農業工程學報 第 48 卷第 3 期
中華民國 91 年 9 月出版

Journal of Chinese Agricultural Engineering
Vol. 48, No. 3, September 2002

# 以灰色理論建立田菁生長之預測模式

# The Model of Growth on Green Manure by Gray Theory

高苑技術學院土木工程系副教授
**張東炯**
**Tung-Chueng Chang**

高苑技術學院土木工程系講師
**簡耀鴻**
**Yaw-Hung Chien**

南榮技術學院土木工程系講師
**楊茂焜**
**Mao-Kun Yen**

## 摘　要

本研究以灰色理論模型 GM(1,1)進行田菁生長及其根系變化之預測。研究中分別以彰化現場種植綠肥之後實際所量測出來生長高度與應用灰色模型 GM(1,1)預測之高度做一比較，GM(1,1) 模型所預測之結果與實際量測出之誤差不大，在莖長約 8.1%、在根長約 5.5%，顯示 GM(1,1)模型在田菁綠肥生長高度之預測尚屬可行之模式。

**關鍵詞：**田菁生長，灰色預測。

## ABSTRACT

The growth of green manure in root and stem was predicted by using gray theory in this study, and the field test was executed in Chan-Hwa county where the height of green manure in root and stem were measured. Gray model GM(1,1) was compared with the result from field test,that errors were about 8.1% and 5.5% in stem and root. The model presents a good prediction in the growth of green manure.

**Keywords:** Growth of green manure, Gray prediction.

## 一、前　言

在農業環境改變過程，對水資源之利用效率需求愈來愈高，如何將水資源做最有效率之應用，是當今水資源調配利用之重要課題。在灌溉過程中，亦是希望讓水資源可得最佳灌溉效率，因此，對灌溉水分入滲土壤後，在土壤中滲漏之快慢及作物吸水率將是重要之參考數據(丁，1998)。

而田菁作物根莖生長之情形與作物吸水量有著密切之關係，本研究擬就田菁綠肥現場生長之狀況分別依不同之預測模式：時間序列模式、

迴歸分析模式及灰色預測模式，建立適合田菁生長之數值預測模型，俾提供做爲日後更進一步在田菁根系於水分入滲模擬研究之重要依據。

## 二、現場實驗

爲實地瞭解植物根系在現場農地其生長情形之變化，在農委會及雲林農田水利會大力協助下，於八十九年七月至八月期間，在雲林縣莿桐鄉實施綠肥栽種。爲使實驗進行順利，首先需先修築田埂，將原有過低、破損、滲露或歧區不平之田埂修築完整，使其無側滲之餘，方便行走及觀測讀數，以利試驗蓄水之需求(施，1995)(葉，1998)。現場選擇兩塊區域分別栽種田菁，定期性將田菁生長之情況作成觀測記錄，如圖 1 及圖 2。

本研究爲探討作物隨時間變化其根與莖部之成長高度，重要實施方法與步驟（張，2002）(Feddes, 1974)爲：

1. 配合田區操作，選擇兩塊田區，每個田區再分成前後兩個區域。
2. 現地栽種田菁並且分別再前與後之區域中各選取五個點量測其根與田菁生長之變化。
3. 依所觀測之情形，利用時間數列、迴歸及GM(1,1)模式分別模擬根系生長之情形。
4. 選定水田丘塊安置量水深木樁，每日進行人工量測。本試驗以簡單之田區減水深量測，由水收支平衡方程式計算在一次試驗期間滲入土壤之水量。

## 三、模式預測

除藉由現場田菁實驗之外，本研究擬用多種預測方式去了解田菁作物生長之情況。預測之方法相當多，如迴歸分析法、ARIMA 時間數列法、指數平滑法、類神經網路法等。近年來多位學者致力於探討灰預測方法之研究，被廣泛應用於各研究領域，如電力系統、地震、地下水位、財務、交通量、加權股價指數、航運量、壽險投保率之預測等等（吳坤暉、曾國雄，2002）。茲將本文所採用方式分述如下：

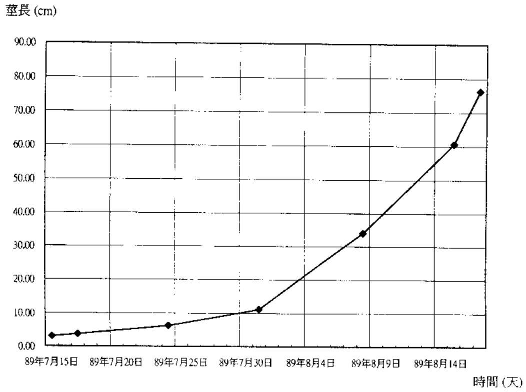


圖 1　田菁莖長(cm)與時間關係圖

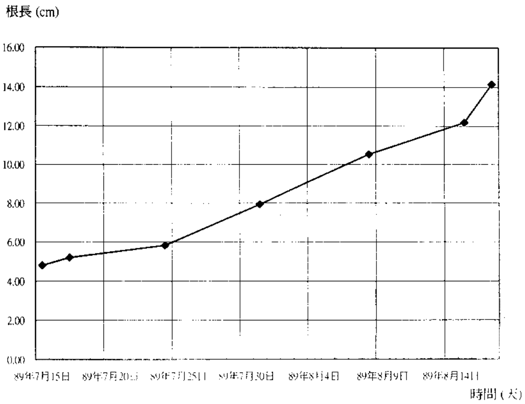


圖 2　田菁根長(cm)與時間關係圖

### (一) 迴歸分析法

討論一個應變數和一個解釋變數的迴歸模式，稱爲單變數線性迴歸(simple linear regression)。它是迴歸分析中最基本的模式。研究迴歸分析的第一個步驟是，將搜集到的樣本資料用散佈圖表示出來；亦即將這一組解釋變數 X 與應變數 Y 的隨機樣本$(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$，…，$(x_n,y_n)$列點描圖。藉此散佈圖分布情形，便可以建立應變數和解釋變數之間的迴歸模式。雖然散佈圖僅能呈現變數之間的分佈情形，並不一定能明確描述其中因果關係，不過散佈圖所透露的資訊對於建構迴歸模式仍是大有助益。接著就是建構這個迴歸模式。

單變數迴歸模式是由一組解釋變數 $X_i$ 和應變數 $Y_i$ 所建構而成。單變數線性迴歸的統計模式如下：

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \;,\; i = 1,2,\cdots,n \;\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

其中：$i$ 代表樣本的個數，$n$ 表示共有 $n$ 組樣本；$(X_i, Y_i)$表示第 $i$ 組樣本的解釋變數和應變數；$\beta_0$，$\beta_1$爲參數(常數值)；$\varepsilon_i$ 代表樣本中第 $i$ 個隨機誤差項。

爲了配合參數估計與檢定方便，我們對迴歸模式有以下的基本假設：

(1)隨機誤差項 $\varepsilon_i$ 是互相獨立，且均服從常態分配 $N(0,\sigma^2)$。

(2) $X_i$ 爲常數，且因爲應變數 $Y_i$ 是常數項 $\beta_0 + \beta_1 X_i$ 與 $\varepsilon_i$ 的和，故 $Y_i$ 爲互相獨立隨機變數。又由於 $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$，因此 $Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 X_i, \sigma^2)$。

(3) $\varepsilon_i$ 與 $X_i$ 無關，即 $Cov(\varepsilon_i, X) = 0$。

也就是說若將 $X_i$ 視爲一個常數，$Y_i$ 則是一個隨機變數。因此 $Y_i$ 的期望值 $E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$ 受到自變數 $X_i$ 的影響，而且這影響呈直線走向。這條直線 $E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$ 一般被稱作迴歸函數 (regression function)，參數 $\beta_0$ 爲直線的截距，$\beta_1$ 爲直線的斜率。這兩個參數是未知的，因此我們需要對截距和斜率進行估計和檢定。

### (二) 時間數列法

時間數列也是一種經常用來預測的模式，若 $X_n$ 爲時間數列 $\{Xn\}$ 的最後一個觀測值，以條件期望值 $E(X_{n+l}|X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_n(l)$ 來當作第 $n+l$ 期觀測值 $X_{n+l}$ 的預測值。即預測從 $n$ 時點起，$l$ 期的預測值爲 $X_n(1)$，$X_n(2)$，… $X_n(l)$。

取 ARMA(1,1) 模式往前 $l$ 期的預測值 $X_n(l)$。我們得循序漸進先求出 $l = 1$ 的 $X_n(l)$、再求出 $l$=2 時的 $X_n(l)$，最後歸納出 $X_n(l)$ 的公式。（吳，1998）

(1)當 $l = 1$ 時，

$$\begin{aligned}
X_n(l) &= E(X_{n+1}|X_n, X_{n-1}, \ldots) \\
&= E(\theta + \phi_1 X_n + \varepsilon_{n+1} - \theta_1 \varepsilon_n | X_n, X_{n+1}, \ldots) \\
&= \theta + \phi_1 E(X_n | X_n, X_{n-1}, \ldots) \\
&\quad + E(\varepsilon_{n+1} | X_n, X_{n-1}, \ldots) \\
&\quad - \theta_1 E(\varepsilon_n | X_n, X_{n-1}, \ldots) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \theta + \phi_1 X_n - \theta_1 (X_n - X_{n-1}(l)) \qquad (2)
\end{aligned}$$

(2)當 $l \geqq 2$ 時，

$$\begin{aligned}
X_n(l) &= E(X_{n+l} | X_n, X_{n-1}, \ldots) \\
&= E(\theta + \phi_1 X_{n+l-1} + \varepsilon_{n+l} \\
&\quad - \theta_1 \varepsilon_{n+l-1} | X_n, X_{n+1}, \ldots) \\
&= \theta + \phi_1 E(X_{n+l-1} | X_n, X_{n-1}, \ldots) \\
&\quad + E(\varepsilon_{n+l} | X_n, X_{n-1}, \ldots) \\
&\quad - \theta_1 E(\varepsilon_{n+l-1} | X_n, X_{n-1}, \ldots) \\
&= \theta + \phi_1 X_n(l-1) \qquad (3)
\end{aligned}$$

### (三) 灰色模型法

灰色模型 GM(1,1)是依據系統已知的離散數據經由累加生成的處理過程，顯示建模系統的規律與特徵，爲一種可以少數據建模與預測之方法。其建模求解過程如下（鄧，1996）：

(1)原始數列的處理：

令 $x^{(0)}$(i)爲等間隔原始數列

$x^{(0)} = \{ x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots\cdots, x^{(0)}(n) \}$

將 $x^{(0)}$做一次累加生成（AGO）爲 $x^{(1)}$(k)

$x^{(1)}(k) = \{ x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \cdots\cdots, x^{(1)}(n) \}$

其中

$$x^{(1)}(k) = \sum_{m=1}^{k} x^{(0)}(m) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

(2)等間隔 GM(1,1)模型的建立：

將步驟一之相關數據建立一灰擬微分方程式

$$\frac{dx^{(1)}(k)}{dt} + az^{(1)}(k) = b \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

其中

$z^{(1)}(k) = 0.5[x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k+1)]$ k=2,3,…,n

$dx^{(1)}(k) = x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) = x^{(0)}(k)$

經由影子方程式可得下式之型式：

$x^{(0)}(k) + a\, z^{(1)}(k)\, dt = b\, dt$

等間隔序列時，dt = 1

(3)計算上式中模型參數 a 及 b 之值

建數據矩陣[B]與〔Yn〕

$$[B]=\begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \cdots\cdots & \cdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}$$

$\{Yn\}=\{x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \cdots\cdots, x^{(0)}(n)\}^{T}$

利用最小二乘法得 a,b 的 $\hat{a}$ 矩陣為

$$\hat{a}=(B^{T}B)^{-1}B^{T}Y_{N} \quad \text{......(6)}$$

$$\hat{a}=[a\,,b]^{T}$$

(4)求模型白化值 $\hat{x}^{(0)}(k)$

從步驟三求出模型參數 a，b 後， GM(1,1)白化方程式可寫為

$$\frac{\Delta x^{(1)}(k)}{dt}+ax^{(1)}(k)=b \quad \text{......(7)}$$

而 $x^{(1)}(1)$的起始值為 $x^{(0)}(1)$

按一般常微分方程求解，得離散化的 $x^{(1)}$響應式為

$$x^{(1)}(k)=(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a})e^{-a(k-1)}+\frac{b}{a} \quad \text{......(8)}$$

$$\hat{x}^{(0)}(k)=x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1) \quad \text{......(9)}$$

(5)殘差檢驗

利用建模所得的預測數據和原始數據間做殘差比較，第 k 個數據殘差為

$$\delta^{(0)}(k)=\frac{x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)}\times 100\,\% \quad \text{......(10)}$$

而建模後，k 個數據之平均殘差為

$$\text{平均殘差}=\frac{\sum_{n=1}^{k}\delta^{(0)}(n)}{k} \quad \text{......(11)}$$

## 四、預測結果

灰預測建模所需樣本數據，每一數列之數據在 4 至 10 個之間，也有多於十個數據。本文以 89 年期間於雲林縣莿桐現場所觀測之數據提供作為建模之資料，除以時間序列模式與迴歸方法預測之外，並藉由 GM(1，1)模型之估計，求得田菁生長之預測模式，最後再以誤差率（%）＝（預測值－實測值）/實測值*100%，作為檢討。首先應用迴歸分析如方程式(1)，預測出第 33 天田菁之莖長為 53.077 公分，根長為 13.345 公分。再應用時間序列 ARMA(1,1)模式如方程式(3)測出第 33 天田菁之莖長為 55.749 公分，根長為 13.178 公分。最後由灰色預測模式 GM（1,1）做相同時間之預測得出第 33 天田菁之莖長為 75.982 公分，根長為 13.971 公分，整理如表 1。

表 1　各模型預測結果

| 預測模型 | 第 33 天之預測值 | | 誤差率% | |
|---|---|---|---|---|
| | 莖長(cm) | 根長(cm) | 莖長 | 根長 |
| 時間序列模式 | 55.749 | 13.178 | 20.59 | 1.56 |
| 迴歸分析法 | 53.077 | 13.345 | 24.4 | 0.32 |
| GM(1，1) | 75.982 | 13.971 | 8.10 | 5.52 |

採取現場 33 日田菁作物之莖長及根長生長數據分別為 70.211 公分及 13.388 公分，而依三種不同模式預測之結果發現，在莖長部份之預測中，時間序列及迴歸分析兩種預測模式之結果，其誤差率皆高於 20%以上，相較之下 GM(1,1)之誤差率僅約 8%。再就田菁根長部份做預測，迴歸分析之誤差最小，為 0.32%，其次是時間序列誤差率為 1.56%，GM(1,1)預測誤差為 5.52%，但因田莖根長生長長度不像莖長高度生長變化率來得大，故 GM(1,1)模型預測仍應是可以接受的。因此在整個田菁生長預測中灰色模型 GM(1,1)是值得參考及可行之模式。依 GM(1,1)模式預測 33 日之莖長為 75.982cm，誤差約為 8.10%；根長為 13.971cm，誤差為 5.52%。

## 五、結　論

自政府加入 WTO 組織後，農業環境改變過程將迅速產生變化，對水資源之利用效率需求愈來愈高，如何將水資源做最有效率之應用，是當今水資源調配利用之重要課題，在灌溉過程中作物吸水量及作物生長高度對水資源有重要影響，本研究因此以不同預測模式乃針對田菁綠肥

作物生長之情況進行模擬探討，得下列結論：

1. 依 GM(1,1)模式預測 33 日之莖長爲 75.982 cm，殘差爲 8.10%；根長爲 13.971cm，殘差爲 5.52%。
2. 依迴歸模式預測 33 日之莖長爲 53.77cm，誤差爲 24.4%；根長爲 13.345cm，誤差爲 0.32%。
3. 依時間數列模式預測 33 日之莖長爲 55.749 cm，誤差爲 20.59%；根長爲 13.178cm，誤差爲 1.56%。
4. 三種預測方法，以 GM(1,1)在莖部之預測最精確，而不同田菁根部生長因爲變化率不大，故 GM(1,1)在田菁生長模擬之預測結果是尚屬可行的模式。

## 謝 誌

本文承農委會 89 農發—11.1—林—02（01）—(07)-2 經費補助得以完成研究，特此致謝。

## 參考文獻

1. 鄧聚龍、郭洪，1996 "灰預測原理與應用"，全華科技圖書。
2. 張東炯，2000，"作物根系在水分滲漏之影響"，農委會，。
3. Feddes, R. A, E. Bresler and S.P.Neuman, 1974. "Field test of a modified numerical model for water uptake by root systems". Water Resource. Res.10(6):1199-1206。
4. 丁澈士、王裕民、柯亭帆、鄒禕、廖秋榮，1998，"農業灌溉用水對屏東平原地下水補注之調查評估"，行政院農委會報告，第 2 頁。
5. 施嘉昌、徐玉標、曹以松、甘俊二，1995，"灌溉排水原理"，國立編譯館，第 336-338 頁。
6. 葉一隆、鄒禕、王裕民，1998，"水稻田對地下水補注與調洪功能試驗以屏東崁頂試驗區爲例"，屏東科技大學學報第七卷第三期，第 207 頁。
7. 吳柏林，1998，現代統計學，五南圖書出版有限公司，第 303-306 頁。
8. 吳坤暉、曾國雄，2002，"可能性灰色預測模型在台灣股市加權指數上之應用"，灰色系統學刊，第五卷，第一期。

**收稿日期：民國** 91 **年** 4 **月** 15 **日**
**修正日期：民國** 91 **年** 8 **月** 12 **日**
**接受日期：民國** 91 **年** 8 **月** 26 **日**