

水庫規劃問題的位勢網絡與流量網絡模式

Potential and Flow Network Models for Reservoir Planning

台灣大學生物環境系統工程學系教授

劉佳明

Chia-ming Liu

摘 要

水庫規劃時所考慮的功能通常包括蓄洪、供水與貯水三種，本文討論這一類問題的線性模式與它的流量網絡與位勢網絡二種解釋。其中流量網絡是水資源系統分析的一種傳統表示方式，而位勢網絡則是作者所發現適用在上述多功能水庫模式的一種表示方式。這二種網絡不但都能以圖像表現水庫模式的變數與關係式，而且根據個別網絡結構所設計的演算法，效率都非常高，所需時間和記憶量與一般的線性規劃解法相比，僅需約百、千甚至萬分之一，分析的時期數愈多其效率愈高。

水庫規劃模式是以各時期蓄水與放水等決策變數，表示運轉下的資源限制條件與收益或成本目標函數，這些變數、限制式、目標函數在二種網絡上各有其相應的解釋，如管線流量或節點位勢值、節點流量平衡條件或管線二端點的位勢條件、流量輸送成本或位勢建構成本。水庫模式的二種解釋中，位勢網絡比較直觀而且簡單。此外，位勢網絡的應用範圍也比較廣，因為如果水庫容量或各功能的供需差額是模式的變數，流量網絡就不再適用，而位勢網絡仍然適用。因此位勢網絡相當適合上述多功能單水庫模式的分析之用。

關鍵詞：水資源系統，水庫，水庫規劃，水庫運轉，網絡，流量網絡，位勢網絡。

ABSTRACT

A linear model is formulated for a reservoir required to meet the given targets in three functions: (1) reserved flood space, (2) required water supply and (3) minimal conservation or emergency pool of water. The model can be interpreted as a problem of either one of the two networks: a traditional flow network and a proposed potential network. These network models allow efficient computations.

The constraints of the models are interpreted in terms of the flows in edges or the potentials in nodes and some other parameters. Both network models visualize the

reservoir operations, yet the potential network most elegantly dramatizes the supply-demand relationships of the three reservoir functions. Besides, when the unknowns of the model include the reservoir capacity or the supply shortages which induce costs, the flow network model is no more applicable while the potential network model still works well. Thus the potential network model is highly recommended for some multifunctional reservoir analysis.

Keywords: Water resources system, Reservoir, Reservoir planning, Reservoir operations, Network, Flow network, Potential network.

一、水庫線性模式

水庫規劃時所考慮的功能通常包括供水、蓄洪與貯水三種(劉佳明 1988, 劉佳明 1997)。若 n 是分析的總期數, $t=1, 2, \dots, n$, 已知時期 t 的水庫進水量 q_t 與三功能的標的量: 蓄洪標的量 f_t 、供水標的量 y_t 與貯水標的量 l_t , 則在這些功能上的實際供應量 Y_t, F_t, L_t 應分別不小於標的量 y_t, f_t, l_t , 即 $Y_t \geq y_t, F_t \geq f_t, L_t \geq l_t$ 。若水庫容量、呆水容積與 t 時期初蓄水量分別以 S_t, S_0 與 S_t 表示, 則上述三類實際供應量 Y_t, F_t, L_t 分別能以容積變量 S_t, S_0 與 S_t 的差值表示如下: $Y_t = S_t - S_{t-1} + q_t, F_t \equiv S_t - S_0, L_t \equiv S_t - S_0$ 。其中第一式就是 t 時期的水量收支條件。將三類實際供應量定義與供需關係分成三組列出如下:

$$D_t \equiv Y_t - q_t = S_t - S_{t-1} \geq y_t - q_t \equiv d_t \dots\dots\dots (1-1)$$

$$F_t \equiv S_t - S_0 \geq f_t \dots\dots\dots (1-2)$$

$$L_t \equiv S_t - S_0 \geq l_t \dots\dots\dots (1-3)$$

各式 $t=1, 2, \dots, n$ 。式(1-1)是由水收支式, $Y_t = S_t - S_{t-1} + q_t \geq y_t$, 二端減去 q_t 所得, 此式二端分別是淨供水量 D_t 與淨需水量 d_t 的定義。供應量 D_t, F_t, L_t 在實際演算時可以略去, 以節省記憶量。 S_0 是容積變量 S_t, S_0 與 S_t 等的起算處的基準容積值, 通常設 $S_0=0$, 就是以呆水位為基準, 式中保留 S_0 而不消去, 是為了保存供需條件的下列共同形式:

實際供應量=容積變量之差 \geq 標的需求量

表 1 是一個簡化的水庫的規劃資料。圖 1 是表 1 水庫資料的比例圖, 它顯示各標的值與水

表 1 水庫資料與模式變數符號

功能 標的量		蓄洪 f_t	供水 y_t	貯水 l_t	進水 q_t	淨需水 $d_t \equiv y_t - q_t$
時期 t	1	4	5	6	1	4
	2	6	2	3	7	-5
變數 符號	供應量	F_t	Y_t	L_t	淨供水 $D_t \equiv Y_t - q_t$	
	蓄水量	呆水容積 S_0 , 水庫容量 S_v , t 時期 初蓄水量 S_t				
備註	分析期數 $n=2, t=1, 2$ 。 需水量 $y_t \equiv$ 供水標的需求量, 供水量 $Y_t \equiv$ 供水(實際)供應量。 淨需水量 $d_t \equiv$ 需水量 $y_t -$ 進水量 q_t , 淨供水量 $D_t \equiv$ 供水量 $Y_t -$ 進水量 q_t 。 式(1-1)中, $t=n=2$ 時 $X_{n-1} = X_1$, 即 $y_3 = y_1$, $S_3 = S_1, \dots$ 。					

庫容積變量 S_0, S_v, S_1, S_2 的關係。圖中 S_1 與 S_2 二點的高差是出、入水量 y_t 與 q_t 的差 $d_t \equiv y_t - q_t = 4$, 因此連接 S_1 與 S_2 二點的斜線就是時期 1 的蓄水歷線, S_1 點上、下的二條垂直線段則分別標出蓄洪 f_t 標的值與貯水標的值 l_t 。因此每一節點 S_t 各有三個線段: (1) f_t 指向庫頂、(2) l_t 指向庫底、(3) d_t 指向下期水面, 其外端落點應在所指目標(庫頂、庫底與下期水面)點線的範圍之內。在這個比例圖之外, 以下二節依次分別介紹上列限制式所對應的位勢網絡(劉佳明 1988, 劉佳明 1993)與流量網絡(Major and Lenton 1979, 周乃昉 1992)。

二、位勢網絡

表 1 簡例的水庫規劃資料也能以圖 2 位勢網絡表示, 圖中節點與管線填註了表 1 的各項資

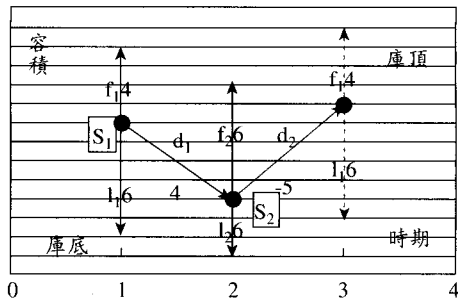


圖 1 水庫資料比例圖

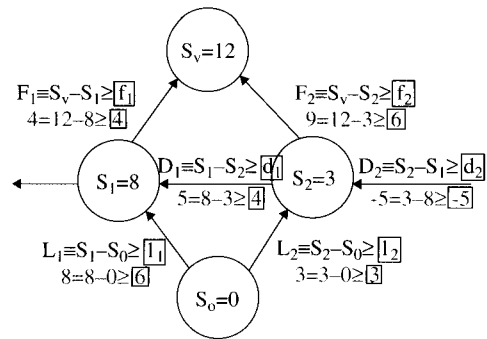


圖 3 模式位勢網絡

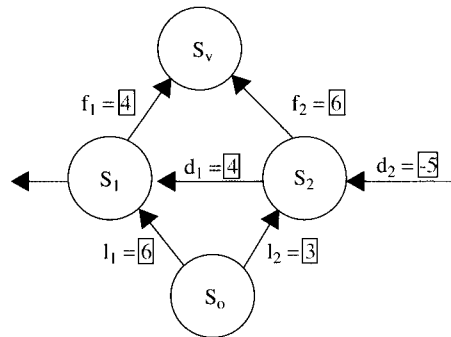


圖 2 資料位勢網絡

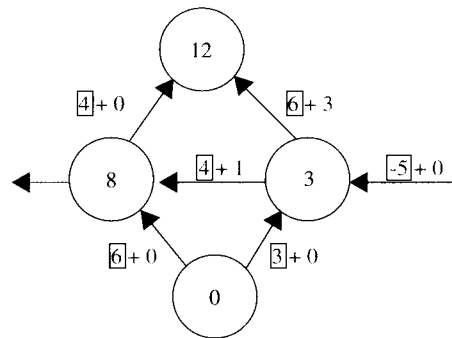


圖 4 方案勢位圖

料，這個圖也可視為圖 1 的示意圖。圖 3 是在圖 2 上加註模式的供需變數與限制式。在圖 2 與圖 3 中，每一節點各有對應的值，稱為節點位勢值，分別是各該點至參考的基準水位 S_0 之間的容積或蓄水量。網絡圖上，除了以節點表示變數，另以連接節點的管線表示二端節點變數之間有一定的關係。

各時期的不同功能在圖上都有一條對應管線，該圖的上、中、下三組管線旁加框的符號或數字，分別標示各時期的蓄洪、供水與貯水三類標的值。一條管線二端節點值之差表示對應功能的供應量，其值不應小於標的值。管線各有其方向，所以二端節點值的差是指「箭頭前端節點值減後端節點值」。

參考圖 3，若水庫三類功能標的值等如表 1 所列，且其容量與二時期蓄水量分別為 $S_v=12$, $S_1=8$, $S_2=3$ ，考慮圖 3 中第一時期節點 S_1 與(1)下方庫底 S_0 、(2)右方下期節點 S_2 、(3)上方庫頂 S_v 這三點相連接的三條管線，各有對應的限制式，分別要求某一時期各供應值不小於標的值：

$$L_1 = S_1 - S_0 = 8 - 0 \geq l_1 = 6,$$

$$D_1 = S_1 - S_2 = 5 \geq y_1 - q_1 = 4,$$

$$F_1 = S_v - S_1 = 4 \geq f_1 = 4.$$

利用式(1-1)淨供水量 D_1 定義部分求得供水量 $Y_1 = D_1 + q_1 = 5 + 1 = 6$ 。爲了與模式對照，圖 3 管線旁填註對應的限制式，所以比較複雜。

熟悉圖 3 水庫各功能的供需關係之後，其實不必在圖上標註變數與限制式，而以圖 4 的簡潔方式代替，節點容積值直接填入節點圓圈內，加框的數字表示標的值，'+號後的數值表示供應超過標的量的值，因此，管線上加框與不加框二數字的和就是實際供應量，而這個供應量應等於管線二端節點值的差。位勢網絡的直觀圖像確實可以清楚表達水庫的供需觀念，對供需方案的檢驗相當方便。

三、流量網絡

上一節將水庫規劃模式的限制條件以位勢

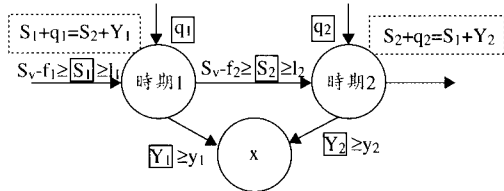


圖 5 模式流量網絡

網絡圖表示，對同樣的限制條件本節將以流量網絡圖表示。設水庫容量 S_v 為已知數，則水庫三類供需條件將改寫成下列形式：

$$S_t + q_t = S_{t+1} + Y_t \dots\dots\dots (3-1)$$

$$S_t \leq S_v - f_t \dots\dots\dots (3-2)$$

$$S_t \geq S_0 + l_t \dots\dots\dots (3-3)$$

$$Y_t \geq y_t \dots\dots\dots (3-4)$$

上列各式能以圖 5 方案流量網絡表示。其中條件 (3-1) 顯示在圖中二時期節點旁的虛線方框之內，這是時期節點各管線流量收支平衡的條件，式中的四個變數 S_t , q_t , S_{t+1} , Y_t 分別是 t 時期節點的左、上、右、下這四條管線的流量，在圖中都加了框， S_t 與 q_t 流入節點， S_{t+1} 與 Y_t 流出節點，流入與流出的量平衡，即期初蓄水量+進水量=期末蓄水量+供水量。中間二條件 (3-2) 與 (3-3) 則合併成爲 $S_v - f_t \geq S_t \geq S_0 + l_t$ ，填註在對應水平管線上，表示管線中的流量 S_t 要在上限 $S_v - f_t$ 與下限 $S_0 + l_t$ 之間，設 $S_0 = 0$ ，故圖中 S_0 已予省略。最後條件 (3-4) 則填註在通往外界節點 X 的斜管線上，表示管線中的流量 Y_t 不小於下限 y_t 。

若水庫需求如表 1 所列，並設水庫容量與二時期蓄水量分別爲 $S_v = 12$, $S_1 = 8$, $S_2 = 3$ ，這是流量模式或圖 5 的一個方案，另以圖 6 表示，考慮第一時期節點與各管線，由 (3-1) 可得，本期供水量 $Y_1 = S_1 - S_2 + q_1 = 6$ ，故 $Y_1 \geq y_1 = 5$ ，滿足需水，又檢驗 S_1 管線流量上、下限條件， $S_v - f_1 = 12 - 4 \geq S_1 = 8 \geq l_1 = 6$ ，知其滿足蓄洪與貯水條件。此外，第一時期節點總入流量爲 $S_1 + q_1 = 8 + 1$ ，總出流量爲 $S_2 + Y_2 = 3 + 5$ ，二者相等，故這個節點的流量收支平衡。由圖上其他節點與管線所列條件可知，這個方案能滿足所有條件。

圖 7 是將圖 5 與 6 各時期節點上方進水 q

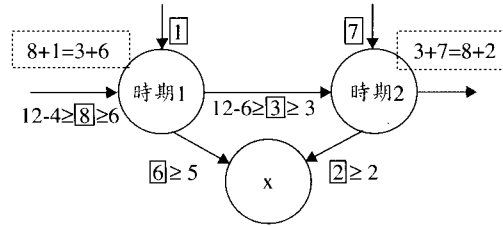


圖 6 方案流量網絡之一

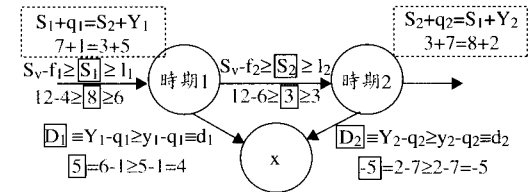


圖 7 方案流量網絡之二

管線併入下方出水 Y 管線所得，因此各時期分別得到一條淨供水管線，其流量值， $D_t = Y_t - q_t$ ，此值可正可負，正時流向外界 X ，負時由外界流入水庫。

四、比較與結論

在傳統上，水資源系統與水庫運轉的分析常以流量網絡的方式表示 (Major and Lenton 1979, 周乃昉 1992, Sun, Hsu, Louie and Yeh 1995, 徐年盛、鄭克偉 2000)，畢竟節點流量平衡條件與管線流量上下限的觀念是大家所熟悉的，但是在多功能單水庫的規劃問題上，卻少見以流量網絡作分析，這可能是因爲：(1) 原模式中各功能的供需關係與管線流量的上、下限條件之間的對應其實並不明顯，(2) 在水庫容量未定時，各管線的流量上限 $S_v - f_t$ 之中都含有 S_v 這個未知數，(3) 目標函數中含有供應量缺額等其他未知數。前一情況 (1) 還能克服，後面 (2) 與 (3) 這二種情況並不是流量網絡所能處理，所以長久以來，多功能水庫規劃問題都只利用線性規劃方式求解，並沒有用到流量網絡觀念。

位勢網絡雖不常見，但是對水庫規劃問題而言，它的圖像比流量網絡具體直觀，因爲每一時期節點 S_t 的上、右、下三條管線，分別連接水庫頂部 S_v 、下期節點 S_{t+1} 、水庫底部 S_0 ，這些管線

表 2 水庫規劃模式與位勢網絡或流量網絡的對應關係

項目	位勢網絡	流量網絡
主要變數*	節點 位勢變數(狀態) S_i, S_v	管線 流量變數 S_i, Y_i
蓄洪條件	管線 位勢供需關係 $L_i \equiv S_i - S_0 \geq l_i$	管線 流量上限 $S_i \leq S_v - f_i$
供水條件	管線 位勢供需關係 $D_i = S_i - S_{i+1} \geq d_i$	節點 流量收支平衡 $D_i = S_i - S_{i+1} \geq d_i$
貯水條件	管線 位勢供需關係 $F_i \equiv S_v - S_i \geq f_i$	管線 流量下限 $S_i \geq S_0 + l_i$
水庫容量	S_v 可以是未知數。	S_v 必須是已知數。
目標函數	可以考慮各功能供應量未達標的需求量時的缺額成本	無法考慮各功能供應量未達標的需求量時的缺額成本
備註	主要變數是節點位勢值， 限制條件都是管線位勢供需關係： 供應量 \geq 標的量 其中 供應量 \equiv 前端節點值 - 後端節點值。	主要變數是管線流量值，限制條件有三類： 節點流量收支、 管線流量之上限與下限條件。
	淨供水量 $D_i \equiv Y_i - q_i$ ，淨需水量 $d_i \equiv y_i - q_i$ 。 *演算過程可以略去供應量變數 D_i, L_i 與 F_i 以節省記憶。	

的空間配置正好反應水庫蓄洪、供水與貯水的功能，完整表達了水庫這三類供需的情況。單水庫如此，多水庫串並聯系統情況的就沒有這麼單純。

上面二段與前面各節的討論綜合得到表 2。表中列出了二種網絡的特性並加以比對。

本文前面舉的例子只是以二種網絡圖作為檢驗方案可行性的工具，其實它們也都是演算求解的工具。二種網絡的演算效率極佳，所需記憶量與計算時間都只要一般線性規劃方法的百、千甚至萬分之一，分析的時期數愈多其效率愈高(流量網絡見 Major, Lenton 1979, 周乃昉 1992, Sun, Hsu, Louie and Yeh 1995, 徐年盛、鄭克偉 2000, 位勢網絡見劉佳明 1988, 劉佳明 1997)。

求解龐大的流量或位勢網絡問題通常應用套裝程式，其中流量程式比較普遍，位勢程式則少見，所以必要時可以將位勢問題化為對偶(Dual)流量問題，然後以流量方法求解，因為流量網絡解答中也都有流量問題的對偶變數的解值(即位勢值)。對偶的觀念比較抽象，不是很容易了解，但是轉換為對偶的手續在代數上只不過是矩陣的轉置而已，執行並不困難。若不是問題龐大到會造成記憶量與/或計算時間的困擾，其實不一定需要網絡程式，一般線性規劃套裝程式也適合

使用(劉佳明 1997)。

參考文獻

1. 劉佳明，「水庫標的線性規劃問題之網路切割解法簡介」，台灣水利 36 卷 2 期，1988。
2. 周乃昉，「區域性地表水量調配之網流模式」，第六屆水利工程研討會論文集，1992。
3. 劉佳明，「工程規劃、設計與管理中優選方法的應用」，中國農工學報 39 卷 1 期，1993。
4. 劉佳明，「水庫標的線性規劃模式與其網路演算法」，86 年度農工研討會論文集，1997。
5. 徐年盛、鄭克偉，「流域性水資源規劃最佳化模式之建立」，跨世紀水資源經營管理研討會論文集，2000。
6. Major, D. C. and R. L. Lenton, Applied Water Resource Systems Planning, Prentice-Hall, 1979.
7. Sun, Yung-Hsin, Nien-Sheng Hsu, Peter W. F. Louie, and William W-G Yeh, "Generalized Network Algorithm for Water-Supply-System Optimization", J. Water Resour. Plng. and Mgmt., ASCE, Vol. 121(5), pp.392-398, 1995.

收稿日期：民國 91 年 10 月 7 日

接受日期：民國 91 年 10 月 23 日