



遲滯土壤水分傳輸數值模式之研究

A Study of Water Transport Model with Hysteresis

國立台灣大學
生物環境系統工程學系
研究助理

王銘燦

Ming-Tsan Wang

中國技術學院
土木工程學系
教授

陳主惠

Chu-hui Chen

國立台灣大學
生物環境系統工程學系
教授

譚義績

Yih-Chi Tan

摘 要

於未飽和層土壤中隨著乾燥與潮濕的歷程而有遲滯現象的發生，許多土壤水分傳輸之研究因為遲滯現象的複雜性而將之忽略。而描述遲滯土壤水分傳輸現象之控制方程式為理查方程式，在考慮遲滯現象的狀況下，解析解無法求得，所以使用數值解解之。此模式結合了 van Genuchten 的參數模式及 Scott(1983)遲滯模式觀念，為了達到質量平衡，本研究採用混合型理查方程式探討遲滯土壤並用有限差分法來做數值離散，並與實驗結果作比較。

關鍵詞：遲滯現象，理查方程式，有限差分法，土壤保水曲線。

ABSTRACT

Hysteresis occurs during wetting and drying process in unsaturated soils. Most studies are ignored about hysteresis because of its complication. Because of governing equation of unsaturated flow is nonlinear equation, and its analytic solution can't be obtained easily. Therefore, the numerical scheme is developed for this method. The model is based on a combination of van Genuchten's parametric models and Scott's hysteretic model. For the purpose of mass balance, finite difference method is used to solve the mix form of Richards equation in the study, and it compared with the experiment data.

Keywords: Hysteresis, Richards equation, Finite difference method.

一、前言

一般在解土壤入滲之解析解時，會將初始條件及邊界條件簡化，但事實上初始條件有空間的變異性，邊界條件有時間上的變異性，因此需使用數值解才能解複雜的入滲與蒸發問題。而在土壤水分傳輸過程當中，水分狀態及含量不斷地變化，包括土壤含水量、水頭及水力傳導係數之間複雜的關係，並因遲滯現象(Hysteresis)而更為複雜。圖 1 為土壤中含水比與壓力水頭關係圖，其為土壤水分特性曲線，亦可稱為土壤水分保水曲線(soil-moisture retention curve)，在乾燥與潮濕過程當中其保水曲線並非單一的曲線，自飽和到乾燥的過程為主要乾燥曲線，自乾燥到飽和為主要潮濕曲線，並且再乾燥潮濕的交替過程中又有其複雜性。在數值運算中通常將此一效應忽略不考慮，而只考慮單一之保水曲線。本文將遲滯效應納入數值計算中，並作深入探討。

二、文獻回顧

一維垂直方向理查式方程式(Richards equation)可依不同變數分為三種形式：

(一)以水頭 h 及體積含水比 θ 為變數之混合型方程式：

$$\frac{\partial \theta(h)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} K(h) \dots\dots\dots (1)$$

其中 θ 為體積含水比(volumetric water content) (L^3/L^3)， K 為水力傳導係數(hydraulic conductivity coefficient) (L/T)， h 為壓力水頭 (pressure head) (L)， z 為垂直方向定向上為正， t 為時間。

(二)以水頭 h 為單一變數之方程式：

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} K(h) \dots\dots\dots (2)$$

其中 C 為比水容積(specific water capacity)，即保水曲線之曲線斜率。

(三)以體積含水比 θ 為單一變數之方程式：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} K(\theta) \dots\dots\dots (3)$$

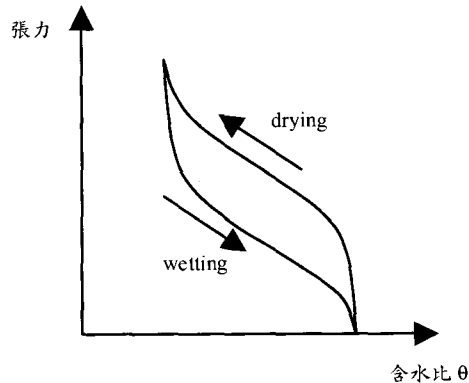


圖 1 遲滯現象保水曲線示意圖

Celia(1990)曾提出混合型控制方程式作數值模擬其結果比 h 型控制方程式有較佳之質量平衡。 h 型的控制方程式因為 $\theta-h$ 之關係是極度非線性，在數值模擬的過程中，經過離散會有質量平衡的問題；而使用 θ 型控制方程式雖有良好的質量平衡，但會在邊界或兩種土壤之交界其含水比會有不連續的狀況，且不適用於飽和狀態的土壤中；而混合型控制方程式作數值模擬時沒有以上兩種之缺點，本文將使用有限差分法求解混合型控制方程式。

以往研究當中有不少學者(Brook and Corey, 1964、1966; King, 1965; van Genuchten, 1980)提出土壤保水曲線 $\theta-h$ 的數學式，其中以 van Genuchten 土壤水分參數模式較能反應土壤保水區線的形狀及型式。因此本文使用 van Genuchten 之土壤水分參數模式，如(4)式所示：

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left[\frac{1}{1 + |\alpha h|^n} \right]^m \dots\dots\dots (4)$$

其中 Θ 為飽和度， θ_s 及 θ_r 分別為飽和體積含水比及殘餘體積含水比， α 、 n 、 m 為形狀因子，而 $m=1-1/n$ 。另外 $K-h$ 之關係亦採用 van Genuchten(1980)所提出之 $K-h$ 數學關係式，如(5)式所示：

$$K(\theta) = K_s \cdot \frac{\left\{ 1 - |\alpha h|^{n-1} [1 + |\alpha h|^n]^{-m} \right\}^2}{[1 + |\alpha h|^n]^{m/2}} \dots\dots\dots (5)$$

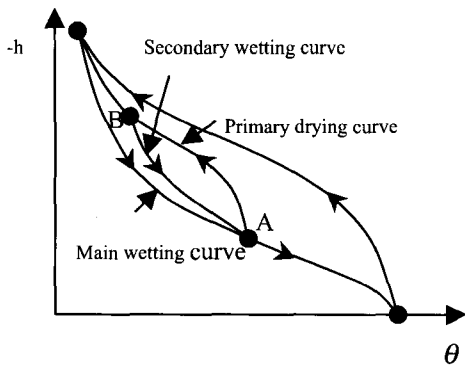


圖 2 掃描曲線(1)

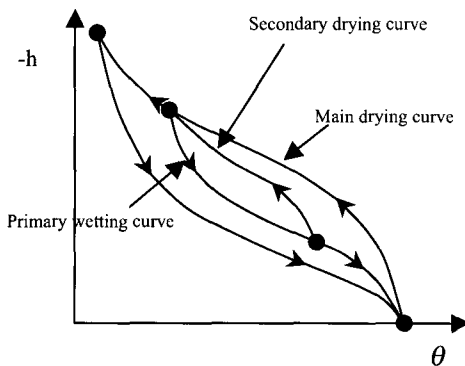


圖 3 掃描曲線(2)

其中 K_s 為飽和水力傳導係數。

一般在土壤水分變化的計算上若要能符合真實土壤水分的情形，應要將土壤中乾燥與潮濕交替變化的情形予以考慮(Beese and van der Ploeg, 1976)。在完全乾燥土壤在持續潮濕的歷程中，沿著主要潮濕曲線變化(如圖 2)，當於 A 點發生乾燥的情形時，則保水曲線則轉變成第一乾燥曲線(Primary drying curve)，之後在 B 點又發生潮濕的情形，則保水曲線則變為(Secondary wetting curve)，在無數乾燥潮濕狀態交替變化之曲線稱為掃描曲線(Scanning curve)，發生於主要乾燥曲線及主要潮濕曲線間，A 點及 B 點稱為 Revesal point。初始狀態是由乾燥而潮濕而變化的狀態亦有相同的情形，如圖 3。有許多學者提出掃描曲線的預測方法，但有其應用上的困難性，Ibrhim and Brutsaert (1968)、Gillham et al. (1979)、Scott et al. (1983)等曾提出土壤水分遲滯

曲線中的掃描曲線與主要乾燥及潮濕曲線的形狀有關，並需事先求得主要乾燥及潮濕曲線之參數值，在應用上是較為容易的。本研究採用 Scott et al (1983)所提出的觀念，假設土壤水分遲滯曲線中之掃描曲線與主要乾燥曲線及主要潮濕曲線的形狀有關，在事先求得主要乾燥及潮濕曲線參數值之前提下進行掃描曲線之預測，並將之納入水分傳輸模式之中。

三、數值方法

一維混合型理查方程式寫成：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial K}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(6)$$

使用有限差分法 (Finite Difference Approximation)來作近似解，並使用隱式法作離散，將(6)式對時間取向後差分對空間取中央差分離散可得到：

$$\frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\Delta t} - \frac{K_{i+1/2}^{n+1} (h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1})}{(\Delta z)^2} - \frac{K_{i-1/2}^{n+1} (h_i^{n+1} - h_{i-1}^{n+1})}{(\Delta z)^2} - \frac{(K_{i+1/2}^{n+1} - K_{i-1/2}^{n+1})}{\Delta z} = 0 \dots\dots\dots(7)$$

其中 i 為空間中的節點位置， n 為時間區間編號， m 為迭代編號。

將左邊第一項體積含水量之迭代編號 $m+1$ 使用泰勒級數展開對 m 次迭代展開即

$$\theta_i^{n+1,m+1} = \theta_i^{n+1,m} + \frac{d\theta_i^{n+1,m}}{dh} (h_i^{n+1,m+1} - h_i^{n+1,m}) + O(\delta^2) \dots\dots\dots(8)$$

忽略高階項的誤差，將(8)式代入(7)式後得到

$$\frac{\theta_i^{n+1,m} - \theta_i^n}{\Delta t} + \frac{d\theta_i^{n+1,m}}{dh} (h_i^{n+1,m+1} - h_i^{n+1,m}) - \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m} (h_{i+1}^{n+1,m+1} - h_i^{n+1,m+1})}{(\Delta z)^2} - \frac{K_{i-1/2}^{n+1,m} (h_i^{n+1,m+1} - h_{i-1}^{n+1,m+1})}{(\Delta z)^2} - \frac{(K_{i+1/2}^{n+1,m} - K_{i-1/2}^{n+1,m})}{\Delta z} = 0 \dots\dots\dots(9)$$

令 $\delta h^{n+1,m} = h^{n+1,m+1} - h^{n+1,m}$ ，(9)式變為

$$\begin{aligned} & \frac{(-K_{i-1/2}^{n+1,m})}{(\Delta z)^2}(\delta h_{i-1}^{n+1,m}) + \left(\frac{K_{i-1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} + \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m}}{(\Delta z)^2} + \frac{C_i^{n+1}}{\Delta t} \right) (\delta h_i^{n+1,m}) \\ & + \frac{(-K_{i+1/2}^{n+1,m})}{(\Delta z)^2}(\delta h_{i+1}^{n+1,m}) \\ & = \frac{\theta_i^n - \theta_i^{n+1,m}}{\Delta t} + \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m}(h_{i+1}^{n+1,m+1} - h_i^{n+1,m+1})}{(\Delta z)^2} \\ & - \frac{K_{i-1/2}^{n+1,m}(h_i^{n+1,m+1} - h_{i-1}^{n+1,m+1})}{(\Delta z)^2} - \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m} - K_{i-1/2}^{n+1,m}}{\Delta z} \end{aligned} \quad (10)$$

(10)式經過整合所有節點後可寫成矩陣形式如下：

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{N,N-1} & a_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta h_1^{n+1,m} \\ \delta h_2^{n+1,m} \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta h_N^{n+1,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}$$

當邊界條件給定後，利用 Thomas algorithm 可將區域中各節點之 $\delta h^{n+1,m}$ 求出，再利用 $\delta h^{n+1,m} = h^{n+1,m+1} - h^{n+1,m}$ 可求出新的 $h^{n+1,m}$ ，本研究假設當滿足 $\delta h^{n+1,m} \leq 10^{-5}$ 的條件時，即達到收斂，可進行下個時間的運算。整個土壤水分傳輸模式計算流程可大致如圖 4 所示。

四、模擬結果與討論

(一)採用 Gillham (1979)之實驗數據來作驗證比較，其實驗設備配置圖如圖 5，其上邊界為 no flux，下邊界採用變水頭。其給定之保水曲線參數為套用 King(1965)之保水曲線模式之結果，因此需先將之轉換成 van Genuchten 之保水曲線各參數值，各參數值如表 1，其中 α^w 、 n^w 分別為潮濕曲線之形狀因子（上標 w 代表 wetting，d 代表 drying）， α^d 、 n^d 分別為潮濕曲線之形狀因子。土體高度為 60cm，初始狀態是飽和，如圖 6，下邊界先乾燥而後潮濕，如圖 7，可控制整個土體之水分流動狀況。

圖 8 顯示模擬第 90 秒時之結果，由圖中可看出模擬結果與實驗結果之差異並不大。圖 9 為

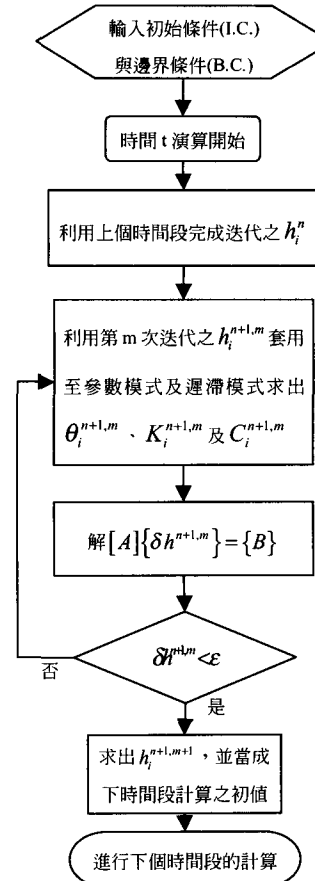


圖 4 模式流程圖

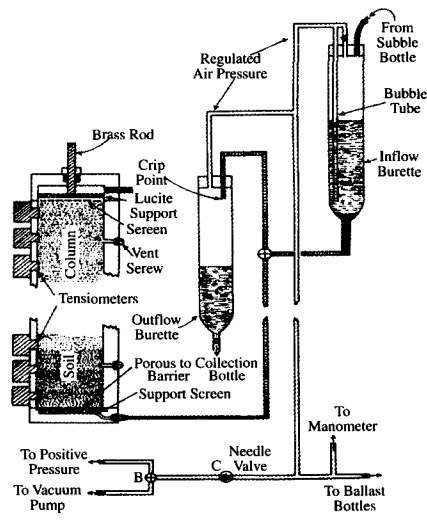


圖 5 Gilliam 之實驗器材配置圖

表 1 模擬一各參數值

飽和水力傳導係數 K_s	0.46cm/min
飽和含水比 θ_s	0.301
殘餘含水比 θ_r	0.097
潮濕形狀因子 α^w (cm)	0.0547
潮濕形狀因子 n^w	4.264
乾燥形狀因子 α^d (cm)	0.0302
乾燥形狀因子 n^d	8.904

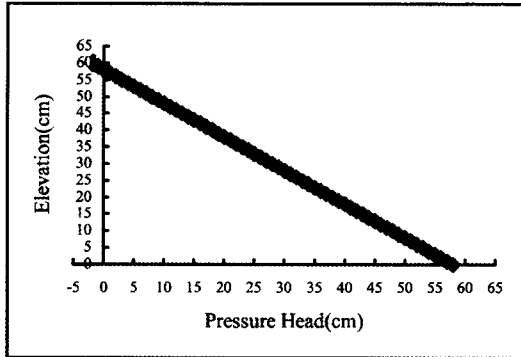


圖 6 初始條件示意圖

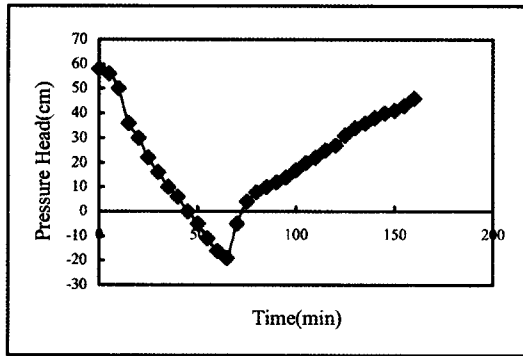


圖 7 下邊界壓力水頭隨時間變化圖

高程 21cm 其壓力水頭隨時間變化圖，圖 10 為高程 21cm 其含水比隨時間變化圖，壓力水頭與實驗資料較為相近，而含水比與實驗差異較大。圖 11 為高程 21cm 其保水曲線變化圖，因為起始狀態為飽和狀態，0~65 秒下邊界壓力水頭下降之狀態，亦即乾燥之情形，因而此處水頭亦下降，但仍是飽和狀態，約於 45 秒時轉為未飽和

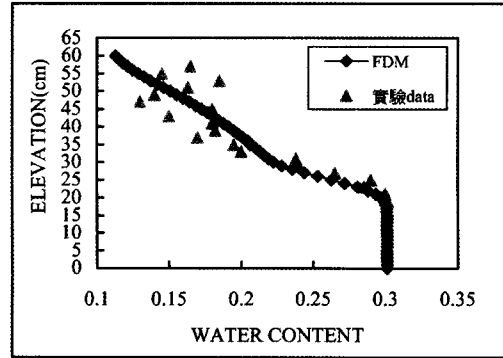


圖 8 90 秒時數值模擬與實驗結果深度與含水比示意圖

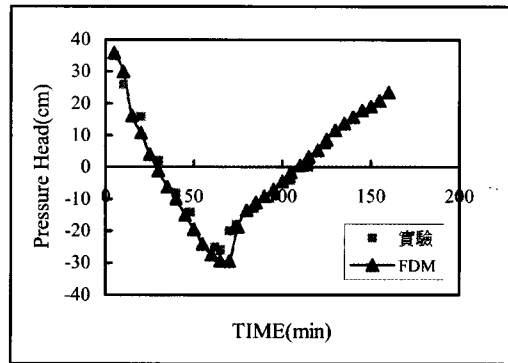


圖 9 高程 21cm 其壓力水頭與時間變化示意圖

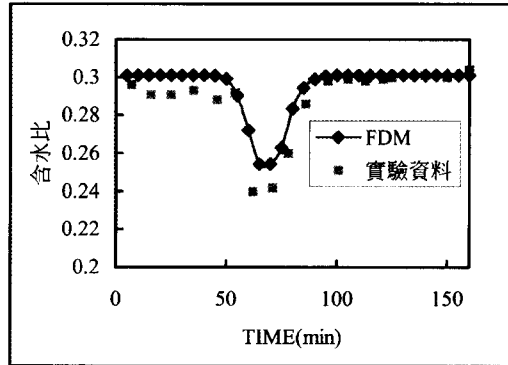


圖 10 高程 21cm 含水比與時間變化圖

狀態，而保水曲線即沿著主要乾燥曲線而變化，在 65 秒後因下邊界轉為潮濕，此處因而受影響而潮濕，保水曲線則沿著第一潮濕曲線而變化，約略於 100 秒時又趨於飽和。

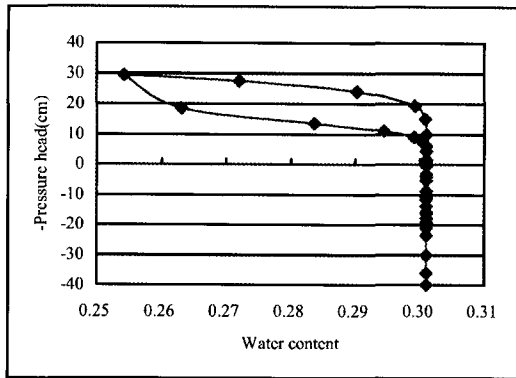


圖 11 高程 21cm 保水曲線變化示意圖

表 2 模擬二各參數值

飽和水力傳導係數 K_s	0.015cm/min
飽和含水比 θ_s	0.441
殘餘含水比 θ_r	0.313
潮濕形狀因子 α^w (cm)	0.04
潮濕形狀因子 n^w	2.179
乾燥形狀因子 α^d (cm)	0.009
乾燥形狀因子 n^d	3.359

(二) 爲了看出遲滯現象對水分傳輸現象之影響，以下模擬考慮遲滯現象與未考慮遲滯現象之水流傳輸，並比較其差異。本模擬採用 G. C. Topp 於 1971 年所做之實驗資料，其實驗是採用 Caribou Silt Loam 之土壤，黃漢誠(2000)將其實驗資料套用至 van Genuchten 之保水曲線模式，得到各參數值，如表 2 所示。

本模擬假設整個模擬土體高爲 40cm，分成 40 個節點，總模擬時間爲 360min，時間分成 360 個時間間隔，如圖 12 所示。初始條件爲 $h(z,0) = -80.0\text{cm}$ ，下邊界爲定水頭 $h(-40, t) = -80.0\text{cm}$ ，而上邊界水頭隨時間改變如圖 13 所示。

其主要乾燥曲線及主要潮濕曲線如圖 14 所示，假設未考慮遲滯現象之模擬沿著單一保水曲線變化，即主要潮濕曲線。考慮遲滯現象之模擬假設其初始狀態沿著主要潮濕曲線而變化，之後隨著乾燥潮濕之狀態轉換而沿著掃描曲線而變化。

圖 15 至圖 16 分別爲有無考慮遲滯現象其含水比與深度關係圖，整個模擬時間爲 360 分鐘每隔 60 分記錄一次。

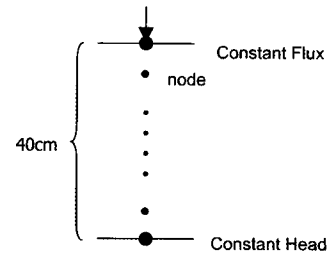


圖 12 空間離散示意圖

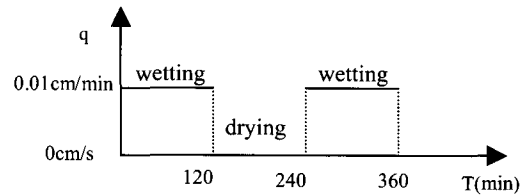


圖 13 上邊界隨時間改變示意圖

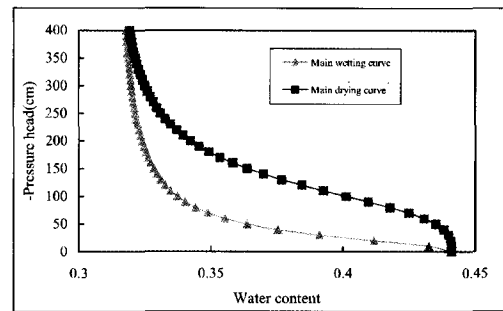


圖 14 主要潮濕曲線與主要乾燥曲線

由於從第 120 分上邊界開始由潮濕轉爲乾燥，因此漸漸影響到整個區域的水分流動。於 0~120 分整個區域之節點皆爲潮濕狀態或初始狀態，未有乾燥之現象，其保水曲線皆爲主要潮濕曲線，因此有無考慮遲滯現象結果相同。於 120~240 分時，其差異漸漸變大，當考慮遲滯現象時，呈乾燥狀態之節點其保水曲線爲第一乾燥曲線，未考慮遲滯現象之模擬其保水曲線仍沿爲主要潮濕曲線變化，因此考慮遲滯現象其含水比下降較未考慮遲滯現象爲慢，隨著時間的增加而差異變大。於 240 分後上邊界又轉爲潮濕狀態，受到上邊界水分通量再度入滲之影響，其潮濕效應往下傳遞，原本乾燥狀態之節點再度潮濕，考慮遲滯現象之模擬其保水曲線爲第二潮濕曲

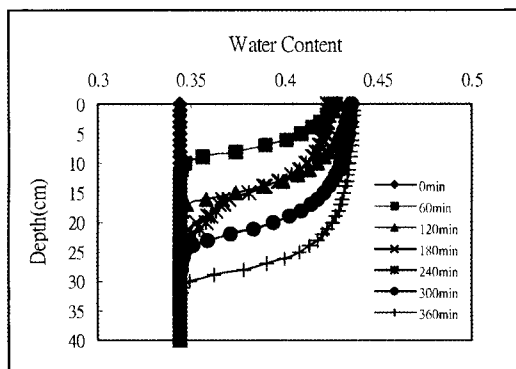


圖 15 考慮遲滯現象之模擬過程

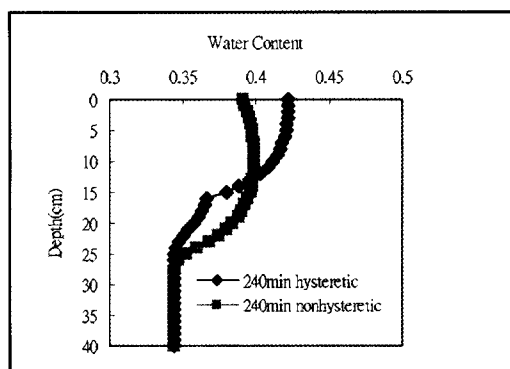


圖 17 第 240 分之模擬結果

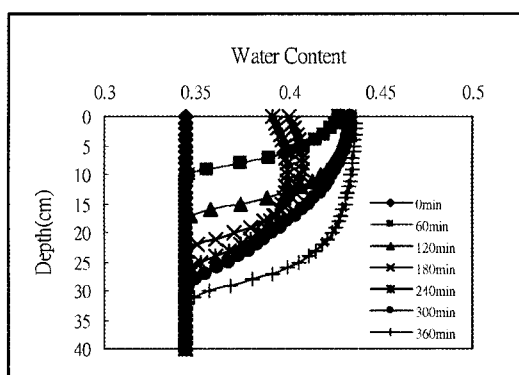


圖 16 未考慮遲滯現象之模擬過程

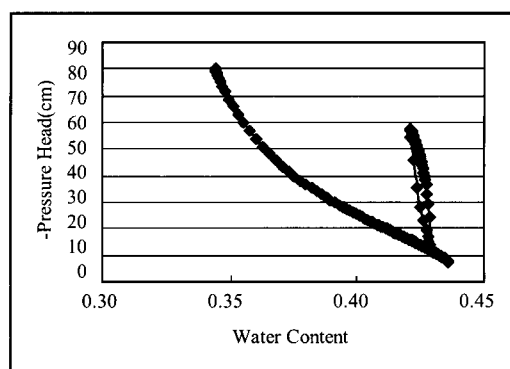


圖 18 距上邊界 5cm 保水曲線變化圖

線，因此有無考慮遲滯現象其結果又漸漸相近。

圖 17 為第 240min 之結果，於深度 16cm 處為一斜率不連續點，此深度之上方各節點為乾燥狀態，而下方各節點為潮濕狀態，圖 18 為距上邊界 15cm 處其保水曲線變化圖，最初 120min 各節點接沿著主要潮濕曲線而變化，120min 至 240min 在深度 16cm 以上之各節點漸漸由主要潮濕曲線變成沿著第一乾燥曲線變化，從上而下影響至深度 16cm。

當 240min 後，因上邊界有通量入滲，原本沿著第一乾燥曲線轉變為第二潮濕曲線，甚至經過之前第一次改變狀態之 Reversal point 而回到主要潮濕曲線而變化。

作數值模擬時，非線性的控制方程式經過離散後容易有質量平衡的問題，因此達到良好的質量平衡是數值模擬的先決條件。質量平衡以下式來定義：

$$\text{質量平衡} = \frac{\text{模擬區域中增加之質量}}{\text{進入模擬區域之總質量}}$$

而本研究模擬結果質量平衡達到 1，滿足質量守衡的要求。

五、結 論

1. Gillham(1979)之實驗數據與本文之模擬數據比較中，考慮遲滯現象之模擬與實驗結果相當接近，因此乾濕過程之遲滯現象十分重要必須加以考慮。
2. 在模擬中可看出土壤各深度其保水曲線的變化，在初始狀態假設其為主要乾燥或主要潮濕曲線，則在狀態轉變後分別為第一潮濕曲線及第一乾燥曲線，並且在之後的乾濕轉換又有不同之曲線。
3. 如果在模擬上未考慮遲滯現象，則在水分的計算上會有高估或低估之情形，因此在計算上尚

須考慮遲滯效應的影響。

4. 本研究有限差分法是採用隱式法作數值離散，必須經過迭代的方式得到數值解，並無顯式法因空間網格與時間網格大小而有限制之缺點，且較無數值擴散的問題，並滿足質量守衡。

參考文獻

1. 黃漢誠、陳主惠、譚義績，「未飽和土壤水分遲滯效應之研究」，中國農業工程學報，第 46 卷，第四期，第 33~47 頁，2000。
2. Beese, F., and R. R. van der Ploeg, "Influence of hysteresis on moisture flow in an undisturbed soil monolith", Soil Sci. Soc. Am. J., 40, 1976.
3. Brooks, R. H., and A. T. Corey, 1964, "Hydraulic properties of porous media", Colo. State Univ. Hydrology Paper No. 3
4. Celia, M. A., E. T. Bouloutas, and R. L. Zarba, "A general Mass-conservation Numerical Solution for Unsaturated Flow Equation", Water Resource Res., 26, p1483- 1496, 1990
5. Gillham, R. W., A. Klute, and D. F. Heermann, "Measurement and numerical simulation of hysteretic flow in a heterogeneous porous medium", Soil Sci. Soc. Am. J., 43, 1061-1067, 1979.
6. Ibrahim, H. L. and W. Brutsaert, "Intermittent infiltration into soils with hysteresis", J. Hydraul. Div. ASCE. 94, 265-271, 1968.
7. King, L. G., "Description of soil characteristics for partially saturated flow", Soil Sci. Soc. Am. Proc., 29(4), 359-362, 1965.
8. Scott, P. S., G. J. Farquhar, and N. Kouwen,, "Hysteresis effects on net infiltration, Advances in infiltration", ASAE Publ. 11-83, 163-170, Am. Soc. Agric. Eng., St. Joseph, Mich, 1983.
9. van Genuchten, m. Th., A closed- form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils, Soil Sci. Am. J., 44(5):892-898, 1980.

收稿日期：民國 91 年 11 月 7 日

修正日期：民國 91 年 11 月 27 日

接受日期：民國 91 年 12 月 1 日