相同，右端都是狀態變數的差值。將三類**供應-狀態式**並列：

(1) 蓄洪量 $F_t\equiv$ 水庫容量 S_v- 蓄水量 S_t

(2) 淨供水量 $D_t=$ 期初蓄水量 S_t

－ 期末蓄水量 S_{t+1}

(3) 貯水量 $L_t\equiv$ 時期蓄水量 S_t

－ 庫底蓄水量 S_o。

上列各式中 t= 1, 2, …, n，參考圖 1。供水與進水二箭號可合成一個淨供水箭號。在表 3 中仿淨供水量的定義，將**淨供水**標的值與最小值定為各該值減進水量，因此下限式 $Y_t\geq \underline{y}_t$ 化為 $D_t\geq \underline{d}_t$；至於淨供水標的值關係式見第六節。

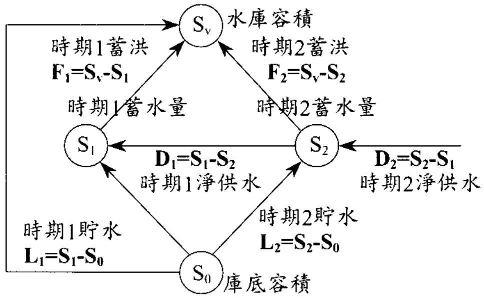


圖 3　水庫位勢網絡（供應－位勢關係）

圖 3 網絡圖表示案例水庫的庫頂、庫底與各時期水面的歷程，這是水庫運轉過程的位勢網絡示意圖(劉佳明, 1993; 1997)，每一狀態變數在圖中都有它對應的節點，故以變數標註節點，並作為節點名稱。

假定考慮期間內並無沉陷與淤積現象，則庫頂與庫底不變，對應容積不變；而水面則隨時間變動，故水面容積隨時間變動。網絡圖中，庫頂與庫底各只對應一個節點，S_v 與 S_o；期初水面各時期不同，故對應節點有 n 個，$S_1, S_2, \ldots, S_n$。

由節點 S_x 通向節點 S_y 的管線以 $S_x\rightarrow S_y$ 表示。t 時期初水面節點 S_t, t=1, 2, …, n 與上、右、下三方鄰近節點(庫頂 S_v、t+1 時期初水面 S_{t+1}、庫底 S_o)各有管線相連，且各有對應的供應量：

(1) 蓄洪：$S_t\rightarrow S_v \leftrightarrow F_t\equiv S_v- S_t$，

(2) 供水：$S_{t+1}\rightarrow S_t \leftrightarrow D_t= S_t- S_{t+1}$，

(3) 貯水：$S_o\rightarrow S_t \leftrightarrow L_t\equiv S_t- S_o$。

標的模式的三類供應-狀態關係，經以淨供水 D_t 取代供水 Y_t，形式趨於一致，故得以藉位勢網絡具體呈現水庫的運轉歷程，明顯優於傳統水庫模式的黑箱作業方式。

位勢網絡元素(節點與管線)各有對應值：**節點值(狀態變數**值)與**管線值(供應變數**值)。因此，從位勢網絡的觀點，供應-狀態關係是網絡元素值(管線值與二端節點值)之間的關係：

管線值 ＝ 前端節點值 － 後端節點值。

上述網絡節點值(對應的狀態變數值)通稱為**位勢(Potential)**，對應網絡稱為**位勢網絡**，故水庫標的模式亦稱為**水庫位勢網絡模式**。圖 4 位勢網絡完整呈現上節表 2 所列舉方案一的計

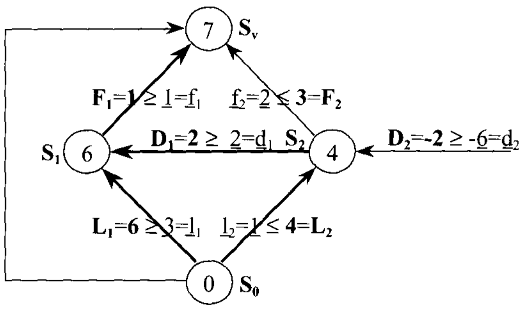


圖 4　案例方案一位勢網絡圖（S_v=7, S_1=6, Y_1=3）

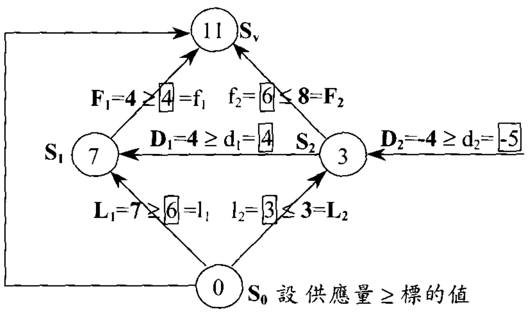


圖 5　案例方案二位勢網絡圖（需求量=標的值）

算檢驗內容，在其節點圈內標註狀態變數值，管線上標註對應服務項的供需下限式：供應量≥最小值，此外網絡圖上亦可標註其它條件或成本收益等數值。

若將所有需求設定爲標的值，可求得供應量皆不小於標的值的**方案二**(圖 5)，所採類似網絡**最短路徑**(Dantzig, 1963)的解法是「以管線標的值當作二端點的距離，求庫底至各端點的**最長路徑**距離作爲端點的狀態值，後由管線二端點狀態值求得供應值，則其值皆不小於標的值，形成一個全無缺額的可行方案」。需求的設定有無限可能，若管線端點的距離設定爲部份標的值，部分最小值，並以上述方法求解，則另有對應可行方案。至於圖 4 方案一，則是另一種設定方式。不同演算法需要不同方案當作初始解，藉以啓動迭代步驟，尋求最佳方案(劉佳明, 1993; 胡明哲, 2000)。

因爲網絡圖具體生動的呈現水庫運轉的過程，故以下各節將藉以探討標的模式與其對偶模式各元素(參數、變數、限制式與目標函數)在水庫操作或成本分析上的意義。下節將先探討模式的目標函數，因爲方案的優劣必需利用它來衡量。

四、片段線性目標函數

水庫各時期各功能的服務都有它的收益，圖 2 顯示其中一項服務的片段線性收益函數，供應量不能小於最小值，在最小值與標的值之間，其單價爲一定數值，大於標的值時單價爲 0。標的收益已在第一節中定義，**最小收益**是供應量爲最小值時的收益，因爲收益線延伸不一定會通過原點，標的與最小收益並不是標的值或最小值與單價的乘積。二收益的關係如下：

標的收益 ＝ 最小收益−單價(標的值-最小值)

在計算片段線性收益函數值時，需要引進供應量與分界值(標的值)的二個**差額變數**，**缺額**與**餘額**，以表示不同情況下的供應量：

供應量=標的值+ **餘額** (供應量≥標的值)，
標的值− **缺額** (供應量≤標的值)，

在最佳解時，上列**供需標的式**可簡化爲單純線性形式：

供應量= 標的值+ 餘額− 缺額

最佳解供應量與標的值有上列關係是基於最佳解的一個必要條件：各項供應量的餘額與缺額至少有一個是 0，證明詳見本節後段。根據此式，圖 2 中片段線性收益函數可分段累計：

收益= 最小收益+
單價·[(標的值- 缺額)- 最小值]+ 0·餘額=
[最小收益+單價(標的值-最小值)]-單價·缺額

式中最後一列方括號項即標的收益，而且 缺額成本= 單價× 缺額，故

收益= 標的收益− 缺額成本。

式中雖無餘額項但在有餘額時它也適用，因爲最佳解的一個供應項有餘額時必無缺額，故其缺額成本爲 0，同時因爲餘額的單價爲 0，故其餘額收益也是 0，不管餘額數量多少，根據上式，有餘額時收益恆爲標的收益。

每項服務都有類似上列的收益與成本關係

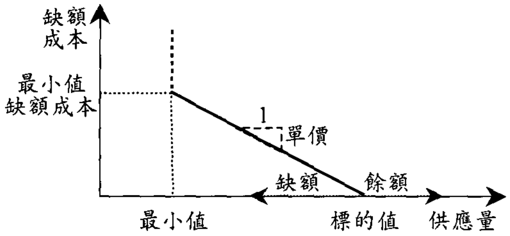


圖 6　片段線性成本函數

表 4　案例方案一缺餘額與成本收益計算表

供需差額*		時期 1	時期 2
蓄洪 F_t- f_t		1- 4=-3(缺額)	3- 6=-3(缺額)
供水 Y_t- y_t		3- 5=-2(缺額)	5- 2=+3(餘額)
貯水 L_t- l_t		6- 6=0	4- 3=+1(餘額)
淨供水 D_t- d_t		2-4=-2(缺額)	-2-(-5)=+3(餘額)
總成本	建營	單位容量成本×容量=6×7= 42	
	缺額	∑缺額×單價=2×3+3×3+1×2= 17	
	方案	建造營運成本+總缺額成本= 59	
總收益	標的	10+ 20+ 10+ 10+ 20+ 10= 80	
	毛額	總標的收益-總缺額成本=80-17= 63	
	淨額	總收益-建造營運成本= 63-42= 21	
附註		*差額=供應量-標的值= 餘額-缺額	

式，因此，從收益函數(圖 2)可導出對應的缺額成本函數 (圖 6)。上述收益與成本二函數在最小值與標的值之間的**單價**其實是同一數值，但在不同情況下分別稱爲收益單價或缺額單價。合計水庫各項收益與成本可得：

總淨收益= 總供應收益− 建造營運成本
= (總標的收益− 總缺額成本)− 建造營運成本
= 總標的收益− 總成本

式中

總成本=建造營運成本＋總缺額成本

因爲總淨收益與總成本的和是常數(總標的收益)，所以模式採「總淨收益求極大值」或「總成本求極小值」，其最佳解並無相同。故水庫標的模式將採用上列**總成本**作爲**目標函數**。

表 4 詳列方案一成本與收益的計算過程。前面將片段線性成本函數簡化爲單純線性的形式是根據「最佳解各項供應量的缺額與餘額至少有

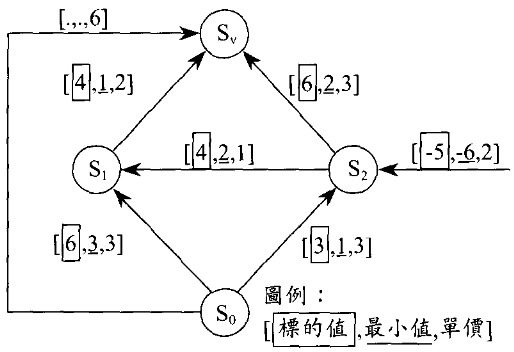


圖 7　案例規劃資料位勢網絡

一個爲零」的條件，以下證明此條件。

假設最佳解某項服務的缺額與餘額皆不爲 0，可將缺、餘額同減這二數中的小者，此時其差額(=餘額−缺額=供應量−標的值)維持原值，而缺額與餘額之中有一個化爲零，同時二數額都減少，所以缺額成本減少。既爲最佳解，成本又可減少，這構成矛盾，因此假設錯誤，反證最佳解各供應量的缺、餘額都至少有一個爲零。故利用所證最佳解特性，將模式從片段線性簡化爲單純線性的變換，並不影響模式求解。至於不讓供應量低於最小值的要求，是直接將它列入限制式條件之中而不藉收益函數的單價設計來達成。

一般而言，若可行區是凸集合，則片段線性的凸成本函數(斜率隨變數的增加而增加)可以簡化爲單純線性的形式(Dantzig, 1963)。標的模式是凸可行區與凸成本函數(其標的值二側斜率爲：-單價與 0)，故符合可以簡化的條件。

五、供需情勢與其位勢網絡

第三節介紹狀態-供應式與供需下限式，並將它們標示在網絡圖上；本節預備將上節所介紹的供需標的式也一併標示在網絡圖管線上。其實，針對不同的需要，可以將不同的資料標示在網絡圖上，例如，圖 7 (規劃資料位勢網絡)將案例各功能的三個資料標註在對應管線旁的方括號內，[標的值, 最小值, 單價]，二需求參數分別以加框或加底線表示(劉佳明, 1997)。

以上各節探討過供應量與狀態值、標的值、最小值三個參變數的關係，列出如下：

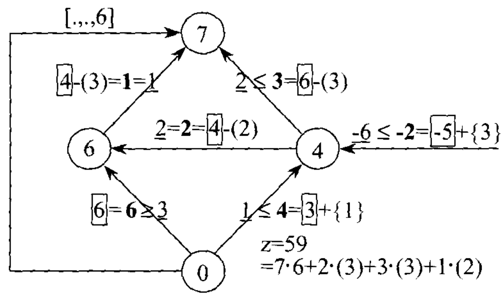


圖 8　案例方案一供需位勢網絡

(1) **狀態式** 供應量與**狀態值**關係，

供應量=前端節點狀態值−後端節點狀態值：

$F_t \equiv S_v - S_t,\ D_t(\equiv Y_t - q_t) = S_t - S_{t+1},\ L_t \equiv S_t - S_o$

(2) **標的式** 供應量與**標的值**關係，

供應量= $\boxed{\text{標的值}}$− 缺額+ 餘額：

$F_t=\boxed{f_t}-\Delta F_t+\nabla F_t,\ D_t=\boxed{d_t}-\Delta D_t+\nabla D_t,\ L_t=\boxed{l_t}-\Delta L_t+\nabla L_t$

(3) **下限式** 供應量與**最小值**關係，

供應量≥ <u>最小值</u>：　$F_t \ge \underline{f}_t,\ D_t \ge \underline{d}_t,\ L_t \ge \underline{l}_t$.

上列狀態式與標的式合稱**供需式**。狀態式(供應-狀態式的簡稱)爲供應量與狀態差值關係；標的式是從供應量與標的值的差額求缺、餘額，藉以計算成本；下限式爲各項供應量的下限條件。

在上列各式探討過程中先後引進二組變數：主變數(狀態值與供應量)與差額變數(缺額與餘額)。在上節之前尙未考慮差額變數與成本，故在網絡圖(圖 3 與圖 4)管線上只顯示供應-狀態式或下限式。現在爲了同時檢驗下限與計算成本，乃在網絡圖(圖 8)上將所有限制式(下限式與標的式)並列，且另附總成本計算式，故稱爲**供需位勢網絡圖**，圖 8 是圖 4 的擴充，它完整的呈現水庫供需運轉歷程。上節的供需**標的式**，在圖中已重組如下：

(1) 供應量= $\boxed{\text{標的值}}$− (缺額)，供應量>標的值，

(2) 供應量= $\boxed{\text{標的值}}$+ {餘額}，供應量<標的值，

(3) 供應量= $\boxed{\text{標的值}}$ 或 ±0，供應量=標的值。

六、水庫線性標的規劃模式

將上節狀態式代入其它二組供需式可以消去供應量變數，代換後的標的與下限二組**供需式**，加上總成本目標函數，組成水庫**線性標的規劃模式**，簡稱**標的模式**。案例的標的模式爲：

Minimize

$$z=c_0S_v+\sum\nolimits^{n}_{t=1}(b_t\Delta F_t+c_t\Delta D_t+a_t\Delta L_t)$$

$$=6S_v+2\Delta F_1+3\Delta F_2+\Delta D_1+2\Delta D_2+3\Delta L_1+3\Delta L_2$$

subject to

$$\begin{array}{llllllll}
\omega_1: & S_v- & S_1 & & +\Delta F_1 & & -\nabla F_1 & = f_1=\boxed{4} \\
\underline{\omega}_1: & S_v- & S_1 & & & & & \ge \underline{f}_1=\underline{1} \\
\rho_1: & & S_1- & S_2 & +\Delta D_1 & & -\nabla D_1 & = d_1=\boxed{4} \\
\underline{\rho}_1: & & S_1- & S_2 & & & & \ge \underline{d}_1=\underline{2} \\
\sigma_1: & & S_1- & S_0 & +\Delta L_1 & & -\nabla L_1 & = l_1=\boxed{6} \\
\underline{\sigma}_1: & & S_1- & S_0 & & & & \ge \underline{l}_1=\underline{3} \\
\omega_2: & S_v & -S_2 & & +\Delta F_2 & & -\nabla F_2 & = f_2=\boxed{6} \\
\underline{\omega}_2: & S_v & -S_2 & & & & & \ge \underline{f}_2=\underline{2} \\
\rho_2: & & -S_1+S_2 & & +\Delta D_2 & & -\nabla D_2 & = d_2=\boxed{-5} \\
\underline{\rho}_2: & & -S_1+S_2 & & & & & \ge \underline{d}_2=\underline{-6} \\
\sigma_2: & & & S_2-S_0 & +\Delta L_2 & & -\nabla L_2 & = l_2=\boxed{3} \\
\underline{\sigma}_2: & & & S_2-S_0 & & & & \ge \underline{l}_2=\underline{1}
\end{array}$$

$\Delta F_t, \Delta D_t, \Delta L_t; \nabla F_t, \nabla D_t, \nabla L_t \ge 0,\ t=1,2,\ldots,n;\ n=2$

上列的案例模式有變數 7n+1=16 個、限制式有 6n=12 個，其中等式與不等式各有 3n=6 個。

限制列左側標註的是對偶變數，詳見下節說明。

限制式右端常數是需求參數：標的值或最小值。

S_v, S_t：水庫容量與時期 t 的蓄水量，t=1, 2。

$\Delta F_t, \Delta D_t, \Delta L_t;\ \nabla F_t, \nabla D_t, \nabla L_t$：分別爲時期 t 的蓄洪、供水與貯水三功能的缺額、餘額，t=1, 2。

標的模式的進水量已知，所以這是一個確定性模式。在模式推導過程中，有一組限制式(狀態式)在代換一類變數(供應量)之後已經捨去，所以標的模式最後只剩二類變數(狀態與差額)的二組限制式(標的式與下限式)。但是，模式解得的變數值包含狀態值，故可利用已經捨去的狀態式求得供應量。供應量既然是重要的觀念，所以在需要時，模式也可採上節全部的變數與限制式。

標的模式限制式的形式可以選擇，例如，(1)標的式省去餘額則化爲不等式，因餘額是其餘變數；(2)下限式可加餘變數(可減額)化爲等式。

標的模式的參變數可按需要而作不同設定，例如，(1)設各對標的值與最小值相等：$\boxed{f_t}=\underline{f}_t=f,\ \boxed{d_t}=\underline{d}_t=d,\ \boxed{l_t}=\underline{l}_t=l$，則標的式即最小式，故無缺

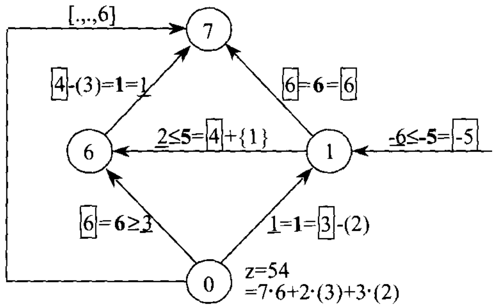


圖 9　案例最佳方案供需位勢網絡

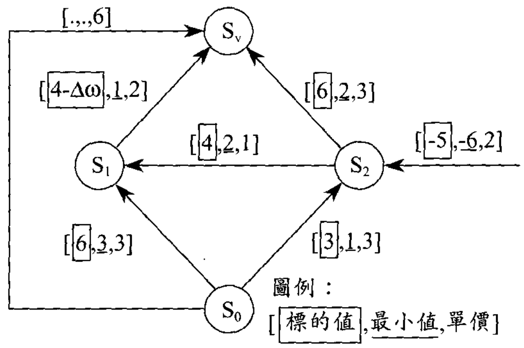
額，$\Delta F_t = \Delta D_t = \Delta L_t = 0$，缺額成本隨著缺額也都爲零；(2)假設同前例(1)，又設蓄洪與貯水需求爲零 f= l= 0，則這二類下限條件化爲 $S_t \leq S_v, S_t \geq S_o = 0$，這是一般模式的蓄水量上限與下限條件，而且目標函數爲 $z = c_0 S_v$，只剩水庫容積項，因此問題簡化爲「在供應不小於一定需求值(最小值、標的值或之間的定值)的條件下，求水庫所需最小容量」，這是 Rippl 累積曲線法或其對應的代數法-序列峰值法所求解的問題；(3)假設水庫容量已定，供水類參數不作簡化，蓄洪與貯水類仿前二例(1)與(2)簡化參數，令其值爲零 f= l= 0，則模式可專作供水運轉分析。

一般單純形法或網絡法都可用來解標的模式(劉佳明, 1993, 1997)。案例的最佳方案爲：水庫容量= 7，時期 1 蓄洪量= $\underline{1}$，蓄水量= $\boxed{6}$；時期 2 蓄水量= $\underline{1}$。最佳方案與方案一、二(見圖 9、圖 4、圖 5)的總成本值分別爲：54, 59 與 66。

水庫標的模式雖能以線性規劃程式求解，但因其模式係數大都是 0，只有小部分是±1，所以這類問題以單純形法求解時，計算機資源主要耗費在元素是 0 與±1 的矩陣的儲存與計算上。而以網絡方式處理時，其資料是以表 1 或圖 7 網絡的方式儲存，並且網絡計算只有加減而無乘除，因此，所需記憶量與計算時間資源極省，僅約前者的千百分之一，問題越大節省越多(Dantzig, 1963; 劉佳明, 1993, 1997)。

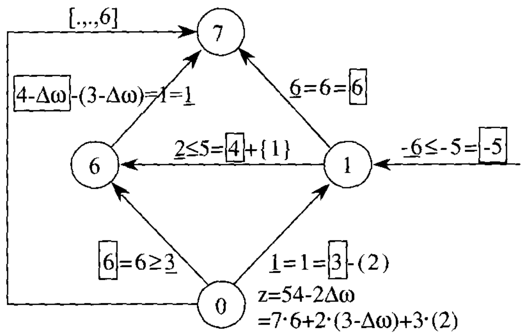
七、影子價格與流量網絡

本節將對表一案例的某一需求參數(標的值或最小值)作微小變動，然後分析其成本變動



(時期 1 蓄洪標的值減少Δω單位)

圖 10　案例新規劃資料網絡圖



(時期1蓄洪標的值減少Δω單位)

圖 11　案例新資料下最佳方案位勢網絡圖

率。以時期 1 蓄洪標的值爲例，水庫原供應 4 單位蓄洪標的值，假如水庫自己只供應 4- Δω單位，另請同業提供 Δω單位，它是以鄰近水庫蓄洪、建造堤防、滯洪池或排水設施等方式達成這項服務。水庫與同業之間如何決定蓄洪標的值的單位價格？原問題資料與最佳方案二網絡分別見圖 7 與 9，總成本爲 54。新問題時期 1 蓄洪標的值減少 Δω單位，其資料與最佳方案網絡分別見圖 10 與 11，總成本爲 54- 2Δω，比原問題少 Δz= 2Δω；又若同業要求水庫增加蓄洪標的值 Δω單位以供它使用，則總成本比原問題多 2Δω。

由上一段分析可知，時期 1 蓄洪標的值單位價值 Δz/Δω= 2，這是水庫對這項服務願買的最高單價或願賣的最低單價。

上一段推求參數價格是從最佳方案的總成本著手，本段將直接就最佳方案相關項目的成本

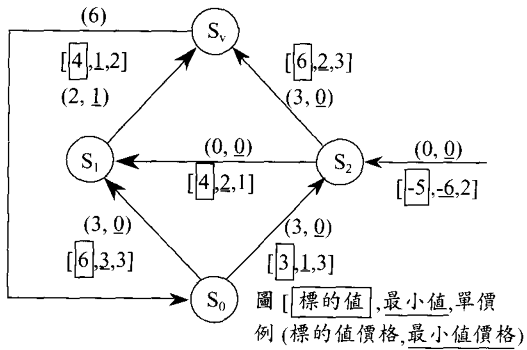


圖 12　案例最佳方案下參數影子價格

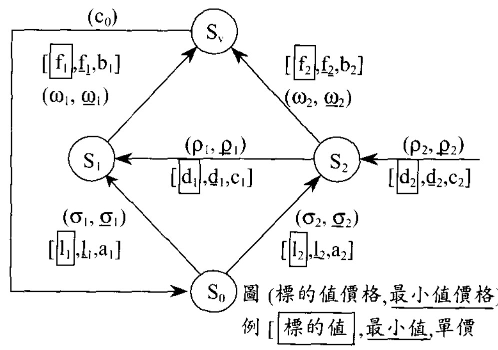


圖 13　對偶模式的參數價格流量網絡

著手。參考圖 11，若對同業提供蓄洪標的值的服務，水庫收費單價不應低於因移用而產生的蓄洪缺額單價 2，若向同業要求蓄洪標的值的服務，同業收費單價不應超過蓄洪缺額單價 2，否則水庫寧可自理。因此，綜合買與賣的觀點，該標的值的交易單價定爲 2，這是參考單價，是水庫願買或願賣的價格，爲該需求參數(相對於最佳方案)的**影子價格**(方中秋 1995；胡明哲，2000)。

同法可以分別變動各項標的值或最小值一小單位，一一計算總成本所受的影響，所得各對參數影子價格標示於圖 12 各該管線旁小括號內，至於圖中方括號內的數值則是表 1 案例的規劃資料。

下節將根據線性代數理論建立標的模式的對偶模式，另以原變數變動推導對偶變數關係式，並說明其網絡特性。

八、標的規劃模式的對偶模式

上節介紹需求參數的影子價格的方式是個別逐一求解。本節根據線性規劃的對偶理論(Dantzig, 1963)建立標的模式的**對偶模式**(Liu 1987, 方中秋 1995)，其最佳解的變數值就是對應參數的影子價格，因此可以一舉解得全部，不必逐一推求。表 1 案例標的模式的對偶模式爲：

Maximize

$$z' = \sum^{n}_{t=1} (f_t\omega_t + \underline{f}_t\underline{\omega}_t + d_t\rho_t + \underline{d}_t\underline{\rho}_t + l_t\sigma_t + \underline{l}_t\underline{\sigma}_t)$$
$$= 4\omega_1 + \underline{\omega}_1 + 4\rho_1 + 2\underline{\rho}_1 + 6\sigma_1 + 3\underline{\sigma}_1$$
$$+ 6\omega_2 + 2\underline{\omega}_2 - 5\rho_2 - 6\underline{\rho}_2 + 3\sigma_2 + \underline{\sigma}_2$$

subject to:

S_v: $(\omega_1 + \underline{\omega}_1) + (\omega_2 + \underline{\omega}_2) = c_0 = 6$

S_1: $-(\omega_1 + \underline{\omega}_1) + (\rho_1 + \underline{\rho}_1) + (\sigma_1 + \underline{\sigma}_1) - (\rho_2 - \underline{\rho}_2) = 0$

S_2: $-(\rho_1 + \underline{\rho}_1) - (\omega_2 + \underline{\omega}_2) + (\rho_2 + \underline{\rho}_2) + (\sigma_2 + \underline{\sigma}_2) = 0$

ΔF_t: $\omega_1 \le b_1 = 2$, $\quad \omega_2 \le b_2 = 3$,

ΔD_t: $\rho_1 \le c_1 = 1$, $\quad \rho_2 \le c_2 = 2$,

ΔL_t: $\sigma_1 \le a_1 = 3$, $\quad \sigma_2 \le a_2 = 3$,

$$\omega_t, \underline{\omega}_t, \rho_t, \underline{\rho}_t, \sigma_t, \underline{\sigma}_t \ge 0, \ t=1, 2, \ldots, n; \ n=2.$$

上面限制列左端標註的是各式對應的原變數。模式變數是需求參數的影子價格，意義如下，

ω_t, $\underline{\omega}_t$: 時期 t 蓄洪標的值價格與最小值價格，

ρ_t, $\underline{\rho}_t$: 時期 t 供水標的值價格與最小值價格，

σ_t, $\underline{\sigma}_t$: 時期 t 貯水標的值價格與最小值價格。

圖 13 是上列對偶模式的流量網絡圖，它顯示對偶模式的問題是「求最佳價格流量方案，使網絡流量總收益最大，滿足三類限制條件：(1) 通過網絡的**總流量**爲 c_0(水庫單位容量成本)，(2) **節點**流量平衡，(3)**管線**標的值價格上限」。對偶模式能以線性規劃或網流方法求解(方中秋, 1995; 胡明哲, 2000)，其最佳方案見圖 12，就是與之前以逐式變動參數的方式所求得的相同(或其替代解)。

對偶模式有三個限制式對應原模式節點變數 S_v, S_1, S_2，這三式分別爲各該**節點**上所有管線的流量平衡條件，三式中標的值與最小值二價格變數同時出現，表示各管線的流量都分成標的值價格與最小值價格二部分。另六個對偶限制式對應原管線變數 $F_1, Y_1, L_1, F_2, Y_2, L_2$，分別爲各該**管線**標的值價格的上限式，限定其值不超過對應

缺額單價。最小值價格則無上限。

原模式的每個變數各對應對偶模式的一個限制式，探討原變數變動的後果可以得到對應的影子價格條件(對偶限制式)，並可藉以了解所代表的意義。例如，將庫頂節點 S_v 提高 1 單位，即增加水庫容量 S_v 一單位，則總成本增加 c_0(水庫單位容量成本=6)，這時水庫可提供給同業時期 1 與時期 2 蓄洪標的值與最小值各 1 單位；反之，若庫頂節點 S_v 降低 1 單位，由同業提供其對應服務給水庫，則水庫願意付出因容量降低一單位所省下的成本 c_0。上述服務由水庫提供給同業時，水庫收費最少要 c_0；由同業提供給水庫時，水庫最多願意付 c_0。因此，基於買賣雙向考量，各時期蓄洪標的值價格與最小值價格的總和應等於 c_0，即 2+ 1+ 3+ 0= 6，或 $\omega_1+\underline{\omega}_1+\omega_2+\underline{\omega}_2=c_0$。案例的對偶模式網絡與其最佳方案網絡分別見圖 13 與圖 12。

同理，可變動其它節點的節點值，推求各該節點所有出入管線的參數影子價格之間的關係，這相當於一般流量網絡的節點管線流量必須平衡的條件，對偶模式的限制式可藉此求得。

從最近二節的說明可知，水庫個別、部分或整體項目替代服務的影子價格可藉由不同參變數虛擬變動結果的探討，建立其交易成立的必要條件，它們就是對偶模式的限制條件。

九、目標函數與供需比例圖

以上二節藉助於案例，說明對偶模式相關的基本觀念：1. 檢視原模式水庫各需求參數(標的值與最小值)的變動對總成本的影響，說明對偶模式變數(即需求參數標的值與最小值的影子價格)的意義；2. 檢視對偶模式的目標函數與限制式，並賦予它流量網絡的解釋。本節將探討原、偶二模式的目標函數與資料方案比例圖。

將標的對偶模式的目標函數以文字表示成 Σ(標的值×標的值價格+<u>最小值</u>×最小值價格)= **Σ(數量常數×價格變數)**，其中標的值與<u>最小值</u>是**常數**，標的值價格與最小值價格(各管線的二部分流量)則是**變數**，因為標的值不小於<u>最小值</u>，所以同一管線的流量優先配予標的值價格，

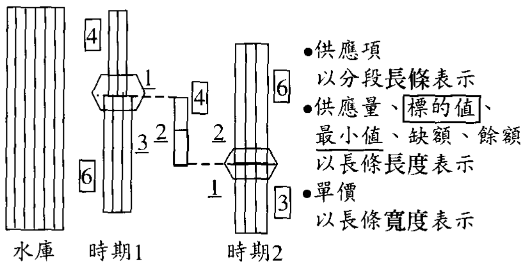


圖 14　案例規劃資料資料比例圖

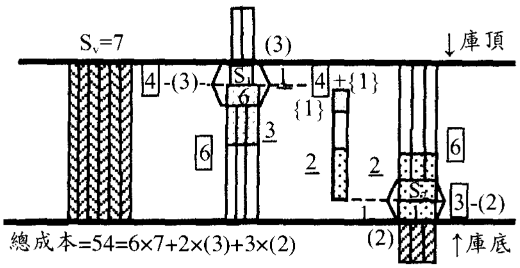


圖 15　案例最佳方案供需比例圖

最多只到它的上限(缺額單價)，超過部分配予最小值價格，這樣收益才會高。

上節案例對偶模式最佳方案(圖 11)總收益
Σ(標的值×標的值價格+<u>最小值</u>×最小值價格)
= 4×2+ 1×1+ 6×3+ 3×6+ 3×3= 54。

案例標的模式最佳方案(圖 9)總成本是
單位容量成本×容量+Σ(缺額單價×缺額)
=Σ(**單價常數**×**數量變數**)=7×6+2×3+3×2=54，
式中缺額單價是**常數**，缺額是**變數**。

原偶二模式的目標函數各有各的**單價**與**數量**，而且項目為**常數**或**變數**也不相同。

若只知案例的上述原偶方案都可行，但不確定它們是否為最佳方案，則可根據線性規劃對偶理論(Dantzig, 1963)，檢驗這對原偶可行方案的目標函數值是否相等，若相等，則可確定它們分別是原偶模式的最佳方案。

標的模式的位勢網絡是水庫運轉過程的示意圖，它標註數字而不按比例以高度或長度表現節點或管線的數值。

在位勢網絡之外，其實另有顯示水庫資料或其運轉過程的比例圖(劉佳明 1993, 1997)，如圖 14 與圖 15，詳細比對相應的位勢網絡(圖 7 與圖

9)，不難發現二者內容相同，只是比例圖更爲具體，它以一個分段**長條**對應一個供應項，長條的**寬度**表示單價，各段**長度**分別表示**供應量**、$\boxed{\text{標的值}}$、<u>最小值</u>、(缺額)或{餘額}等。若不考慮管線寬度，比例圖相當於水庫蓄水量歷線圖，所以位勢網絡圖也可當作歷線圖的示意圖。一般水庫規劃模式的變數與限制式其實也可用網絡圖表示，只是其結構可能並非位勢或流量，即使是，也不一定就與本文的相同(劉佳明, 2002)。

十、綜合討論

水庫線性標的規劃模式的目標函數雖爲片段線性，但是因爲其斜率是單調的減少或增加，故可簡化爲單純線性的形式。若問題不是非常龐大，或不特別要求計算的效率，這一類問題能以一般線性規劃程式求解。

標的模式在參數的設定上有相當彈性，例如，單價採權重、令標的值與最小值相等、設最小值爲 0、將參數分組各組同值等等，因此標的模式可以處理不同類型的實際問題。

標的模式可藉自然、生動的位勢網絡完整的呈現水庫供需情勢的運轉歷程：三個節點狀態值(庫頂、水面與庫底)與三類管線供應量(蓄洪、供水與貯水)的時空軌跡，這與一般水庫規劃模式近乎黑箱的作業方式不同，因此它能以比較直觀具體的方式探討水庫規劃運轉問題。

標的模式是藉一對需求參數(標的值與最小值)表示水庫各期各類功能的需求區間，而這一對參數正是模式限制式的右端常數，因此，根據對偶理論可知，其對偶模式是提供替代服務的水庫同業所面對的問題-「如何決定需求參數的(影子)價格方案，爲水庫所接受而又使提供服務的收益最高」。這個對偶模式另有它對應的網絡，其配置雖與原模式的位勢網絡相同，但其變數爲管線流量(價格)而非節點位勢(容積)，限制式爲節點流量(價格)平衡條件而非管線位勢(容積)關係，它是一個流量網絡。

以上的分析可擴充應用於目標函數爲更多段線性與分析期間水庫有沉陷或淤積等情況。此外，有關標的與其對偶二模式的另一個重要觀念是二個模式的變數之間的互補鬆弛條件(Dantzig, 1963)，本文雖未論及，但是它常見於原、偶模式最佳解對偶性的探討上，請參閱文獻(方中秋, 1995; 胡明哲, 2000)。

因爲水庫標的模式與其對偶模式具有明確的位勢與流量網絡結構，所以不只爲水庫運轉機制的探討與需求參數價格的分析提供直觀而全面的視野，也爲模式演算法的設計提供極爲具體而精準的工具(劉佳明, 1993; 1997, 胡明哲, 2000)。因此，期待模式的擴充，將供需機率、水質變化、蒸發滲漏等因素納入考慮，使水庫規劃與運轉的研究與應用邁向新的境界。

參考文獻

1. 劉佳明，"A dual interpretation of a linear reservoir model", 台灣水利 24 卷 1 期，1976。
2. 胡文章，「線性規劃在水庫規劃及操作之應用」，台灣水利 25 卷 1 期，1977。
3. 劉佳明，「水庫標的線性規劃問題之網路切割解法簡介」，台灣水利 36 卷 2 期，1988。
4. 劉佳明，「工程規劃、設計與管理中優選方法的應用」，農業工程學報 39 卷 1 期，1993。
5. 方中秋，水庫標的線性規劃模式之對偶問題與其在解法上之應用，國立台灣大學農業工程研究所碩士論文，1995。
6. 劉佳明，「水庫標的規劃模式與其網路演算法」，八十六年農業工程研討會，1997。
7. 胡明哲，水庫標的規劃模式的解法，國立台灣大學農業工程研究所碩士論文，2000。
8. 劉佳明，「水庫規劃問題的位勢網絡與流量網絡模式」，農業工程學報 48 卷 4 期，2002。
9. Dantzig, G. B., Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, 1963.
10. Liu, C. M., "A dual network model for a linear reservoir goal programming problem", Proc. of the ROC-Japan Joint Seminar on Water Resources Engineering, Taipei, 1987.

收稿日期：民國 92 年 10 月 28 日
修正日期：民國 92 年 12 月 24 日
接受日期：民國 92 年 12 月 29 日