

拉普拉斯轉換有限差分法應用於地層下陷之探討

Investigation on the Application of the Laplace Transform Finite Difference Method in Land Subsidence

淡江大學水資源及環境工程學系

施 清 吉

Ching-chi Shih

摘 要

假設地層下陷僅來自重力方向之壓密，地下水流動也只限制於水平面，則自受壓飽和含水層抽取地下水而導致之地層下陷，其控制方程式為一擴散方程式且含一「源」。利用拉普拉斯轉換有限差分法求其數值解，並與簡易近似解比較，後者係由控制方程式之分析解構建而得。探討之範圍為無因次時間 τ 介於 10^7 至 10^{12} 。在此範圍內，拉普拉斯反轉換（Stehfest 法）之系列值個數 K 為 12。採用拋物線型遞增方式，非均勻格點之最小間距約為 0.8，格點總數隨著 τ 值的增加而遞增，大致介於 100 與 8000 之間。

關鍵詞：地層下陷，拉普拉斯轉換與反轉換，有限差分法。

ABSTRACT

Based upon that the land subsidence due to an overdraft of groundwater from a confined saturated aquifer is strictly resulted from a vertical settlement and the groundwater flow is also restricted in a horizontal plane, the governing equation is of a diffusion type with a source. The method of the Laplace Transform Finite difference scheme is utilized to obtain numerical solutions, which are compared with the simple approximate solution as constructed from the analytical solution of the governing differential equation. The range of the dimensionless time τ investigated is from 10^7 to 10^{12} . In this range, the number of the sequence values generated in the Laplace space K for the given τ is 12 as found in this study. The minimum step size is about 0.8 for the non-uniform grid points with the step size increases accordingly to the parabolic type, while the total number of the grid points, ranging from 100 to 8000, is increasing with the value of τ .

Keywords: Land subsidence, Laplace transform and inverse transform, Finite difference scheme.

一、前言

地層下陷為一相當緩慢之沉陷現象，而且土層之相關因子極具非均勻性與時變性。雖然簡易近似模式有助於瞭解抽取地下水而導致地層下陷之一相互關係，但是其得來往往都是基於簡單理想之假設。所以實際上之應用還是需要仰賴數值模式。如前述，這領域所牽涉的時間經常以半年甚至以年計，直接採用一般差分技巧來處理原先之偏微分方程式並不恰當，故須先設法消掉時間微分項，其方法之一，就是利用拉普拉斯轉換(Laplace transform)。本文採用拉普拉斯有限差分法(Laplace transform finite difference method)。首先，利用拉普拉斯轉換將偏微分方程式變為只包含徑向空間座標之全微分方程式；接著，再使用非均勻格點予以離散。在拉普拉斯空間之「解」，並不利用拉普拉斯反轉換(Laplace inverse transform)轉回在 Eulerian 空間之「解」，而是針對某一已知之時間，先產生拉普拉斯自變數之一系列值，而後再求得其對應之系列「解」，最後利用統計方法由此系列「解」組合成在 Eulerian 空間之「解」。利用拉普拉斯有限差分法求得之數值解，其準確度視系列值個數及格點配置而定，以簡易近似解為根據，比較兩解之差距，並分析之，這正是本研究之重點。

二、理論分析

假設地層下陷僅來自重力方向之壓密，同時地下水流動也只侷限於水平面；另外，所有相關係數與因子皆視為常數，且以其未抽水前之初始值計，則自受壓飽和含水層(Confined saturated aquifer) 抽取地下水而導致之地層下陷，其控制方程式(Governing equation)為(施，1976)

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) + 1 \quad (1)$$

$$\text{式中 } \eta = \frac{\pi D_0 H'}{QN_0} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\xi = \frac{r}{R} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\tau = \frac{D_0 t}{R^2} \quad \dots\dots\dots (4)$$

自變數為無因次時間 τ 與無因次徑向座標 ξ ，而因變數為瞬時無因次沉陷量 η 。另外 t 與 r 分別為時間與徑向座標、 R 為井半徑、 H' 為瞬時沉陷量、 Q 為抽水量、 D_0 與 N_0 為兩已知係數，暫稱為擴散係數與抽水係數。式(1)等號右邊 '1' 代表無因次抽水量，只在設置抽水井處才等於 '1'，否則須以 '0' 計。式(1)之解析解為(Amsov, 1937; 施, 1998)

$$\eta = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2} J_0(\lambda \xi) J_1(\lambda) [1 - e^{-\tau \lambda^2}] d\lambda \quad \dots\dots\dots (5)$$

式中， J_0 與 J_1 分別為第零階與第一階貝塞爾函數(Bessel function)。式(5)為地層下陷近似模式，其適用範圍為 $\tau \leq 10^7$ (施, 2003)。

最大瞬時沉陷量 η_{\max} 定義為在井壁(即 $\xi = 1$)之瞬時沉陷量 η ，另瞬時沉陷範圍 ξ_{\max} 設為在 $\xi = 0$ 時之徑向範圍。針對 η_{\max} 、 ξ_{\max} 與 η 等三項，根據在適用範圍內之近似模式構建而得之簡易近似模式為(施, 2003)。

$$\frac{\eta}{Y} = 4.210141 - 1.144316 \frac{\log \xi}{X'}, \quad \frac{\log \xi}{X'} \leq 3.0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{Y} = & -0.094631 \left(\frac{\log \xi}{X'} \right)^3 + 1.45755 \left(\frac{\log \xi}{X'} \right)^2 \\ & - 7.42357 \left(\frac{\log \xi}{X'} \right) + 12.50611, \end{aligned}$$

$$5.0 \geq \frac{\log \xi}{X'} > 3.0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{\eta}{Y} = 0 \quad \frac{\log \xi}{X'} > 5 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\text{式中 } X' = 0.0553022 + 0.1349036 \log \tau \quad \dots\dots (9)$$

$$Y = 0.0532265 + 0.1352534 \log \tau \dots\dots(10)$$

式(9)與式(10)為水平尺度與垂直尺度，其值視無因次時間 τ 而定。以 η/Y 與 $\log \xi/X$ 而言，瞬時沉陷剖面包含兩種函數關係，線性型與非線性型，分別為式(6)與式(7)，相當於圖示之直線段與曲線段。由於簡易近似模式為一簡單函數關係式，故其應用之方便遠勝於式(5)。

式(1)之數值技巧甚多，其中之一為先利用拉普拉斯轉換(Laplace transform)消掉對無因次時間 τ 之偏微分項，改以代數式表之。拉普拉斯空間座標 s 取代 τ ，同時無因次沉陷量 η 也轉換為拉普拉斯空間無因次沉陷量 ψ ，即

$$\psi(\xi, s) = L\{\eta(\xi, \tau)\} = \int_0^\infty e^{-s\tau} \eta(\xi, \tau) d\tau \dots\dots(11)$$

但是無因次徑向座標 ξ 保持不變。故式(1)簡化為只有自變數 ξ 之全微分方程式，其差分式可採用一般差分技巧予以離散。此方法俗稱拉普拉斯轉換有限差分法(Laplace Transform Finite Difference Method)，簡化稱為 LTFD 法(Moridis and Reddell, 1991; Ségol, 1994)。先續求 ψ 之數值解。最後再由 ψ 轉回 η 。

三、數值模擬

利用式(11)之拉普拉斯轉換，式(1)變為

$$s\psi(\xi, s) - \eta(\xi, 0) = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi \frac{\partial \psi(\xi, s)}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{s} \dots\dots(12)$$

式中， $\eta(\xi, 0) = 0$ 。瞬時沉陷範圍 ξ_{\max} 設為線段總長，共有 $I+1$ 個格點 $p_i, i=1, 2, \dots, I+1$ ， p_1 與 p_{I+1} 分別位於兩端，即 $p_1 = 0$ 與 $p_{I+1} = \delta_{\max}$ 。兩相鄰格點為一線段，故瞬時沉陷範圍共分成 I 個線段 $\delta_i, i=1, 2, \dots, I$ ；第 i 線段介於第 i 與第 $i+1$ 兩格點之間，其間距為 $\Delta \xi_i (= p_{i+1} - p_i)$ ，線段指標以其中心點位置計，即 $\xi_i = p_i + 0.5 \times \Delta \xi_i$ 。格點與線段中心點分別以空心圓與實心圓示於圖 1。另外，定義 $\Delta \xi_{i+1/2} = 0.5 \times (\Delta \xi_{i+1} + \Delta \xi_i)$ ， $\Delta \xi_{i-1/2} = 0.5 \times (\Delta \xi_i + \Delta \xi_{i-1})$ 。

(一) 建構差分式

離散後，式(12)變為

$$A_i \psi_{i-1} + B_i \psi_i + C_i \psi_{i+1} \dots\dots(13)$$

$$\text{式中 } A_i = \frac{1}{\xi_i} \frac{1}{\Delta \xi_i} \frac{\xi_{i-1/2}}{\Delta \xi_{i-1/2}} \dots\dots(14)$$

$$C_i = \frac{1}{\xi_i} \frac{1}{\Delta \xi_i} \frac{\xi_{i+1/2}}{\Delta \xi_{i+1/2}} \dots\dots(15)$$

$$B_i = -A_i - C_i - s \dots\dots(16)$$

$$D_i = -\frac{1}{s} \dots\dots(17)$$

$$\xi_{i+1/2} = \frac{\ln(\xi_{i+1}/\xi_i)}{\frac{\ln(p_{i+1}/\xi_i)}{\xi_i} + \frac{\ln(\xi_{i+1}/p_{i+1})}{\xi_{i+1}}} \dots\dots(18)$$

$$\xi_{i-1/2} = \frac{\ln(\xi_{i-1}/\xi_i)}{\frac{\ln(p_i/\xi_i)}{\xi_i} + \frac{\ln(\xi_{i-1}/p_i)}{\xi_{i-1}}} \dots\dots(19)$$

式(13)之邊界條件有二。首先，抽水井設置於第一線段，故 $D_1 = -\frac{1}{s}$ ，其他線段之 D_i 值皆為 0，即 $D_i = 0, i=2, \dots, I$ ；另外， ξ_1 又為對稱點，所以 $\psi_0 = \psi_2$ ，參閱圖 1，由式(13)得知 $B_1 \psi_1 + (A_1 + C_1) \psi_2 = -\frac{1}{s}$ 。另一邊界條件為第 I 線段之瞬時沉陷量 η 為 0—方法之一為先令此線段之 ψ 值等於 0，再求其他線段之 ψ 值；方法之二為先求得所有線段之 ψ 值，再以第 I 線段之 ψ 值為基準，所有其他線段之 ψ 值均需扣掉這個基準。兩種方法的計算結果極為接近。本研究採用第二方法。

(二) 計算步驟

式(1)之因變數為無因次沉陷量 η ，而自變數為無因次時間 τ 與無因次徑向座標 ξ 。拉普拉斯轉換有限差分法係將 τ 轉換為該空間之 s ，所以計算順序應自已知之 τ 值起。

1. 產生一系列之 s 值

針對已知之 τ 值，首先在拉普拉斯空間產生一系列對應之 s 值，其方法為

$$s_k = \frac{\ln 2}{\tau} \times k, k=1, 2, \dots, K \dots\dots(20)$$

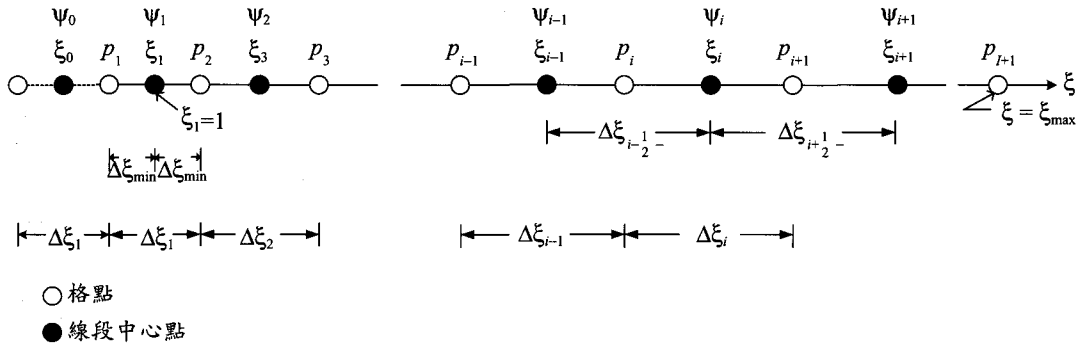


圖 1 非均勻格點示意圖

式中，K 為系列值之個數，須為偶數(Stehfest, 1970)，下標 'k' 為系列值之指標。

2. 求拉普拉斯空間之解 ψ

就每一個系列值 $s_k, k=1, 2, \dots, K$ ，利用式(13)求所有線段之 ψ 值，共有(I-1)個線段，因第(I-1)線段須引用第 I 線段。以矩陣表示，式(13)可寫為

$$\{M\}[\psi(s_k)] = [D(s_k)] \dots\dots\dots(21)$$

{M} 為係數矩陣，共有(I-1)行 \times (I-1)列，對角線元素為 $B_i, i=1, 2, \dots, I-1$ ，受線段幾何因素及系列值 s_k 的影響，如式(14)至式(16)所示。對角線上方元素為 $C_i, i=1, 2, \dots, I-2$ ，下方為 $A_i, i=1, 2, \dots, I-1$ ，這兩者只受線段幾何因素之影響，與系列值 s_k 無關。[$\psi(s_k)$] 為行矩陣，其元素為 $\psi_i(s_k), i=1, 2, \dots, I-1$ ；對應於(I-1)個線段。[$D(s_k)$] 也是行矩陣，其元素為 $D_i(s_k), i=1, 2, \dots, I-1$ 。

3. 轉回 Eulerian 空間之解 η

拉普拉斯轉換有限差分法並不採用傳統方法將在拉普拉斯空間之解 ψ 轉回在 Eulerian 空間之解 η ，而是針對各系列值 s_k 之解 $\psi_i(s_k)$ 利用其對應之權重函數 W_k 來構建在 Eulerian 空間之解 η ，即

$$\eta(\xi, \tau) = \frac{\ln 2}{\tau} \sum_{k=1}^K W_k \psi_i(s_k) \quad , i=1, 2, \dots, I-1 \quad (22)$$

式中， W_k 定義為(Stehfest, 1970)

$$W_k = (-1)^{\frac{k}{2} + k} \sum_{j=(k+1)/2}^{\min(k, \frac{k}{2})} \frac{j^2 (2j)!}{\binom{k}{2-j} j! (j-1)! (k-j)! (2j-k)!} \dots\dots\dots(23)$$

權重函數 W_k 之個數係配合式(20)系列值 s_k 之個數 K，其值受 K 之影響，但與 s 、 τ 與 ξ 無關。

四、結果與討論

參閱式(5)之近似模式以及由式(6)至式(10)組成之簡易近似模式，其自變數均為無因次徑向座標 ξ 與無因次時間 τ ，分別定義於式(3)與式(4)，後者含一擴散係數 D_0 。倘若井半徑 R 與 D_0 以分別以 0.1m 與 50m²/s 計(施, 2000 與 2001)，抽水時間 t 設為一年，則 $\tau = 1.5768 \times 10^{11}$ ，遠超過近似模式之適用範圍，其上限為 $\tau = 10^7$ ，應以簡易近似模式為驗證之主要根據(施, 2003)。換言之，就式(4)之定義而言，本研究之特徵為 τ 值非常大。另，因變數為瞬時無因次沉陷量 η ，定義於式(2)；若相關因子之值為已知，即可由 η 值求得瞬時沉陷量 H' 。

自井中心至瞬時沉陷量 η 等於 0 之範圍定義為沉陷範圍 ξ_{max} ，採用式(8)，即 $\xi_{max} = 5X'$ 。 ξ_{max} 分成 I 個線段，共有(I+1)個格點。採用非均勻格點，其位置係利用拋物線關係求得；抽水井設於第一階格點與第二格點之間，井之附近，格點較緊密，隨著離井距離之增加格點逐漸變疏。沉陷只計井外，另外沉陷範圍又相當大同時也要兼顧井附近之急遽變化，徑向座標之展示必須採用對數。井壁設於 $\xi_1 (= P_1 + 0.5 \times \Delta\xi_1 = P_1 + \Delta\xi_{min})$

表 1 最小差距 ϵ_{\min} 及其對應之相關數據 I 與 $\Delta\xi_{\min}$

K	τ	10 ⁷	10 ⁸	10 ⁹	10 ¹⁰	10 ¹¹	10 ¹²
		ϵ_{\min}	0.06532275	0.03831393	0.04458951	0.04614361	0.04809794
10	I	100	123	303	610	1395	3023
	$\Delta\xi_{\min}$	1.34	1.47	1.46	1.49	1.49	1.50
	ϵ_{\min}	0.01165098	0.01329127	0.01376161	0.01409676	0.01434726	0.02296915
12	I	500	770	1608	3360	7109	5005
	$\Delta\xi_{\min}$	0.81	0.80	0.80	0.80	0.80	0.90
	ϵ_{\min}	0.1031648	0.07945189	0.08846047	0.07754761	0.07496013	0.07170969
14	I	399	154	1281	825	1882	4045
	$\Delta\xi_{\min}$	0.28	0.44	0.30	0.41	0.40	0.40

，其值恒為 1，故 p_1 不一定等於 0，如圖 1 所示， $\Delta\xi_{\min}$ 為最小線段長之半。若 ξ_{\max} 為已知，格點配置之重要幾何因素為 $\Delta\xi_{\min}$ 與 I。

數值解與簡易近似解間之差距 ϵ 定義為

$$\epsilon = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I |\eta_L - \eta_S| \quad \dots\dots\dots(24)$$

式中， η_L 與 η_S 分別代表利用拉普拉斯轉換有限差分法與利用簡易近似模式求得之瞬時沉陷量，定義於式(2)。差距愈小則示兩解愈接近，但是其值與兩解之相關性必須藉助展示於圖上之分析。以本研究而言，差距的影響因子有三：系列值個數 K、最小線段長 $\Delta\xi_{\min}$ 與線段總數 I。

(一) 數值解與簡易近似解之比較

無因次時間 τ 共有六值，即 $\tau=10^7, 10^8, 10^9, 10^{10}, 10^{11}, 10^{12}$ ；示於式(20)與式(23)之系列值個數 K 有三種， $K=10、12$ 與 14。針對某一 τ 值與某一 K 值，尋找差距 ϵ 何時為最小時(其值以 ϵ_{\min} 表之)。本文採用平面方式搜尋，相當於兩個迴圈，即分成兩階段。第一階段採用大間距搜尋， $I=100$ 至 8000，間距為 100， $\Delta\xi_{\min}=0.4$ 至 2.0，間距為 0.2；先大致確定 ϵ 為最小時，其對應之線段總數與最小線段長落於何處，其值分別以 [I] 與 $[\Delta\xi_{\min}]$ 表之。第二階段改使用小間距搜尋，其範圍係根據第一階段之搜尋結果，即 $I = [I]-100$ 至 $[I]+100$ ，間距減為 1；另， $\Delta\xi_{\min} = [\Delta\xi_{\min}]-0.2$ 至 $[\Delta\xi_{\min}]+0.2$ ，間距減為

0.01。經這兩階段搜尋之結果列於表 1，橫向有六行分別代表不同的 τ 值，縱向也有三列，為不同之 K 值，每一 K 值又有三列；表中陳列不同 τ 值與 K 值時之最小差距 ϵ_{\min} ，及其對應之線段總數 I 與最小線段長 $\Delta\xi_{\min}$ 。根據表 1，數值解與簡易近似解之比較展示於圖 2 至圖 7，分別代表六個不同 τ 值。圖 2 至圖 7 為瞬時沉陷剖面，水平座標軸為無因此徑向座標 ξ ，取對數，垂直座標軸為無因次瞬時沉陷量 η ，實線代表由簡易模式求得之結果，參閱式(6)至式(10)。

圖 2 至圖 7 之數值解(圖形符號為非實線之曲線)顯示瞬時沉陷剖面皆以在 $\xi=1$ 處之瞬時沉陷量 η 為最大，然後隨著 ξ 值的增加而呈現幾乎為線性型遞減走向，最後再逐漸趨近於 0，如簡易近似解之變化趨勢(圖形符號為實線之曲線)，後者係利用式(6)至式(10)的計算結果。大致上，展示於圖上之數值解，其曲線圖型仍然可分為直線段與曲線段兩部份，靠近抽水井為直線段，而遠離抽水井為與曲線段。以 τ 值介於 10^7 與 10^{12} 之間的數值解而言，圖 2 至圖 7 顯示採用系列值個數 K 為 12 可獲得最接近簡易近似解之數值解，直線段幾乎完全吻合，只有曲線段稍有差距而已。另外，兩 K 值(10 與 14)，數值解與簡易近似解間之差距就明顯增加了，如圖所示。上述之圖示差距也可對照表 1 數據。參閱表 1， $K=12$ 時，除了 $\tau=10^{12}$ 之最小差距 $\epsilon_{\min}=0.023$ 稍微較大外，其他 τ 值之最小差距均在 0.01 左右。但 $K=10$

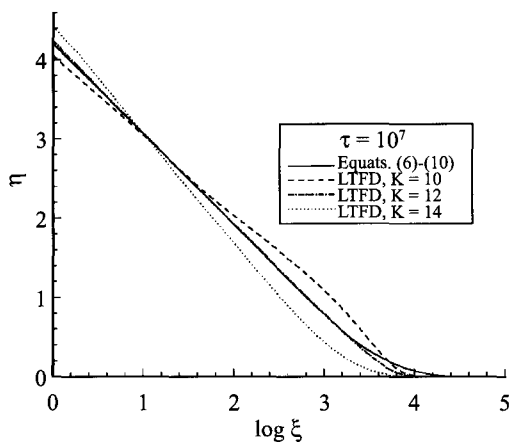


圖 2 $\tau = 10^7$ 瞬時沉陷剖面

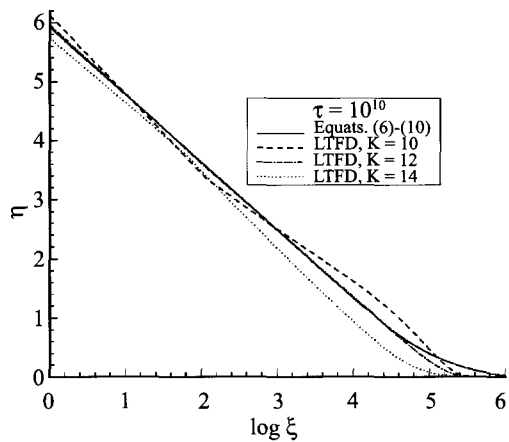


圖 5 $\tau = 10^{10}$ 瞬時沉陷剖面

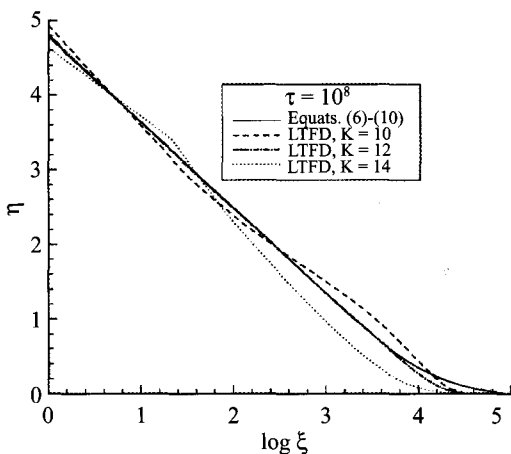


圖 3 $\tau = 10^8$ 瞬時沉陷剖面

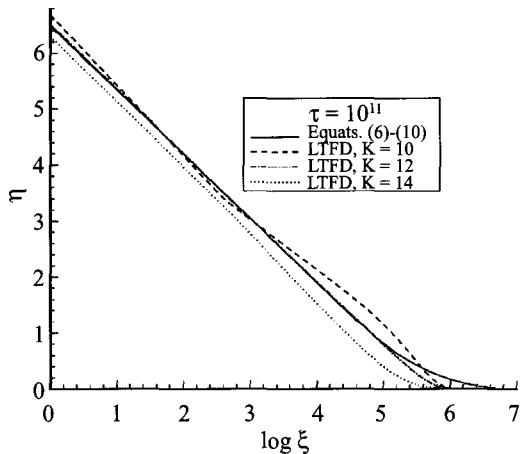


圖 6 $\tau = 10^{11}$ 瞬時沉陷剖面

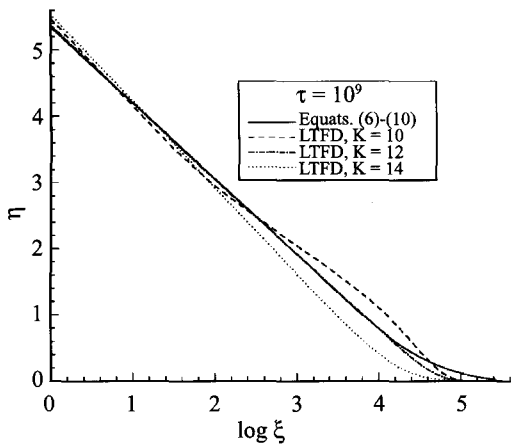


圖 3 $\tau = 10^9$ 瞬時沉陷剖面

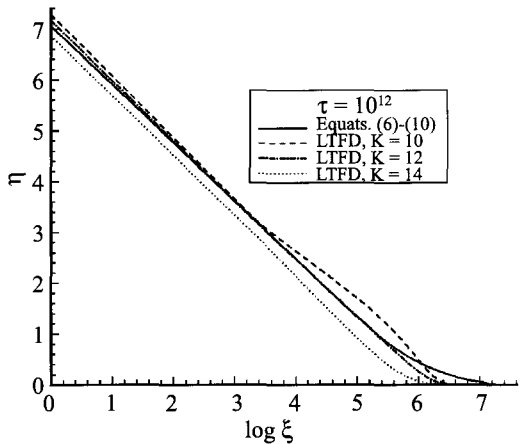


圖 7 $\tau = 10^{12}$ 瞬時沉陷剖面

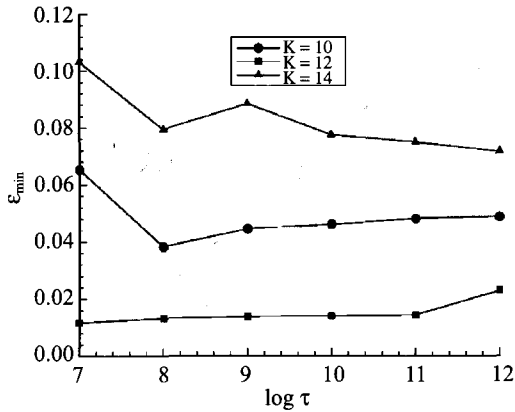


圖 8 不同 τ 值之最小差距 ε_{\min}

時，差距就明顯地提高了，最小差距也高至 0.038 ($\tau = 10^8$)。為便於了解差距多寡所代表之圖示意義，就簡化以 0.04 為準。若數值解與簡易近似解間之 ε 差距等於 0.04，其時兩解展示於圖上之差距有兩個特徵。一是直線段並不完全吻合，因為斜率不相同；二是曲線段之差距非常明顯。這兩特徵可比較圖 2 至圖 7 之實線(簡易近似解)與虛線(K=10)之數值解。如果 $K=14$ ，表 1 顯示數值解與簡易近似解間之差距都超過 0.07，數值解非常偏離簡易近似解，如圖 2 至圖 7 之點線所示。由上述討論，吾人得知若 ε 差距在 0.01 左右，則數值解與簡易近似解之直線段將完全重疊，其差距以來自曲線段為主，若差距增加，提高至 0.02 附近，其差距將同時來自直線段之微小斜率差異，如圖 7 所示。

針對某一系列值個數 K 與無因次時間 τ ，利用不同的線段總數 I 與不同的最小線段長 $\Delta\xi_{\min}$ ，搜尋數值解與簡易近似解間的差距 ε 為最小之組合，其結果除了列於表 1 外，並展示於圖 8 至圖 10，其水平座標軸均為 $\log \tau$ ，而垂直座標軸分別為 ε_{\min} 、 $\Delta\xi_{\min}$ 與 I 。圖 8 以展示 ε 與 τ 間之關係為主。 K 值較小的情況($K=10$ 與 12)，若 $\tau \geq 10^8$ ， ε_{\min} 與 τ 之關係大致成略遞增趨勢；但是 K 值較大的情況($K=14$)，卻改為略遞減趨勢。從圖 9 之數據分佈看來， $\Delta\xi_{\min}$ 與 τ 間之關係並不太明確，唯一較為明確的就是其間之關係，幾乎可視為定值，但其值深受 K 值影響， K

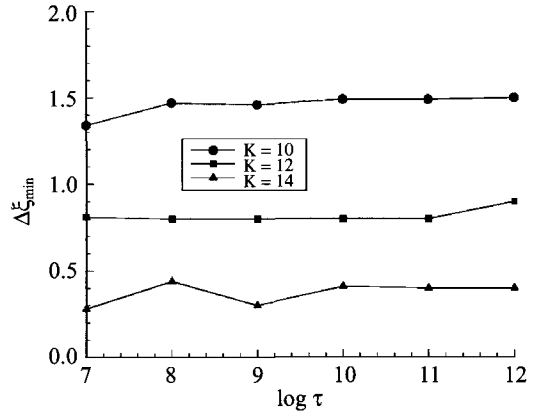


圖 9 不同 τ 值差距為最小時之對應最小線段長 $\Delta\xi_{\min}$

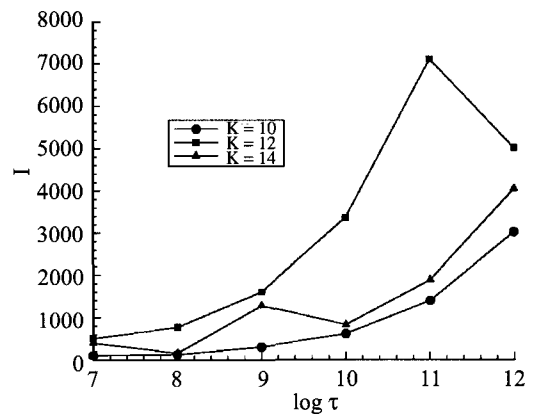


圖 10 不同 τ 值差距為最小時之對應線段總數 I

值愈大，則 $\Delta\xi_{\min}$ 愈小。最後，不論 K 值為何，圖 10 顯示線段總數 I 均隨著 τ 值之增加而呈現遞增趨勢。這是可理解的，因為 τ 愈大，則代表沉陷範圍 ξ_{\max} 也跟著愈大，所需的總線段總數也就愈大。

(二) 最小線段長 $\Delta\xi_{\min}$ 與線段總數 I 對差距 ε 之影響

拉普拉斯轉換有限差分法之應用，其先決條件(或關鍵)為選擇適當的系列值個數 K 、線段總數 I 與最小線段長 $\Delta\xi_{\min}$ ， K 之選擇以詳述於前，而後兩者之影響分別討論如下。

1. 最小線段長 $\Delta\xi_{\min}$ 之影響

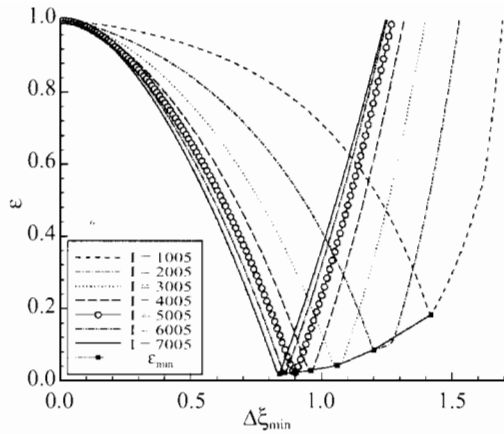


圖 11 最小線段長對差距 ϵ 之影響

參閱表 1，以系列值個數 $K=12$ 與無因次時間 $\tau=10^{12}$ 為例，其最小差距 $\epsilon_{\min}=0.2296915 \times 10^{-1}$ ，對應的 I 與 $\Delta\xi_{\min}$ 分別等於 5005 與 0.90。線段總數 I 為參數，採用七個不同的 I 值，1005 至 7005，間距為 1000，計算結果展於圖 11，其水平座標軸與垂直座標軸分別為最小線段長 $\Delta\xi_{\min}$ 與差距 ϵ ， $I=5005$ 之計算結果以圖型符號為空心圓表之，其他則以非實線線條表示，另實心方塊標示最小差距 ϵ_{\min} 之所在。圖 11 顯示最小線段長 $\Delta\xi_{\min}$ 對差距 ϵ 的影響都非常一致，不論 I 值為若干。 $\Delta\xi_{\min}$ 從 0 增加到某一臨界點， ϵ 首先自 I 起呈現遞減趨勢，直到最小值 ϵ_{\min} ，過了極點，再轉為遞增走向。這種變化趨勢一點也不受 I 值的影響，唯一受後者影響的就是差距最小值 ϵ_{\min} ， I 值愈大，則 ϵ_{\min} 愈小， $I=1005$ 、2005 …… 7005 等七值， ϵ_{\min} 分別等於 0.1827662 、 0.8565373×10^{-1} 、 0.4220083×10^{-1} 、 0.2807532×10^{-1} 、 0.2296915×10^{-1} 、 0.2053784×10^{-1} 與 0.1997926×10^{-1} 。圖 1 說明了兩點。首先若線段總數 I 保持不變，且最小線段長 $\Delta\xi_{\min}$ 太短，但並未超過臨界點，增加其長，可減少差距 ϵ ，但是有一定的程度，一旦 ϵ 超過了極值 ϵ_{\min} ，增加其長反而增加差距 ϵ 。其次，對於任何線段總數 I ，一定可找到對應的最小差距 ϵ_{\min} ；若其值不恰當，例如大於 0.02，則必須增加線段總數，以減少對應之最小差距 ϵ_{\min} ，致使數值解更趨近於簡易近似解。

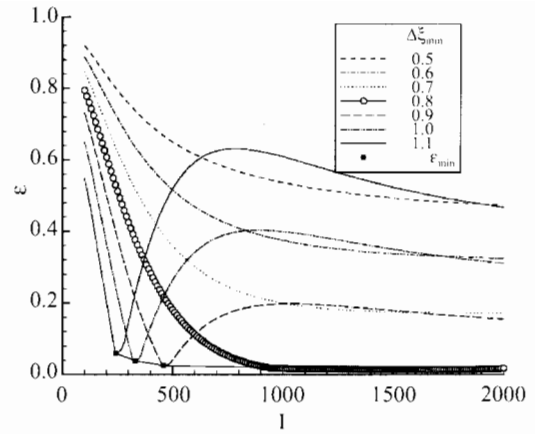


圖 12 線段總數 I 對差距 ϵ 之影響

2. 線段總數 I 之影響

類似圖 11，圖 12 改以線段總數 I 為水平座標軸，而以最小線段長 $\Delta\xi_{\min}$ 為參數。另外，以無因次時間 $\tau=10^9$ 為例，最小差距 $\epsilon_{\min}=0.1376161 \times 10^{-1}$ ，對應的 I 與 $\Delta\xi_{\min}$ 分別等於 1608 與 0.8。採用七個不同的 $\Delta\xi_{\min}$ ，0.5 至 1.1，間距為 0.1，圖型符號之意義同圖 11。圖 12 顯示線段總數 I 對差距 ϵ 之影響視參數 $\Delta\xi_{\min}$ 之大小而分成兩大類。一類是 $\Delta\xi_{\min}$ 小於 0.8， I 從 100 增加到 2000，差距成單調遞減趨勢，且緩慢地趨近於某一定值， $\Delta\xi_{\min}=0.5$ 、0.6 與 0.7， ϵ 大約分別趨近於 0.46、0.32 與 0.17，遠大於 0.02。另一類是 $\Delta\xi_{\min}$ 大於或等於 0.8，總線段 I 對差距 ϵ 之影響如圖 11， I 從 100 增加到 2000， ϵ 先呈遞減趨勢，而後再轉為遞增趨勢，故有極小值 ϵ_{\min} ，如實心方塊所示。只要 $\Delta\xi \geq 0.8$ ，都會呈現這種變化趨勢，且不受參數 $\Delta\xi_{\min}$ 的影響，但 $\Delta\xi_{\min}$ 愈接近 0.8，則 ϵ_{\min} 愈小。 $\Delta\xi_{\min}=1.1$ 、1.0、0.9 與 0.8 時， ϵ_{\min} 分別等於 0.06044567、0.03889029、0.02516913 與 0.01376350。因此，若最小線段長 $\Delta\xi_{\min}$ 業已設定其值，則尋找最適當的線段總數 I 須先判斷差距 ϵ 與 I 間之關係是否呈現單調遞減趨勢。若是，即代表設定的 $\Delta\xi_{\min}$ 值太小，須設定另一較大值，直到 ϵ 與 I 間之關係不再呈現單調遞減為止，而是先遞減後遞增，形成一極小值。一旦達到了這種地步，只要微小調整最小線段長 $\Delta\xi_{\min}$ ，就可找到對應之線段總

數 I ，使其差距介於 0.1 與 0.2 之間。這代表數值解已非常接近簡易近似解。

五、結 論

1. 以無因次時間 τ 介於 10^7 與 10^{12} 之間而言，系列值個數 K 採用 12 時，利用拉普拉斯轉換有限差分法而得之數值解最接近簡易近似解。
2. 若瞬時沉陷剖面以無因次沉陷量 η 與無因次徑向座標 ξ 之對數表之，則其關係曲線可分為靠近抽水井之直線段與遠離抽水井之曲線段，前者佔絕大部份。
3. 若差距 ϵ 在 0.01 與 0.02 間，數值解與簡易近似解幾乎完全重疊，除小部份之曲線段外，其差距大致佔了總差距之百分之七十五。
4. 非均勻格點間距採用拋物線型遞增方式，且線段總長 $\xi_{\max} = 5X'$ (式 8)，數值解與簡易近似解間之吻合程度視系列值個數 K 、抽水井所在之最小線段長 (頭兩格點間距之半) $\Delta\xi_{\min}$ 與線段總數 I 而定。
5. $K=12$ 時，無論 τ 值為若干， $\Delta\xi_{\min}$ 大致等於 0.8，但 I 隨著 τ 值的增加而遞增，大致介於 100 與 8000 之間。
6. K 採用 12，介於 10^7 與 10^{12} 間之任何 τ 值，皆可尋得各一適當之最小線段長 $\Delta\xi_{\min}$ 與線段總數 I ，致使由拉普拉斯有限差分法而得之數值解與簡易近似解間的差距 ϵ 介於 0.01 與 0.02 之間。

謝 誌

本研究承蒙經濟部前水資源局(現改名為水利署)之歷年經費補助及國科會專題研究計畫之經費補助，與淡江大學水資源及環境工程學系黃瑋芳與鍾琬喬兩位小姐之多方面協助，在此一致致上謝意。

參考文獻

1. 施清吉，「地層下陷簡易近似模式之構建」，農業工程學報，第四十九卷，第二期，

pp.13-22，2003。

2. 施清吉、李建興，「雲嘉地區地層下陷控制參數之探討」，農業工程學報，第四十七卷，第二期，pp.17-31，2001。
3. 施清吉，林茹琦，「抽取地下水導致地層下陷之近似模式」，農業工程學報，第四十六卷，第三期，pp.11-27，2000。
4. 施清吉，「超抽地下水導致孔隙壓變化之探討」，農業工程學報，第四十四卷，第三期，pp.9-24，1998。
5. 施清吉，「地層下陷與超額地下水抽取量間之關係分析」，土木水利季刊，第三卷，第二期，pp.1-16，1976。
6. Amsov, S., I., "Some Problems of Heat Conductivity Connected with Electric Welding", Transactions of the Leningrad Industrial Institute, no. 4 (Section of Physics and Mathematics), pp. 39-44, 1937.
7. Aziz, K. and Settari, A., Petroleum Reservoir Simulation, Elsevier Science, New York, p.476, 1979.
8. Moridis, G. J. and Reddell, D. L., "The Laplace Transform Finite Difference Method for Simulation of Flow Through Porous Media.", Water Resources Research, vol. 28, no. 8, pp. 1873-1884, 1991.
9. Segol, G., Classic Groundwater Simulations: Proving and Improving, Numerical Models, PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, pp. 33-42, 1994.
10. Stehfest, H., "Algorithm 368, Number Inversion of Laplace Transforms", Commun. Assoc. Comput. Mach., vol. 13, no. 1, 1970.

收稿日期：民國 92 年 7 月 14 日

修正日期：民國 92 年 8 月 8 日

接受日期：民國 92 年 8 月 18 日