

地層下陷簡易近似模式之構建

Construction for the Simple Approximate Solution in Land Subsidence

淡江大學水資源及環境工程學系教授

施 濟 吉

Ching-chi Shih

摘 要

一般而言，無限量地抽取地下水將導致地層持續下陷，且沉陷之範圍將不斷地擴大，依此條件而建立之地層下陷近似模式，其適用範圍為無因次時間 τ 必須小於 10^7 ；但在實際應用上， τ 值遠大於 10^7 ，甚至可高達 10^{12} 。因此，本研究根據在適用範圍之近似模式，另構建以簡單函數為主，且可適用於任何不同 τ 值之簡易近似模式，涵蓋之項目計有：最大瞬時沉陷量、瞬時沉陷範圍與瞬時沉陷剖面。

關鍵詞：地層下陷，地下水，貝塞爾函數。

ABSTRACT

With a view point of the acknowledgement that the continuous pumping of the groundwater will result in a continuous land subsidence and a continuous enlargement of the area of land subsidence, the approximate solution for land subsidence is applicable only if the value of the dimensionless τ is less than 10^7 . However, in the field application, values of τ are always greater than 10^7 , sometimes as high as 10^{12} . Based upon the approximate solution in its applicable range, another simple approximate solutions consisting of some simple functions are constructed, and the newly constructed simple approximate solutions include the maximum instantaneous amount of subsidence, the instantaneous area of subsidence and the instantaneous subsidence profile.

Keywords: Land subsidence, Ground Water, Bessel functions.

一、前言

地層下陷近似模式雖然已先後應用於多處沉陷區域(施, 2000(1), 與 2001), 例如屏東林邊、雲林嘉義、宜蘭等, 但未盡完善仍有待改進。首先, 近似模式為一包含第零階貝塞爾函數、第一階貝塞爾函數與指數函數之瑕積分, 並非一簡單函數之關係式, 目前只能仰賴數值積分, 但因其式頗為複雜, 以致在應用上相當不方便, 同時也不易了解事情相關之真相。另外, 近似模式包含兩個未知係數, 其值必須利用現有的調查資料與紀錄求得。為能反映歷年來之影響, 近似模式除用於推測外, 尚可反求其所包含之兩個未知係數值, 但是其值所呈現之歷年變化幅度頗大。其次, 在應用上, 不論抽水時間設為一年或半年, 通常呈現於被積函數的引數值都非常大, 加上來自貝塞爾函數與指數函數間的相互關係, 常導致計算結果之變化甚鉅。上述諸點正是本研究之重點, 期待對近似模式之深入探討後, 另構建一簡易近似模式。

二、理論分析

假設沉陷僅來自垂直方向之壓密, 且地下水流動也只侷限於水平面及所有相關係數與因子均視為不變之常數, 以其未抽水前的初始值 (Initial Value) 計, 則抽取自受壓飽和含水層 (Confined saturated aquifer) 之地下水而導致地層下陷, 將受制於下列偏微分方程式(施, 1976)。

$$\frac{\partial H'}{\partial t} = D_0 \left[\frac{\partial^2 H'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H'}{\partial r} \right] + \frac{N_0 Q}{A} \dots\dots\dots(1)$$

其中係數 D_0 與 N_0 , 俗稱為擴散係數與抽水係數分別定義為

$$D_0 = \frac{K}{\gamma(\alpha n + \beta)} \dots\dots\dots(2)$$

$$N_0 = \frac{C_c}{P(1+e)(\alpha n + \beta)} \dots\dots\dots(3)$$

上式中, t 與 r 分別為時間與徑向座標, 而因變數為沉陷量 H' ; n 、 e 、 C_c 、 K 與 α 為土層因子, 分別為孔隙率 (Porosity)、孔隙比 (Void ratio)、

壓縮指標 (Compression index)、滲透係數 (Permeability) 與顆粒骨架 (Gradular skelton) 壓縮係數, 另水的因子為單位體積重 γ 與壓縮係數 β , 流動因子為孔隙壓 (Pore pressure) P 、抽水量 Q (井面積為 A)。式(1)的初始條件為 $t \leq 0$ 時, $H'(r, t) = 0$, 而邊界條件為當 $r \rightarrow \infty$ 時, $H'(r, t) \rightarrow 0$, 另在井中心 ($r=0$), $\frac{\partial H'}{\partial r} = 0$, 即軸對稱。式(1)之分析解, 即近似模式為 (Amsov, 1937; 施, 1998)

$$\eta = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^2} J_0(\lambda \xi) J_1(\lambda) (1 - e^{-\alpha \lambda^2}) d\lambda \dots\dots\dots(4)$$

其中

$$\eta = \frac{\pi D_0 H'}{Q N_0} \dots\dots\dots(5)$$

$$\xi = \frac{r}{R} \dots\dots\dots(6)$$

$$\tau = \frac{D_0 t}{R^2} \dots\dots\dots(7)$$

呈現於式(6)與式(7)之 R 為抽水井半徑, J_0 與 J_1 分別為第零階與第一階貝塞爾函數 (Bessel function)。式(5)、式(6)與式(7)分別為無因次沉陷量、無因次徑向座標與無因次時間, 式(4)為一瑕積分 (Improper integral)。截至目前為止, 作者尚未找到相關的公式可省略式(1)之瑕積分, 改以無窮級數展開式表示之 (Magnus and Okerhettinger, 1954)。

三、結果與討論

參閱式(4), 其瑕積分之型式非常類似 Weber-Sonine 公式 (Magnus et. al., 1954)。若能利用此公式, 式(4)的瑕積分即可簡化為一無窮級數, 在計算上與分析上就更益方便了, 然而式(4)的瑕積分並不符合引用 Weber-Sonine 公式的條件, 其要求為貝塞爾函數之階數和必須大於分母的次方, 至少大於-1, 不能等於-1。但式(4)的階數和只等於 1, 分母的次方卻為 2。此外, 式(1)為一在極座標的擴散方程式, 但含一常數「源」, Q ; 若不含源, 大致可求得無瑕積分的分析解 (Glover, 1985)。因此, 式(4)的瑕積分只能暫時採

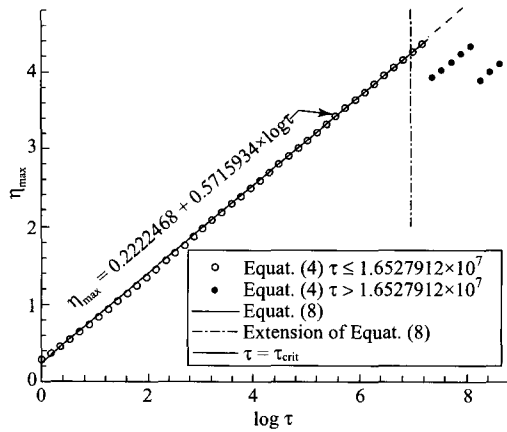


圖 1 $\tau \leq 10^7$ 之最大瞬時沉陷量

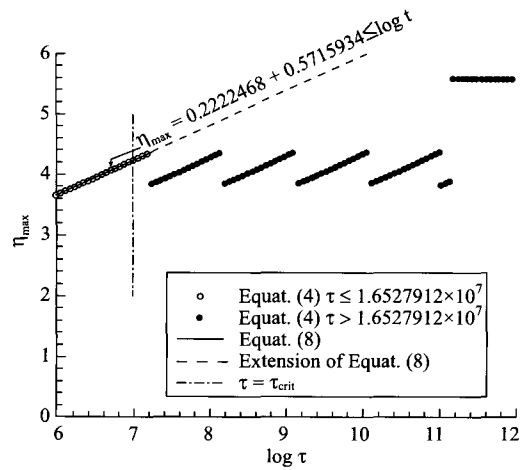


圖 2 $\tau > 10^7$ 之最大瞬時沉陷量

用數值積分，本文採用由梯形法 (Extended trapezoidal rule) 演變而得的辛普森法 (Gerald and Weatley, 1992; Atramowitz and Stegun, 1972; 施，1999; Press and Teukolsky and Vetterling and Flauerny, 1992)。

(一) 解析解之特徵

1. 最大瞬時沉陷量 η_{\max}

參閱式(1)，其邊界條件之一為瞬時最大沉陷量係發生在井中心 ($r=0$)，而無因次徑向座標 ξ 是取相對於抽水井半徑 R 之徑向座標 r ，故最大瞬時沉陷量 η_{\max} 係指 $\xi=0$ 的沉陷量。在抽水井附近之瞬時沉陷量 η 之變化最為急劇，且又需涵蓋相當大的沉陷範圍，因此展示於圖上之計算結果，其徑向座標 ξ 改用對數，而不採用一般十進位之表示法。故為了避免在計算上之困擾，最大瞬時沉陷量 η_{\max} 之發生處不再指井中心，而改為井壁，即 $\xi=1$ 或 $\log \xi=0$ 。

最大瞬時沉陷量 η_{\max} 隨著不同時間 t 或不同無因次時間 τ 之變化展示於圖 1 與圖 2。兩圖之水平座標軸與垂直座標軸皆分別為 $\log \tau$ 與 η_{\max} 。圖 1 之水平尺度為自 $\log \tau=0$ 至 8.4，而圖 2 則為自 $\log \tau=6$ 至 12，合併而言，水平尺度為自 $\log \tau=0$ 至 12，相當於 $\tau=1$ 至 10^{12} 。數據分布大致以 $\log \tau=7.218218$ 或 $16,527,912$ 的垂直線為界分成兩區，左區與右區，分別為自 $\log \tau=0$ 至 7.218218 與自 $\log \tau=7.218218$ 至 12。

圖 1 與圖 2 分別以左區與右區為主，並附另一區之部分數據以供比較，係因兩圖之水平尺度與垂直尺度各不相同。且為了簡便起見，將兩區的分界設為 $\tau_{crit}=10^7$ 或 $\log \tau_{crit}=7$ 。

(1) 無因次時間 τ 小於臨界值 τ_{crit}

參閱圖 1，自 $\log \tau=0$ 至 7.218218，由式(4)計算而得之最大瞬時沉陷量 η_{\max} 以空心圓表示， $\log \tau$ 大於 7.218218 的計算結果則以實心圓表示。空心圓之分佈相當有規則性與一致性，且其分佈非常明顯地展示出最大瞬時沉陷量 η_{\max} 與 $\log \tau$ 間的函數關係，實可表為一單調遞增直線，如實線所示，即

$$\eta_{\max} = 0.2222468 + 0.5715934 \cdot \log \tau, \quad \tau < \tau_{crit} \quad \dots\dots\dots(8)$$

式(8) τ_{crit} 為上述臨界值；另，虛線為實線的延線。式(8)或圖 1 空心圓之分佈指出最大瞬時沉陷量 η_{\max} 隨著無因次時間 τ 的增加而增加。這與抽水時間愈長，在井壁之沉陷量就愈大，或持續抽水則沉陷不斷之觀念不謀而合。換言之，只要無因次時間 τ 不超過其臨界值 τ_{crit} ，由式(4)求得之最大沉陷量 η_{\max} 與其趨勢是合理的。因此，若 τ 小於 τ_{crit} ，不需式(4)之瑕積分，即可直接引用式(8)求其對應的最大瞬時沉陷量 η_{\max} 。

(2) 無因次時間 τ 大於臨界值 τ_{crit}

無因次時間 τ 小於其臨界值 τ_{crit} ，圖 1 的主

要特徵即為展示數據分佈之規則性與一致性；而圖 2 恰好相反。參閱圖 1 與圖 2 的實心圓，由其分佈即可發現一旦無因次時間 τ 超過其臨界值，最大瞬時沉陷量 η_{\max} 並不沿著原來的遞增趨勢持續遞增，而是突然下降，幾乎在同一 τ 值，形成一非常明顯的不連續，其特徵為階梯性 (Step)。若以 $\log \tau$ 介於 7 至 12 的範圍而言，其間大致可分為五個週期，第一個週期大約自 $\log \tau = 7$ 至 8，而後四個週期之分界較為明確，自 $\log \tau = 8$ 至 9，自 $\log \tau = 9$ 至 10，自 $\log \tau = 10$ 至 11 與自 $\log \tau = 11$ 至 12，如圖 2 所示。五個週期剛好介於十的七次方至十二次方之間，幾乎是每一個次方就有一個週期，相當有趣，但其理由並不得而知。前四個週期，最大瞬時沉陷量 η_{\max} 與 $\log \tau$ 間的函數關係也是呈現單調遞增的走向。若比較圖 2 左上角之空心圓與前四個週期的實心圓，由其分佈即可發現它們的斜率幾乎都相同。更有趣的是，這四個週期的實心圓，其分佈都是起自於同一最大瞬時沉陷量 η_{\max} ，大約等於 3.6，也同時終止於另一同一最大瞬時沉陷量 η_{\max} ，而其間的變化幅度都只介於 3.6 至 4.4 之間。最後一個週期，自 $\log \tau = 11$ 至 12，最大瞬時沉陷量 η_{\max} 與 $\log \tau$ 間之函數關係除了顯示前述單調遞增的小片段外，大約自 $\eta_{\max} = 3.6$ 至 3.8；與前四個週期不同的是，其後還有一大片段是最大瞬時沉陷量 η_{\max} 保持不變的水平分佈。最後，由上述討論，即可得知最大瞬時沉陷量 η_{\max} ，不但決定於無因次時間 τ 之多寡，而且視小於其臨界值 τ_{crit} 與否決定，如圖 1 與圖 2 所示。

式(4)之近似模式係一瑕積分，被積函數包含第零階貝塞爾函數 $J_0(\lambda\xi)$ 、第一階貝塞爾函數 $J_1(\lambda)$ 與指數函數 $\exp(-\tau\lambda^2)$ ， λ 為積分變數；前兩者分別類似於三角函數的 $\cos(\lambda\xi)$ 與 $\sin(\lambda)$ 。三角函數與貝塞爾函數皆有無窮個零點 (Zeros) 或根的週期函數 (Kreszig, 1967; Wylie, 1960)。但是，這兩種函數的最大差異在於三角函數的振幅保持不變，始終等於 1，然而，貝塞爾函數之振幅是愈來愈小的，故當呈現於括弧內的引數值為較小時，其函數值只呈現單調遞增的趨勢；可

是，一旦引數值超過某一臨界值，則其函數值的變化就轉為較複雜，但視無因次徑向座標 ξ 的大小而略有差異，分兩方面討論於下。首先，若無因次徑向座標 $\xi = 1$ ，式(4)的函數值即為最大瞬時沉陷量 η_{\max} 。只有第零階貝塞爾函數 J_0 的引數包含 ξ ，而又類似於 \cos ，所以式(4)的函數值必定大於 0。這說明了為何圖 1 與圖 2 的空心圓都在水座標軸之上，而圖 2 的實心圓則明顯地展示其週期性的變化。另一方面，若 ξ 值很大，式(4)之函數值，即瞬時無因次沉陷量 η ，就可能小於 0，但其值非常接近 0，而且週期性之變化並不明確，故只能說相當不規則。這些現象將詳細展示於爾後之相關圖上。

基於抽水時間愈長沉陷將愈大之觀念，則式(8)的單調遞增趨勢是合理的；因此，無因次時間 τ 大於其臨界值後 τ_{crit} 後的最大瞬時沉陷量 η_{\max} 與無因次 τ 的函數關係應如圖 2 的虛線所示。然而，就此觀點而論，由式(4)求得之結果就顯得相當不合理，因為圖 2 的實心圓不但皆位於虛線之下，而且還多處出現無法解釋的突降與水平段。所以，在應用上，式(4)只能引用於 $\tau \leq \tau_{crit}$ ；若 $\tau > \tau_{crit}$ ，則需改以式(8)的延線予以取代。

2. 瞬時沉陷範圍

自井壁 ($\xi = 1$) 起，到瞬時沉陷量 η 遞減至非常小，此徑向範圍定義為瞬時沉陷範圍 ξ_{\max} 。本文分別採用兩種不同的條件，即 $\eta_{\min} = 0.01 \times \eta_{\max}$ 與 $\eta_{\min} = 0$ 。從 $\xi = 1$ 起，利用式(4)尋找何處之瞬時沉陷量 $\eta = \eta_{\min}$ ，再以其處之 ξ 值作為 ξ_{\max} 。尋找範圍自 $\log \xi = 0$ 至 $\log \xi = 10(1 + 0.5 \log \tau)$ 。若尋找之範圍小於 100，則可直接逐不同的 ξ 值，間距為 1，由小而大尋找何處之瞬時沉陷量最先符合上述條件。若尋找範圍超過 100，則需先分段尋找，將範圍分成 100 個等分，共 101 個格點，利用式(4)，由左至右，逐格點計算其瞬時沉陷量 η ，直到 $\eta < \eta_{\min}$ 為止。而後，檢查其與前一格點之間距是否大於 100，倘若大於 100，則此間距需再分成 100 個等分，最多 2 次 100 等分。如果間距小於 100，便採用上述直接方式， ξ 的間距為 1。尋找的範

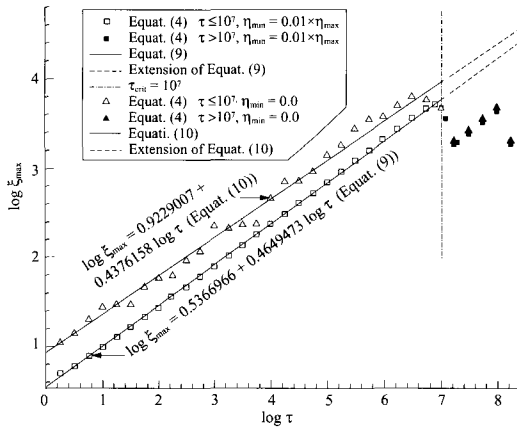


圖 3 $\tau \leq 10^7$ 之瞬時沉陷範圍

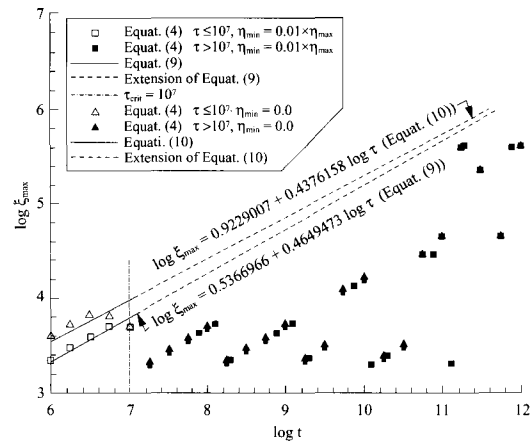


圖 4 $\tau > 10^7$ 之瞬時沉陷範圍

圍視無因次時間 τ 而定，其值愈大，則對應尋找範圍也就愈大。為了方便起見，本研究只好先分段尋找，其間距遠大於1。但是，採用這種方法所求得的结果往往因不同的等分而略有差異。不過利用這種方法求得之瞬時沉陷範圍，通常其內瞬時沉陷量 η 之變化幾乎都是隨著 ξ 值之增加，而呈單調遞減之趨勢，但也有少數例外。

類似於最大瞬時沉陷量 η_{max} ，一般也同樣有抽水時間愈長沉陷範圍也就愈大，抽水時間持續增長，瞬時沉陷範圍也持續擴大之共識。依此概念，由(4)計算而得的结果分別展示於圖3與圖4，其型式分別類似於圖1與圖2，但圖形符號不再以圓表示；另，垂直座標軸改為瞬時沉陷範圍 ξ_{max} 之對數值。類據的分界仍為 $\tau_{crit} = 10^7$ 。

(1) 無因次時間 τ 小於臨界值 τ_{crit}

參閱圖3，自 $\log \tau = 0.25$ 至7.0，由式(4)計算而得的瞬時沉陷範圍 δ_{max} 以空心圖形符號表示，而實心圖形符號則為 $\log \tau$ 大於7.0的計算結果，另點虛線為數據之分界線。不論是型式或特徵，圖3非常類似圖1。無因次時間 τ 小於 10^7 的數據相當聚集分佈於一條直線上，其迴歸式(以實線表示)為

$$\log \xi_{max} = 0.5366966 + 0.4649473 \log \tau, \quad \tau < 10^7 \dots(9)$$

$$\text{與 } \log \xi_{max} = 0.9229007 + 0.4376158 \log \tau, \quad \tau < 10^7 \dots\dots\dots(10)$$

式(9)與式(10)的範圍界定條件 η_{min} 分別為0.01

η_{max} 與0.0，圖形符號分別為方塊與三角形。兩直線之斜率非常接近，幾乎相互平行。式(10)的迴歸線位於式(9)之上，因前者採用較鬆之界定範圍條件， $\eta_{min} = 0.0$ 。圖3虛線為實線之延線，位於分界線 $\tau_{crit} = 10^7$ 之右，其下並展示少部分無因次時間 τ 大於 10^7 的數據(實心圖形符號)，其分佈相當不規則，非常不同於其左的數據分佈(空心圖形符號)。比較圖3與圖1空心圖形符號，即可發現前者之數據分佈略不同於後者，並不是完全聚集於實線上。尤其是三角形圖形符號的分佈，稍微呈現鋸齒狀遞增；在無因次時間 τ 接近於其臨界值 τ_{crit} 時，這種現象更為顯著。此種不平滑的現象是由多種因素組成的，例如貝塞爾函數的週期性、式(4)被積函數為兩貝塞爾函數之乘積(一類似 \cos ，另一類似 \sin)、振幅隨著 ξ 值的增加而遞減、及界定瞬時沉陷範圍略受等分之影響等等。

在應用上，式(9)與式(10)極為方便。若無因次時間 τ 小於其臨界值 τ_{crit} ，則對於任何已知的 τ 值，都非常容易由式(9)或式(10)求得其對應之瞬時沉陷範圍 ξ_{max} ，因為式(9)與式(10)均為顯函數；而由已知的 η 值求其對應之 ξ_{max} 值，式(4)為一隱函數。雖然式(9)與式(10)係由式(4)間接求得的迴歸式，但是，由此數據分佈與實線間之密切吻合，即可知其所陳述的事實當可置信。

(2) 無因次時間 τ 大於臨界值 τ_{crit}

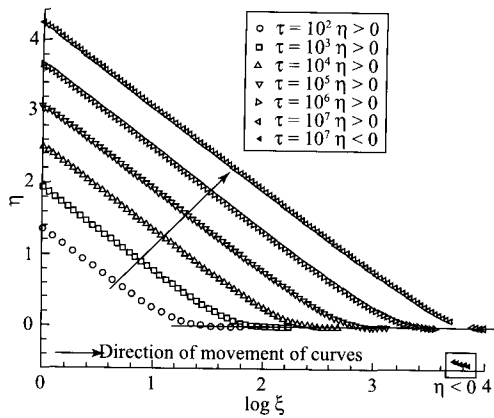


圖 5 $\tau \leq 10^7$ 之瞬時沉陷剖面

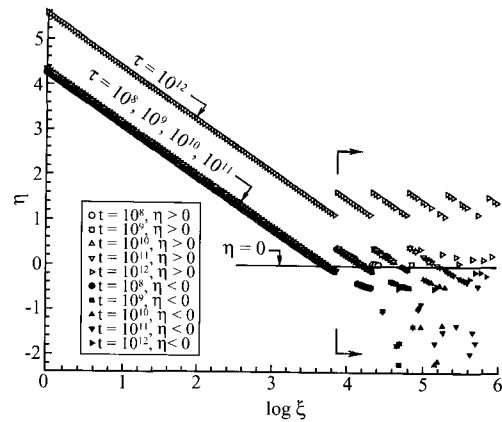


圖 6 $\tau > 10^7$ 之瞬時沉陷剖面

同樣地，圖 4 也是用於展示無因次時間 τ 大於 10^7 之後，其數據分佈的不規則性與不一致性，其程度更甚於圖 2。參閱圖 4，瞬時沉陷範圍 δ_{\max} 似乎不太受範圍界定條件 η_{\min} 之影響，因多處呈現不同圖形符號重疊。另外，數據分佈似乎可歸併成數條自左下向右上傾斜的數據串。每一條數據串的斜率，大都相同，且大致平行於式(9)與式(10)的延線，但是均為相當明顯的不連續。所以，圖 4 的數據分佈實在無法提供任何明確且簡單之相互關係，如式(9)與式(10)。

3. 瞬時沉陷剖面

無因次時間 $\tau = 10^2$ 至 10^{12} ，間距為十倍之瞬時沉陷剖面展示於圖 5 與圖 6。前者之 τ 值自 10^2 至 10^7 ，計有六個不同的 τ 值，以空心圖形符號表示之；而後者自 10^8 至 10^{12} ，有五個不同的 τ 值，以實心圖形符號表示。瞬時沉陷範圍 δ_{\max} 採用式(10)，即 $\eta_{\min} = 0.0$ 。兩圖的水平座標軸均為無因次徑向座標 ξ 對數值，垂直座標軸為瞬時沉陷量 η 。圖 5 與圖 6 是針對無因次時間 τ 小於或大於其臨界值 $\tau_{crit} = (10^7)$ 時所呈現的不同特徵，以配合前述四圖。

圖 5 共有六條曲線，其走勢均相同；瞬時沉陷皆起自井壁之最大瞬時沉陷量 η_{\max} ，而後隨著離井中心距離 ξ 的增加而逐漸趨近於 0。以 η 與 $\log \xi$ 而言，這六條曲線充分顯示其間的規律性與一致性。不同的 τ 值之瞬時沉陷剖面都

大致可分為兩段：一是瞬時沉陷量較為明顯的直線段，另一是 η 較小的曲線段，瞬時沉陷剖面係以直線段為主，佔相當大的範圍。圖 5 顯示這六條直線段幾乎是以等距錯開，而且似乎相互平行，如箭頭所示。另外，圖 5 的瞬時沉陷剖面充分顯示其連續性，只有在無因次時間 $\tau = 10^7$ 與無因次徑向座標 ξ 甚大時，才不連續，如右下方框內的實心符號。

類似圖 2 與圖 4，無因次時間 τ 超過 10^7 後的不規則性與不一致性同樣呈現於圖 6，計有五個不同 τ 值的瞬時沉陷剖面， $\tau = 10^8$ 、 10^9 、 10^{10} 、 10^{11} 與 10^{12} ，另一條水平線代表瞬時沉陷量 $\eta = 0$ ，其上的數據以空心圖形符號表示，而其下的數據改以實心圖形符號表之。瞬時沉陷剖面仍然包含兩段：直線段與曲線段，如圖 5。直線段同樣呈現自左上向右下的走向，其斜率似乎與圖 5 直線段的斜率相同，但是其間的間距相當不一致。 $\tau = 10^8$ 、 10^9 、 10^{10} 與 10^{11} 的四條瞬時沉陷剖面幾乎重疊，但 $\tau = 12$ 的瞬時沉陷剖面卻陡然上升。五個不同 τ 值的曲線段非常紊亂，其範圍示於兩箭頭的右邊，大約落於 $\log \xi = 3.8$ 的右邊。

(二) 簡易近似模式之構建

由前節之討論，得知式(4)之近似模式，其適用範圍為無因次時間 τ 必須小於 10^7 ；另外，由於式(4)為一瑕積分，以至於應用上仍然相當不

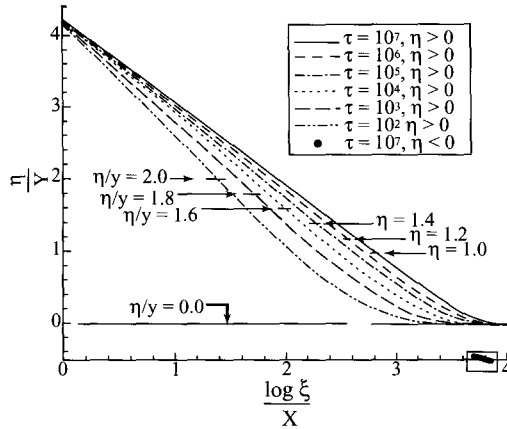


圖 7 尺度化之瞬時沉陷剖面(一)

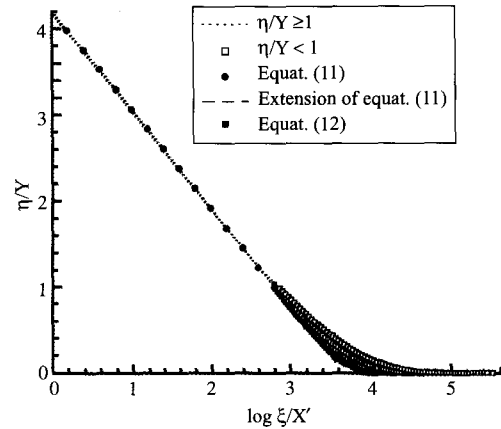


圖 8 尺度化之瞬時沉陷剖面(二)

方便。因此，為方便應用，即在此適用範圍內尋求另一簡易函數關係式，並擴大此簡易近似模式之適用範圍，其項目計有：最大瞬時沉陷量 η_{\max} ，瞬時沉陷範圍 η_{\max} 與瞬時沉陷剖面。構建簡易近似模式的邏輯甚為直接與簡單。於式(4)之適用範圍，充分詳盡探討解析解(式(4))之特徵，詳述於前節，並由其計算結果尋求簡易函數關係，儘可能簡化為線性關係式，以便引申及擴大適用範圍。利用這種方式而得知之簡易近似模式有最大瞬時沉陷量 η_{\max} 與瞬時沉陷範圍 η_{\max} ；前者示於式(8)，而後者則示於式(9)或式(10)，這三式不再有適用範圍之限制。

式(4)之近似模式為三者之關係式，即無因次沉陷量 η ，無因次徑向座標 ξ 與無因次時間 τ 。所以瞬時沉陷剖面之簡易近似模式，除了延用前段之方法外，還需尋求瞬時沉陷面之相似解 (Similarity solution)。若無因次時間 τ 視為參數，則需將其影響併入兩座標軸，其建構模式程序詳述於下兩段。

示於圖 5 的六條瞬時沉陷剖面，其曲線形狀頗為相似。故以無因次時間 $\tau = 10^7$ 時之瞬時沉陷剖面為基準，推求適當尺度，構建圖 5 之相似解 (Similarity solution)。水平尺度 X 與垂直尺度 Y 分別由式(10)與式(8)構建而得，即 $X = (0.9229007 + 0.4376158 \times \log \tau) / 3.9862113$ 與 $Y = (0.2222468 + 0.5710983 \times \log \tau) / 4.222433$ ，其中 3.9862113 與 4.222433 分別為 $\tau = 10^7$ 時的瞬時沉陷範圍

ξ_{\max} 與最大瞬時沉陷量 η_{\max} 。針對新的水平座標軸 $\log \xi / X$ 與垂直座標軸 η / Y ，圖 5 轉換為圖 7，最大瞬時沉陷量 η_{\max} / Y 大致介於 4.184 與 4.230 之間，而瞬時沉陷範圍 $\log \xi_{\max} / X$ 大約等於 3.987。瞬時沉陷剖面藉助於座標軸轉換，朝向 $\tau = 10^7$ 的瞬時沉陷剖面移動。新的瞬時沉陷剖面仍然可分為兩段：直線段與曲線段。直線段的範圍視 τ 值而定， $\tau = 10^7, 10^6, 10^5, 10^4, 10^3, 10^2$ ，其範圍之下界分別為 $\eta / Y = 1.0, 1.2, 1.4, 1.8$ 與 2.0，以一小水平線示於圖 7，而其斜率又分別等於 $1/8686358, 1/84381621, 1/0.8120270, 1/7699275, 1/0.7117938$ 與 $1/6273972$ 。六條直線段幾乎為同一頂點。因此，再以 $\tau = 10^7$ 的直線段為基準，調整其餘五條直線段之斜率。這就相當於再度調整水平尺度 X ，縮小其值，但是 $\tau = 10^7$ 的水平尺度仍然維持為 1。以 $\tau = 10^6$ 的直線段為例，新的水平尺度 $X' = X \times 0.8438162 / 0.8686358 = X \times 1.029143$ 。利用新的水平尺度 X' 與原來的垂直尺度 Y ，圖 7 再轉換為圖 8。

圖 8 的水平座標軸與垂直座標軸分別為 $\log \xi / X'$ 與 η / Y ，直線段的數據為 $\eta / Y \geq 1$ ，以“點”表示，而曲線段的數據為 $\eta / Y < 1$ ，以空心方塊表示。很明顯地，由圖 8 可看出其瞬時沉陷剖面的直線段幾乎凝聚成一直線，顯示其部份存有一線性相似解，這範圍之下界大約為 $\log \xi / X' = 3.0$ ，其上之迴歸式為

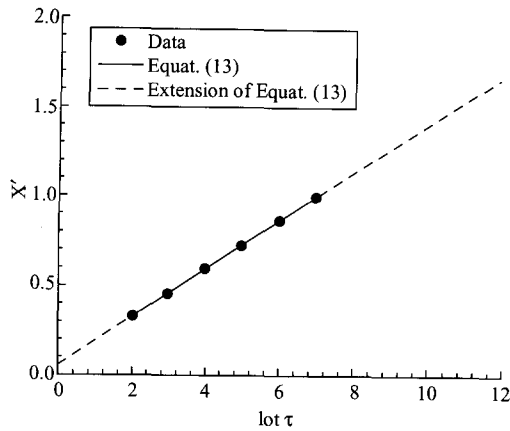


圖 9 水平座標尺度 X' 之變化

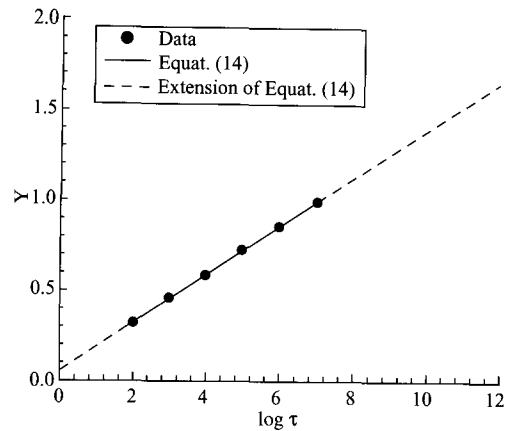


圖 10 垂直座標尺度 Y 之變化

$$\frac{\eta}{Y} = 4.210146 - 1.144316 \frac{\log \xi}{X'}, \quad \frac{\log \xi}{X'} \leq 3.0 \quad (11)$$

以實心圓示於圖 8，而虛線為其延線。另外，曲線段之數據（空心方塊）顯示其數據分佈較不凝聚；但為方便起見，本研究仍以非線性迴歸式表之，即

$$\frac{\eta}{Y} = -0.094631 \left(\frac{\log \xi}{X'} \right)^3 + 1.45755 \left(\frac{\log \xi}{X'} \right)^2 - 7.42357 \left(\frac{\log \xi}{X'} \right) + 12.50611, \quad 5 \geq \frac{\log \xi}{X'} > 3.0 \quad \dots\dots\dots(12)$$

以實心方塊示於圖 8 之右下方。最後，示於圖 8 兩尺度， X' 與 Y ，其值視 τ 值而定，分別展示於圖 9 與圖 10，兩圖之水平座標軸均為 $\log \tau$ ，兩尺度與 $\log \tau$ 間之函數關係分別為

$$X' = 0.05530222 + 0.1349036 \log \tau \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$\text{與 } Y = 0.05322652 + 0.1352534 \log \tau \quad \dots\dots\dots(14)$$

式(13)與式(14)之斜率與截距幾乎相同，顯示原來曲線之位移方向為向右上方的四十五度，如圖 5 箭頭所示。

綜合上述探討與分析，地層下陷簡易近似模式由六式組成，式(8)、式(10)至式(14)。

(三) 簡易近似模式之應用

沉陷區域採用雲林與嘉義兩縣之沿海地區，雲林縣有五個鄉：麥寮、台西、四湖、口湖與水林；而嘉義縣也有二個鄉：東石與布袋。雲

林縣有九口井，嘉義縣有兩口觀測井，故分成十一個沉陷區（即抽水區），每一區以設置觀測井之所在為基點，且以此命名之，即分別為中山、蚊港、溪頂、廣溝、四湖、金湖、塹底、大溝村、水林、東石與新塢。本研究以廣溝為例，四湖鄉包含兩區，廣溝與四湖。依民國八十一年雲林沿海地區水井普查報告，得知四湖鄉該年抽水量為 $42,757,338 \text{ m}^3$ 。另外，根據井徑分類統計與使用日數統計可求得井徑與抽水時間之期望值或代表量，其結果分別為 0.1077 m 與 70.78 日。故廣溝與四湖兩區的井半徑 R 都採用同一 0.1077 m ，抽水時間 t 也採用同一 70.78 日。易言之，四湖鄉的所有抽水井（共有 3530 口）簡化為在廣溝與四湖各設置一口同樣口徑之抽水井，而且同樣的抽水時間，但各井之抽水量並不相同（詳討論下）。八十一年雲林沿海地區五鄉之年抽水量為 $346,165,161 \text{ m}^3$ ，依據每一個觀測井所控制面積之大小，按比例分配，廣溝與四湖之年抽水量分別等於 $17,940,636.66 \text{ m}^3$ 與 $32,893,204.91 \text{ m}^3$ ，其和為 $50,844,841.59 \text{ m}^3$ ，並不等於 $42,757,338 \text{ m}^3$ （水井普查報告），這是由於觀測井之控制面積與行政面積並不相等。此外，根據實測地下水位記錄，同一年度廣溝與四湖之地下水位變率 $\partial h / \partial t$ 分別為 -3.19 m/年 與 -2.36 m/年 ，利用 $Q = -A_{cs} \partial h / \partial t$ ，式中， A_{cs} 為受壓飽和含水層平面面積，係一虛設係數，就可求得廣溝與四湖之 A_{cs} 分別等於 $5,624,024.033 \text{ m}^2$ 與 $13,937,798.69$

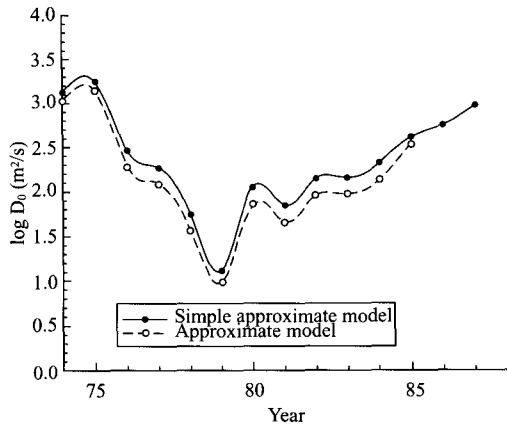


圖 11 雲林縣廣溝擴散係數之歷年值

m^2 (施, 2002(2))。利用沉陷區之 A_{cs} 值, 就可由歷年地下水位變率 $\partial h/\partial t$ 換算成年抽水量 Q 。根據上述數據, 如果擴散係數 D_0 以 $1 m^2/s$ 計, 則由式(7)即可求得無因次時間 τ 約等於 5.838×10^8 , 其值遠超過近似模式之適用範圍, 參閱式(4), 故須改採用簡易近似模式。最後, 如前言所述, 近似模式除了用於推測外, 也同時用於反求以往歷年之 D 值, 簡易近似模式也如此。

1. 反求擴散係數之歷年值

參閱文獻施與李, 2001, 歷年之沉陷量 H' 與地下水位變率 $\partial h/\partial t$ 分別列於表六與表七, 經由計算而得之抽水係數 N_0 與擴散係數 D_0 , 其歷年值分別列於表五與表八。不論採用近似模式或簡易近似模式, 反求擴散係數之歷年值都只針對該區(廣溝)抽水而導致之沉陷, 並不計其他區抽水之影響, 因其影響隨著距離之增加而顯著的遞減, 故只須採用式(8)即可。無因次時間 τ 與無因次沉陷量 η 分別定義於式(7)與式(5), 而在 $\xi = 1$ 之 η 值即為最大瞬時沉陷量。以反求擴散係數之歷年值而言, 式(8)為一非線性方程式, 可採用一般的試誤法求其根。輸入 H' 、 $\partial h/\partial t$ 、 N_0 、 R 、 t 與 $A_{cs}(Q = -A_{cs} \partial h/\partial t)$ 等值即可求得 D_0 值。計算結果以空心圓圖形符號展示於圖 11, 另近似模式之計算結果也以空心圓圖形符號一併展示以供比較(後者取自文獻施與李, 2001, 表 8)。跨越年度為自民國七十四年至八十七年, 示於水平座標軸, 垂直座標軸為擴散係數 D_0 , 取對數。

參閱圖 11, 空心圓圖形符號與實心圓圖形符號分別代表利用式(4)與式(8)反求而得之 D_0 值; 兩者之分佈趨勢極為相似, 但前者均位於後者之下方。這兩種特徵都與最大瞬時沉陷量息息相關。參閱式(5), 擴散係數 D_0 與無因次瞬時沉陷量 η 成正比; 因 $\xi = 1$, 故改與最大瞬時沉陷量 η_{max} 成正比。而今, 式(8)係根據式(4)之計算結果求得之迴歸式, 所以分佈趨勢之相似早在意料當中。另外, 圖 2 又顯示如果無因次時間 τ 大於 10^7 , 由式(4)計算所得之最大瞬時沉陷量都偏低, 均落於式(8)的延線之下方。這政說明的為何空心圓圖形符號通通落在實心圓圖形符號之下方。

2. 簡易近似模式之預測

仍然以抽水井設於廣溝為例, 井半徑 $R=0.1077m$ 。示於式(8)及式(10)至式(14)之簡易近似模式是以沉陷量 H' , 抽水量 Q , 沉陷點與抽水井徑向之距 r 為主之關係式; 但是, 井半徑 R 、抽水時間 t 及兩係數 D_0 與 N_0 等值均須為已知。若沉陷點為金湖, 則 r 為 $8371.1m$; 廣溝的抽水時間 t 設為 100 日。另外, 廣溝的兩係數 D_0 與 N_0 之估算值可由對應之歷年值估算而得, 以採用最近四年之平均值為例, $N_0=7.490343$ (施, 2001, 表五十五), $D_0=509.6094m^2/s$ (圖 11)。由式(6)與式(7)分別得知 $\xi = 8371.1/0.1077 = 77726.091$, $\tau=509.6094 \times 100 \times 60 \times 60 \times 24/0.1077/0.1077=3.795943 \times 10^{11}$; 兩尺度 X' 與 Y 可分別由式(13)與式(14)求得, 即 $X'=1.617394$, $Y=1.619379$ 。式(11)與式(12)之選擇視 $\log \xi / X'$ 而定; 今 $\log \xi / X' = \log 77726.091 / 1.617394 = 3.023733$, 介於 3 與 5 之間, 故採用式(12), 得知 $\eta / Y = 0.769384$, 故 $\eta = 1.24592$ 。如果沉陷點設於廣溝, 則其沉陷量即為最大瞬時沉陷量, 其值可由式(8)計算而得, $\eta_{max} = 6.840910$ 。近似模式與簡易近似模式的主要特徵之一就是式(5)。抽水井與沉陷點分別設於廣溝與金湖, 則金湖之沉陷量 H' 與廣溝之抽水量 Q 成正比, 其值為, $N_0 \eta / \pi / D_0$, 其中 $\eta = 1.24592$ 。若廣溝的年水量設為 $20,000,000m^3$ (抽水時間為 100 日), 則金湖的沉陷量等於 $0.0134393m$; 抽水量增加一倍, 沉陷量也跟著增加一倍, 反之亦然。由於簡

易近似模式之函數關係式相當簡單，由沉陷量推估抽水量以及其他各種情況之應用都非常明顯。所有應用之關鍵除了決定於兩係數之估算值是否恰當外，也決定於其他相關因子之值是否合理。

四、結論

1. 一般而言，無限量地抽取地下水將導致地層持續沉陷，且沉陷之範圍將不斷地擴大，依此條件而建立示於式(4)之地層下陷近似模式，其適用範圍為 $\tau \leq 10^7$ 。
2. 在適用範圍內，由式(4)求得之計算結果極具一致性與規則性。
3. 根據近似模式，在其適用範圍內構建而得之簡易近似模式於引用上相當方便。
4. 式(9)除外，由式(8)至式(14)組成簡易近似模式，大部分為線性方程式。
5. 式(4)之解析解為一含貝塞爾函數之瑕積分，其不規則性與不一致性大約呈現自 $\tau = 10^7$ 。

謝 誌

本研究承蒙經濟部前水資源局(現改名為水利署)之歷年經費補助，與淡江大學水資源及環境工程學系黃瑋芳與鍾琬喬兩位小姐之多方面協助，在此一併致上謝意。

參考文獻

1. 施清吉，「地層下陷與超額地下水抽取量間之關係分析」，土木水利季刊，第三卷，第二期，pp.1-16，1976。
2. 施清吉，「超抽地下水導致孔隙壓變化之探討」，農業工程學報，第四十四卷，第三期，pp. 9-24，1998。
3. 施清吉，「屏東縣林邊地區地層下陷控制參數之探討」期末報告，經濟部水資源局，88EC2B37006，1999。
4. 施清吉、林茹琦，「抽取地下水導致地層下陷之近似模式」，農業工程學報，第四十六

- 卷，第三期，pp. 11-27，2000(1)。
5. 施清吉，「雲嘉地區地層下陷控制參數之探討」期末報告，經濟部水資源局，MOEA/WRB—8900039，2000(2)。
6. 施清吉、李建興，「雲嘉地區地層下陷控制參數之探討」，農業工程學報，第四十七卷，第二期，pp. 17-31，2001。
7. Amosov, S. I., "Some Problems of Heat Conductivity Connected With Electric Welding", Transactions of the Leningrad Industrial Institute, no.4 (Section of Physics and Mathematics), pp.39-44, 1937.
8. Abramowitz, M. and Stegun, I. A., Handbook of Mathematical Functions, Dover Pub. Inc., New York, pp. 369-370, 1972.
9. Gerald, C. F. and Wheatley, P. C., Applied Numerical Analysis, Addison-Wesley Pub. Co., New York, pp. 324-328, 1992.
10. Glover, R. E., Transient Ground Water Hydraulics, Book Crafters, Chelsea, Michigan, pp. 57-65, 1985.
11. Kreyszig, E., Advanced Engineering Mathematics, John Wiley and Sons, Inc, New York, pp. 187-189, 1967.
12. Magnus, W., and Okerhettinger, Fritz, O., Formulus and Theorems for the Functions of Mathematical Physics, translated by Wermer, J., Chelsea Pub. Co., New York, p. 35, 1954.
13. Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P., Numerical Pecipies in Fortran, Cambridge University Press, pp. 102-104, 123-127,135-138, 1992.
14. Wylie, C. R. Jr., Advanced Engineering Mathematics, pp. 410-413, 1960.

收稿日期：民國 92 年 3 月 5 日

修正日期：民國 92 年 4 月 18 日

接受日期：民國 92 年 4 月 25 日