



## 高效率量測法應用於淨水場明渠流量之推估 An Efficient Method of Discharge Measurement in Open Channel of Water Purification Plant

國立台灣大學生物環境系統  
工程學系博士後研究

陳彥璋

Yen-Chang Chen

國立台灣大學生物環境系統  
工程學系教授

張斐章

Fi-John Chang

國立台灣大學生物環境系統  
工程學系博士班研究生

楊翰宗

Han-Chung Yang

### 摘要

流量之資訊為自來水事業處管理之重要依據，而自來水事業處之流量量測主要靠大型之流量計推估流量資料，因此流量計需定時校正以確保其準確性。本研究應用高效率量測法於淨水池之水流於渠道進入管路之前，以高效率量測法量測管路之流量，以作為流量計之校正依據。高效率流量量測法主要是利用明渠之平均流速與最大流速為定值之規律以量測流量，而最大流速可由最大流速所在之垂線上測取少數之流速而加以推估。此外最大流速所在之垂線相當穩定，不受時間、流量或水位所影響。因此斷面之平均流速將可由所推估之最大流速與定值推求。此外通水斷面積可藉由水位、最大流速所在垂線之水深或其與水面寬之積推求。因此流量可由斷面之平均流速與斷面之通水面積推求。本研究利用台北自來水事業處直潭淨水場之流速及水深資料建構高效率流量量測模式，以推求各淨水池之流量。其結果顯示此法可有效率且準確推估淨水場之流量，以供大型流量計校正使用。

**關鍵詞：**流量量測，矯，最大流速，機率分佈，不確定性。

### ABSTRACT

Discharge is among the most important information necessary for the management of the water purification plant. To accurately measure discharge, the flowmeters have to be calibrated regularly. An efficient method presented herein is used to estimate discharge quickly and accurately. The data of discharge is devoted to calibrate the coefficients of the flowmeters. An efficient method bases on the regularity in open-channel flows that the nature maintains a constant ratio of mean to maximum velocities at a given channel section by adjusting the velocity distribution and the channel geometry.

The maximum velocity at a given section can be easily determined on a single vertical, which tends to remain invariant with time and discharge, and can be converted to the mean velocity of the entire cross section by timing the constant ratio. The channel cross-sectional area can be determined from the gage height, the water depth at the y-axis or the product of the channel width multiplied by the water depth at the y-axis. Then the most commonly used method, the velocity-area principle, which determines discharge as the product of the cross-sectional area timing mean velocity is applied to estimated the discharge. The available data of the Chihtan Water Purification Plant is used to illustrate the accuracy and reliability of the proposed method. The results show that it can efficiently and accurately estimate discharge for the calibration of the flowmeters.

**Keywords:** Discharge measurement, Entropy, Maximum velocity, Probability distribution, Uncertainty.

## 一、前言

現今高科技產業之迅速發展，工業用水量相對的日益提升，而人民之生活水準亦不斷在提高，生活用水量則相對的日漸增加。在全球氣溫日漸之提升的結果下，水資源的循環利用逐漸的不尋常化，日漸造成水資源開發之不易，因而迫使水資源愈來愈缺乏，也因此促使世界各國逐漸重視此問題，更為目前政府各相關單位所密切注意之焦點。大台北地區目前出現乾旱之情形，既說明了水資源缺乏所帶來之生活不便與影響經濟發展問題之嚴重性。在無水可用之情形下，必需實施相對應之限水措施，而此措施除造成生活上之不便外，對於用水需求較大之相關產業，亦將影響其生產量，相對應牽連影響其他產業之發展，如此息息相關之社會動態，在缺水嚴重之情形下，將更明顯顯現出問題的嚴重性。在水資源愈來愈受重視之情形下，精確的得知所擁有之可用水量，已是迫在眉梢之問題。有效的掌握可用水量之進與出，方能合理調配水量以滿足所需，並減少用水短缺之機率，如此方能真正達到先進國家之水準。

台北自來水事業處負責大台北地區之供水系統，其擁有長興、公館、陽明、直潭及雙溪等五座淨水場，每日處理約 200 萬噸之原水，以供大台北地區 384 餘萬人之日常用水，其重要性不

言而喻。在全球逐漸面臨無水可用之困境的情況下，水量的調配、利用與控制則日顯重要。台北自來水事業處為有效掌握供水之出水量，並讓漏水率降低已達先進國家之水準，目前配合行政院擴大內需方案，全方位執行「汰換舊漏給水管線計畫」，已逐步進行各項計量表與管線的改善和汰換工作([www.twd.gov.tw](http://www.twd.gov.tw))。除此之外，台北自來水事業處淨水場設備對於出水量之量測方式，至今仍以文氏管為主，其量測所得之數值與實際值有所誤差。因此本研究針對直潭淨水場大型量水設施流量量測之準確度進行全方面評估與校驗工作。期望在水資源的永續利用前提下，對水處供水之出水量能有效得以控制與瞭解。本研究發展高效率、簡易且適用於大型量水設施流量量測及推估之方法，並引進 ADV (Acoustic Doppler Velocimeter) 觀測儀器(Lohrmann 等，1994)。藉此流量量測法未來將可：(a)建立大型量水設施流量量測技術標準程序、(b)縮短量測時間、(c)節省人力成本、(d)提高大型量水設施流量量測之精度，以及(e)取得淨水池明渠之水流流況資料等。

一般而言，流量量測使用之方法眾多，其有藉由量測水頭或壓力以推求流量之儀器或設施者（如堰、孔口計、文氏管等）；亦有藉由流速量測儀器以推求流量者，如旋杯與螺旋槳式流速儀、聲波杜卜勒流速儀(ADP, Acoustic Doppler

Profiler ; ADCP , Acoustic Doppler Current Profiler)、雷射杜卜勒流速儀、電磁流量計等。另外亦有使用總體積法方式直接量測推求者，但此方式需有容納足夠水量進行量測之容器或結構物等。上述流量量測之方法其各有優缺點，且適用之場所亦因地制宜。台北自來水事業處曾委託淡江大學虞國興教授進行其大型量水設施流量量測之檢討，其乃利用幹管中新設之超音波流量計校驗加壓站之文氏管流量計，而與本研究之量測地點及量測方法有所不同，其所得之結果為文氏管高估流量，且精度在可接受之範圍（台北自來水事業處 2000）。本研究為解決現行自來水幹管無法架設量測儀器之缺點，乃利用 ADV 量測儀器於淨水場將進入管路之前的明渠，進行流速精密之量測，並配合流速理論進行流量之量測與推求，以高效率之量測方式，以應用於淨水場流量之推估。研究中在改變不同流量以進行水流中流速之量測，以測得各垂線之速度剖面，進而推求出量測斷面之最大流速發生位置，並進行平均流速與最大流速比值之推求，以求得此斷面之流量量測模式。

## 二、高效率流量量測法

變量流時之流況變化劇烈，流量之量測需在極短時間內完成，然而傳統量測法量測需時甚長且量測儀器無法適用於此時期，因此很難以傳統之量測法測取流速、流量等所需資料。高水位及變量流時期流量量測之先決條件為以最簡單之方法，於最短時間內，測取所需之最少資料，以推估流量。理論上高效率流量量測法並無限制應用於何種流況(Chen, 1998)，除明渠外，其亦可應用於管流之流量量測(Chiu 及 Chen, 1999)。目前已驗證高效率流量量測法不僅可適用於高水位時期之變量流(Chiu 及 Chen, 1998)、感潮河段之變量流(Chen 及 Chiu, 2002)，亦可應用於如實驗室或淨水場之穩定流。高效率流量量測法乃利用平均流速與最大流速為定值之關係推估流量，而其基本上為利用速度面積原理(Herschy, 1999)。

$$Q = \bar{u}A \dots\dots\dots(1)$$

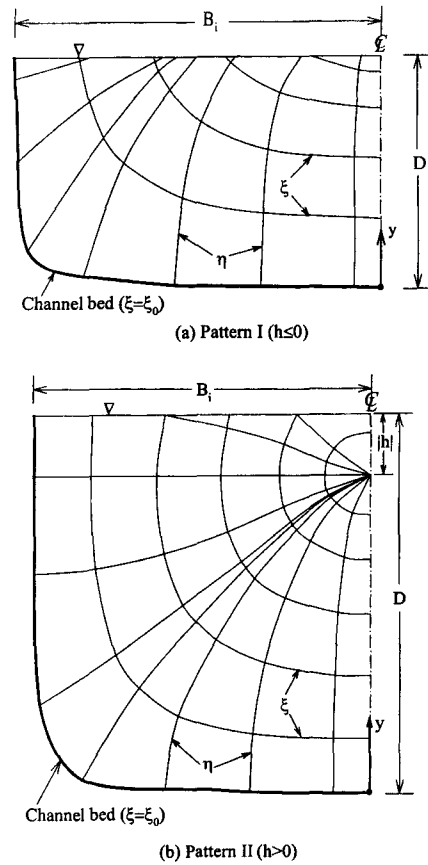


圖 1 流速分佈及等流速座標系統；(a)最大流速發生在水面；(b)最大流速發生在水面下

其中  $Q$  為流量； $\bar{u}$  為斷面平均流速； $A$  為渠道斷面積。以下之各節將分別陳述  $\bar{u}$  及  $A$  之推求，並說明如何應用於淨水場之流量量測。

### (一) 平均流速與最大流速之關係

用以推導高效率流量量測法之流速分佈公式(Chiu, 1989)，需可完整描述並準確模擬最大流速發生於水面下之流況，其為

$$\frac{u}{u_{max}} = \frac{1}{M} \ln \left[ 1 + (e^M - 1) \frac{\xi - \xi_0}{\xi_{max} - \xi_0} \right] \dots\dots\dots(2)$$

其中  $u_{max}$  為最大流速； $M$  為參數； $\xi$  則為圖 1 中之等流速線(Chiu 及 Chiu, 1988)； $u$  為在  $\xi$  處之

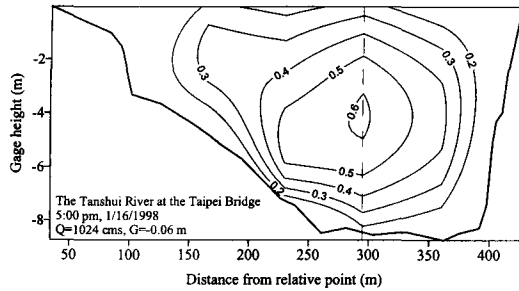


圖 2 等流速線圖及 y 軸位置

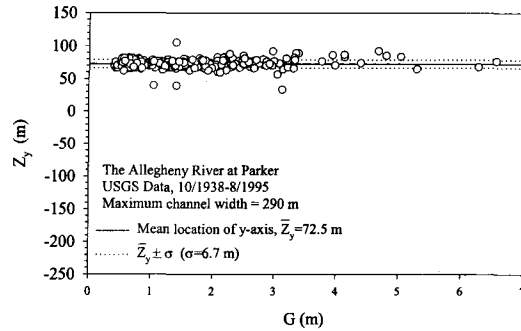


圖 3 y 軸之穩定性

流速； $\xi_{max}$  與  $\xi_0$  則分別為當  $u=u_{max}$  及  $u=0$  時之  $\xi$  值。 $\eta-\xi$  座標系統可用等流速線  $\xi$  描述流場，此外  $\xi$  與  $u$  之關係為一對一之關係，即於  $\xi$  上之流速皆相同，並不會如一般之座標系統於相同之流速可能發生在不同之位置。在最大流速發生之垂線（y 軸）上之  $\xi$  為

$$\xi = \frac{y}{D-h} \exp\left(1 - \frac{y}{D-h}\right) \dots\dots\dots(3)$$

其中  $y$  為距渠底之距離； $D$  為水深； $h$  為最大流速發生之位置。若  $h \leq 0$  時，最大流速發生在水面；若  $h > 0$ ，最大流速發生在水面下  $h$  處。

藉由機率之概念，小於流速  $u$  之機率為介於  $\xi_0$  與  $\xi$  間之面積，因此

$$\frac{\xi - \xi_0}{\xi_{max} - \xi_0} = \int_0^u p(u) du \dots\dots\dots(4)$$

其中  $p(u)$  為機率密度函數。藉由求取最大之熵（Shannon, 1948; Wu, 1997），可推導出平均流速與最大流速之關係如下

$$\frac{\bar{u}}{u_{max}} = \frac{e^M}{e^M - 1} - \frac{1}{M} = \Phi \dots\dots\dots(5)$$

詳細之推導過程則可參考附錄。

(二) 最大流速發生位置之穩定性

明渠中最大流速發生位置不容易確定，幸運的是最大流速可藉由平時之流量量測時所測取之流速資料，藉由等流速線之繪製，可找尋出最大流速發生之位置。對天然河川而言，y 軸可能位於斷面之任何的地方，然於人造之直線渠道且

斷面為對稱之矩形時，y 軸則極有可能發生於斷面之中心附近。圖 2 為淡水河感潮河段台北橋站之等流速線圖，由圖中可明顯看出最大流速發生之垂線之位置（圖中之虛線）。當渠道斷面變化不大時，y 軸將十分穩定，不會隨時間、水位及流量之改變而改變。圖 3 為美國 Allegheny 河在 Parker 測站之 y 軸與水位之關係（Chiu 及 Chen, 1999），在長達約 60 年中（1938-1995），y 軸十分穩定，不受時間及水理等因子影響，因此  $u_{max}$  總是發生在離參考點約 290 m 之處。因此可藉由歷史資料找尋 y 軸可能發生之位置，而於此垂線推估斷面之最大流速。

(三) 最大流速之推求

於 y 軸附近所推求之最大流速與真實之最大流速將十分接近（Chen, 1998），因此輕微之 y 軸移動將不會對最大流速之推估產生嚴重之誤差，所以可以於平均之 y 軸處，以現代化之量測儀器（如 ADV、ADP 及 ADCP），測取少數之流速以推算最大流速。若所測取之流速十分多，則可藉由(2)式以非線性迴歸之方法推估最大流速。若以常用之兩點法（Rantz 等, 1983）測取流速，則可藉由以下之方程式求得  $u_{max}$ 。

$$u_{0.2} = \frac{u_{max}}{M} \ln \left[ 1 + (e^M - 1) \frac{\xi_{0.2}}{\xi_{max}} \right] \dots\dots\dots(6)$$

$$u_{0.8} = \frac{u_{max}}{M} \ln \left[ 1 + (e^M - 1) \frac{\xi_{0.8}}{\xi_{max}} \right] \dots\dots\dots(7)$$

$$\bar{u}_y = \frac{u_{0.2} + u_{0.8}}{2} = \frac{u_{\max}}{MD} \int_0^D \ln \left[ 1 + (e^M - 1) \frac{\xi}{\xi_{\max}} \right] dy \quad (8)$$

$$\xi_{0.2} = \frac{0.8D}{D-h} \exp \left( 1 - \frac{0.8D}{D-h} \right) \quad (9)$$

$$\xi_{0.8} = \frac{0.2D}{D-h} \exp \left( 1 - \frac{0.2D}{D-h} \right) \quad (10)$$

$$\xi_{\max} = 1 \quad \text{if } h \geq 0 \quad (11)$$

$$\xi_{\max} = \frac{D}{D-h} \exp \left( 1 - \frac{D}{D-h} \right) \quad \text{if } h < 0 \quad (12)$$

(8)式中  $u_{0.2}$  及  $u_{0.8}$  分別為距水面 0.2 及 0.8 水深處之流速。

#### (四) 斷面積之推求

以傳統量測工具（如測深錘、聲波測深儀等）所測得之面積，可用以建立渠道斷面積之推估模式。若測站之斷面穩定且沒有明顯之沖淤現象發生，則可利用水位與斷面積之關係推求通水斷面積

$$A = a_1(G - b_1)^{c_1} \quad (13)$$

其中  $G$  為水位， $a_1$ 、 $b_1$  及  $c_1$  則為係數。若渠道河床不穩定，時常有沖淤之情形發生，則可用  $y$  軸水深推估通水斷面積

$$A = a_2(d - b_2)^{c_2} \quad (14)$$

其中  $d$  為  $y$  軸水深， $a_2$ 、 $b_2$  及  $c_2$  則為係數。若渠道之流心不穩定，且渠道常變換其位置，則可用  $y$  軸水深與水面寬之積推估通水斷面積

$$A = a_3(Bd - b_3)^{c_3} \quad (15)$$

其中  $B$  為水面寬， $a_3$ 、 $b_3$  及  $c_3$  則分別為係數。圖 4 (Chiu 及 Chen, 1999) 則為分別以(13)、(14)及(15)式建構二仁溪之斷面積推估模式所推估之斷面積 ( $A_{est}$ ) 與實測斷面積 ( $A_{obs}$ ) 之關係，其中又以(15)式所推求之斷面積較準確。

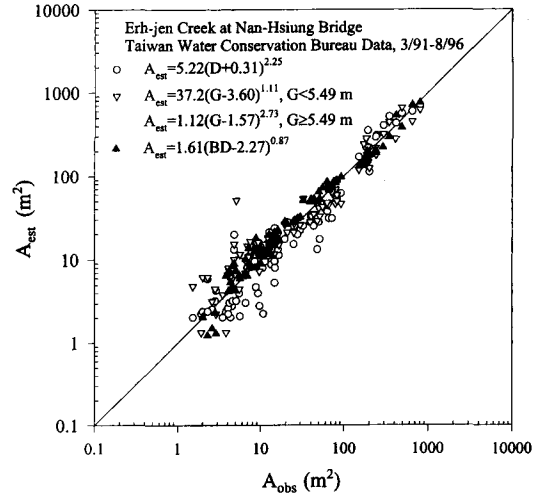


圖 4 不同斷面積推估模式之準確性

### 三、直潭淨水場流量之推估

直潭淨水場位於新店溪畔，由直潭壩取水，為台北自來水事業處三個主要淨水場中之最重要淨水場，每日處理約 200 萬噸之原水，以供大台北地區 384 餘萬人之日常用水。原水經暗管由直潭壩輸送至直潭淨水場之分水井，再分別分配至淨水場之四座淨水池，而流量則由位於分水井與各淨水池間之大型流量計所監測。除第一座淨水池採用電磁式流量計外，其餘三座淨水池皆採用大型文氏管量測流量。然流量計之係數需經常校正以保持流量量測之準確，因此需藉由其他儀器及方法推估流量以供其校正用。表 1 為文氏管、電磁流量計與本研究之方法的比較。因自來水系統絕大部分皆以管路輸送水，而大型管路為封閉系統，因此不太可能架設儀器以量測管中之流場，故自來水系統中可供流量量測之地點並不多，直潭淨水場中流量穩定且可架設儀器之地點只有各淨水池於快濾池前之一小段明渠可為量測地點。此明渠寬 4 公尺，流量對水深影響不大，其約在 2.8 公尺左右；本研究由邊壁 25 公分開始，每隔 50 公分量測 1 流速剖面，因此共有 8 流速剖面，而每流速剖面由渠底 10 公分開始，往上每 25 公分量測一點流速以供流量計算，並以流速-面積原理之平均區域法 (Bureau of

表 1 文氏管、電磁流量計與高效率流量量測法之比較

	文氏管	電磁流量計	高效率流量量測法
原理	壓力差	法拉利定律	最大流速與平均流速之關係
應用範圍	管流	管流	管流與明渠
量測時間	可自動化即時觀測	可自動化即時觀測	模式建構完成後，可自動化即時觀測
精確度	2%	2%	淨水場流況穩定，誤差可控制在2%以內
誤差來源	管徑變化、管壁糙度變化等	管徑變化、電流不穩	斷面嚴重變化
儀器裝設	需經準裝設，且於裝設完後方能校正文氏管係數，此外儀器無法移動	需準確裝設，以降低流量量測誤差，此外儀器無法移動	儀器只需於固定垂線附近量測流速，儀器可於量測完後拆卸，以供其它地方使用
儀器校正	需定期校正，但因大型管路系統中，無法位置裝置儀器用以校驗文氏管，因此校正困難	無需經常校正，電磁流量計磁性部分易因受潮損壞，因此需經常檢驗儀器是否運作正常	如用 ADP 或 ADV 等聲波流速儀，若無受嚴重撞擊，無需經常檢驗
成本	大型文氏管價格昂貴	昂貴	ADP 或 ADV 價格與文氏管或電磁流量計比較下，相對便宜甚多

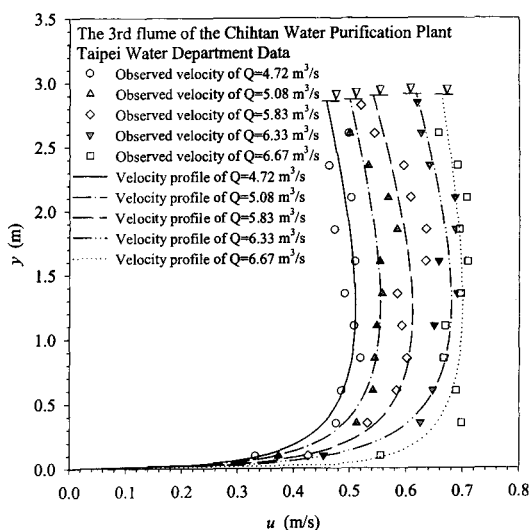


圖 5 第三淨水池明渠 y 軸流速分佈

Reclamation, 1997) 推求斷面之流量。

經由資料之分析，y 軸相當穩定，皆位於渠道中心附近，圖 5 為直潭淨水場第三淨水池明渠於 y 軸之流速分佈，其顯示最大流速皆發生在距渠底約三分之二處。藉由(2)式可推算斷面之最大流速，而平均流速則可藉由實測流量除以斷面積。圖 6 為平均流速與最大流速之關係，第一至

第四淨水池之平均流速分別可由  $0.771u_{max}$ 、 $0.771u_{max}$ 、 $0.82u_{max}$  及  $0.809u_{max}$  推估。此外圖 6 亦顯示平均流速與最大流速之關係相當穩定，為如(5)式所示，為通過原點之線性關係。本研究之量測地點為人工渠道，因此通水斷面積可以  $4D$  推算，故第一至第四淨水池之流量可以  $3.084u_{max}D$ 、 $3.084u_{max}D$ 、 $3.28u_{max}D$  及  $3.263u_{max}D$  推估。圖 7 說明高效率量測法所推估流量之準確性，所有點皆落在 45 度線上，其顯示以於 y 軸量測少數之流速並用此法推估之流量與應用約 100 點於斷面仔細量測流場所得之流量十分接近，其誤差可控制在 2% 以內，若以相關係數 (Myers, 1990) 說明高效率量測法之準確，其相關係數約為 0.997，顯示此法之準確性與穩定性。因此往後淨水場要校正流量計之參數時，可於相同之斷面測取水深，並於 y 軸之位置測取少數之流速以推估最大流速，即可快速且準確推估流量，而無需再發費大量的人力、物力及時間於流量量測。

#### 四、結論

本研究應用高效率、簡易且適用於推估之淨水場明渠流量之流量量測法，以校驗大型量水設

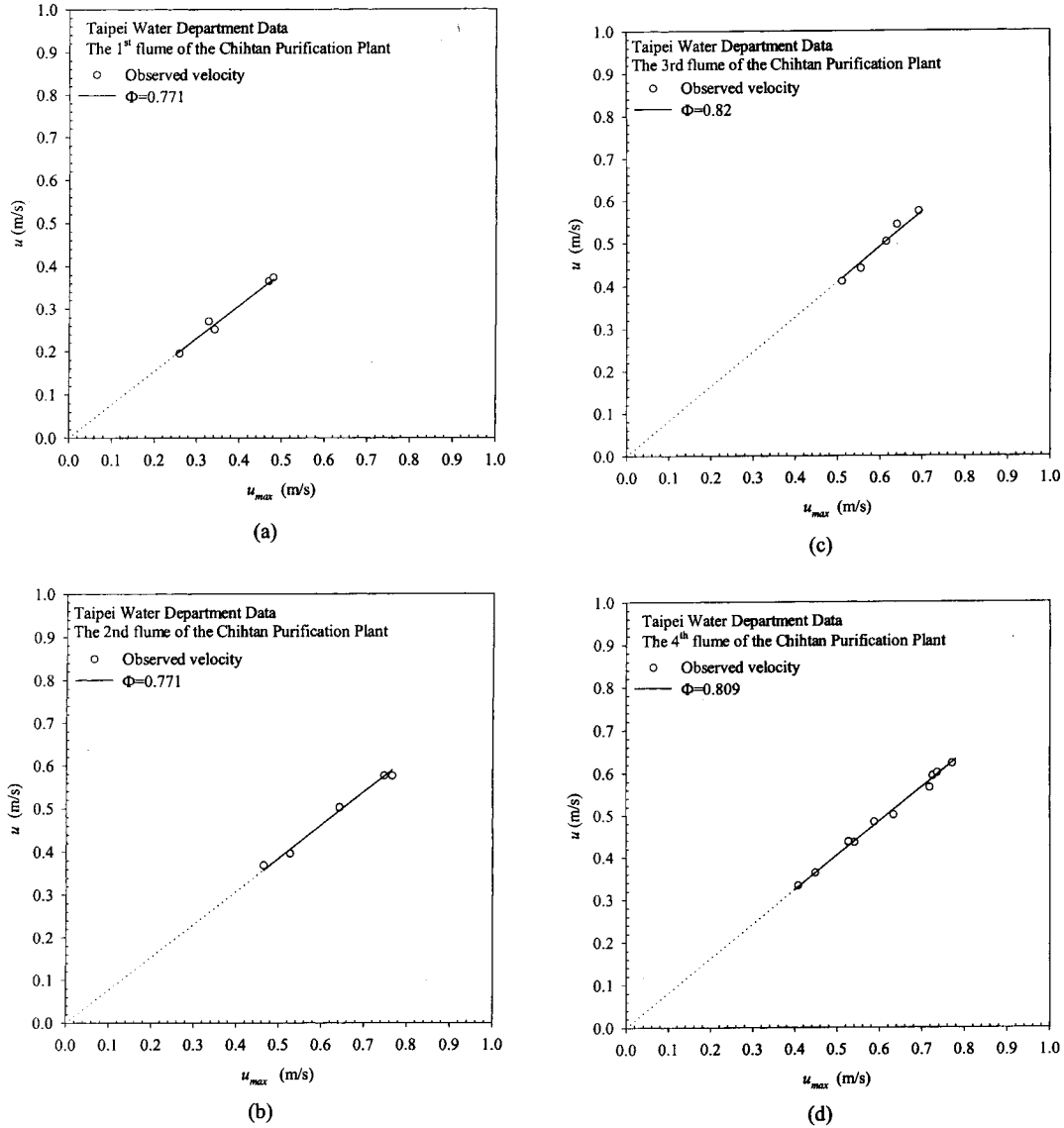


圖 6 平均流速與最大流速之關係；(a)第一淨水池；(b)第二淨水池；(c)第三淨水池；(d)第四淨水池

施流量計；此外本研究亦引進 ADV 觀測儀器，可縮短量測時間，並自動化紀錄量測結果，因此可針對直潭淨水場大型量水設施流量量測之準確度進行全方面評估與校驗工作，期望在水資源的永續利用前提下，對台北自來水事業處供水之出水量，提供一有效得以控制與瞭解之方法。綜合本文相關研究結果與分析後，獲致以下之結論：

1. 高效率流量量測法主要乃藉由求取最大燻之方式，推導出平均流速與最大流速為定值 ( $\bar{u}/u_{max} = \Phi$ ) 之關係，並利用基本的速度面積原理，而加以推估流量。對於平均流速之求得，乃是利用此定值 ( $\Phi$ ) 乘上量測所得之最大流速而得之，而渠道通水斷面積之推估模式可利用水位與斷面積之關係推求之。實際應用上，乃將此求得

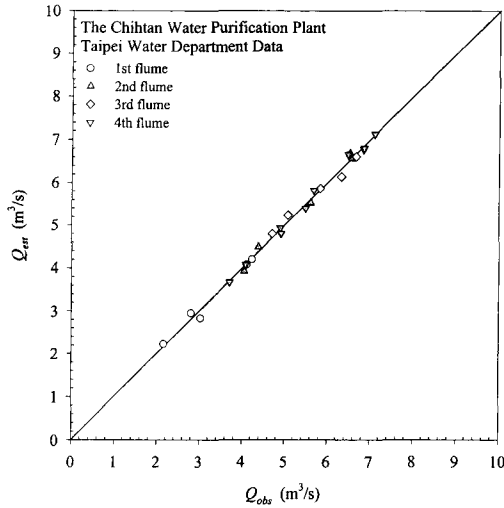


圖 7 觀測流量與推估流量之關係

之平均流速乘上推估之通水斷面積而求得推估之流量。

2. 經由直潭淨水場實際現場量測資料之分析，可知 y 軸相當穩定，皆位於渠道中心靠外側附近，而最大流速皆發生在距渠底約三分之一處。藉由平均流速與最大流速之關係，第一至第四淨水池之平均流速分別可由  $0.771u_{max}$ 、 $0.771u_{max}$ 、 $0.82u_{max}$  及  $0.809u_{max}$  推估。再將推估之平均流速乘以通水斷面積即可求得淨水池之流量。
3. 高效率流量量測法不僅可適用於高水位時期之變量流，亦可應用於流況穩定之淨水場明渠，利用此法所推估之流量其準確性相當高，誤差可控制在 2% 以內，觀測流量與推估流量之相關係數為 0.997。
4. 於實際應用上，往後可於相同之量測斷面測取水深，並於 y 軸之位置測取少數（約只需 3、4 點之流速資料）之流速以推估最大流速，即可快速且準確推估流量，以供淨水場對於大型流量計參數校正使用。因此應用此法無需再重新仔細量測斷面之流場，且可節省大量之時間、人力及物力。
5. 此外若可於渠底裝設超音波流速儀，則可隨時即時準確監控流量，故此法可達到量測自動化之目的。

## 謝 誌

本研究承蒙台北自來水事業處之研究經費補助及中興大學土木系盧昭堯教授之協助，謹此致謝。

## 參考文獻

1. 台北自來水事業處，2000，大型量水設施流量量測之檢討。
2. Bureau of Reclamation, 1997. *Water Measurement Manual*. U.S. Government Printing Office, Denver.
3. Chen, Y.-C., 1998. *An Efficient Method of Discharge Measurement*. Ph.D. Dissertation, University of Pittsburgh.
4. Chen, Y.-C., and Chiu, C.-L., 2002. "An efficient method of discharge measurement in tidal streams." *Journal of Hydrology*, 265(1-4), 212-224.
5. Chiu, C.-L., 1989. "Velocity distribution in open-channel flow." *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE* 115(5), 576-594.
6. Chiu, C.-L., and Chen, Y.-C., 1999. "Efficient methods of measuring discharge and reservoir-sediment inflow." *Risk Analysis in Dam Safety Assessment*, Edited by J.-T. Kuo and B.-C. Yen, Water Resources Publications, Highlands Ranch, Colorado, 97-116.
7. Chiu, C.-L., and Chen, Y.-C., 1998. "A fast method of discharge measurement in open-channel flow." *Water Resources Engineering '98*, Edited by Abt, et al., ASCE, Reston, Virginia, 1721-1726.
8. Chiu, C.-L., and Chiou, J.-D., 1988. "Entropy and 2-D velocity distribution in open-channels." *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE* 113(7), 738-756.
9. Herschy, W. R., 1999. *Hydrometry – Principles and Practices*. Wiley, West Sussex, England.
10. Lohrmann, A., Cabrera, R., and Krans, N.C., 1994. "Acoustic-Doppler Velocimeter (ADV)



for laboratory use.” *Hydraulic Engineering*, 1:351-365.

11. Myers, R. H., 1990. *Classical and Modern Regression with Application*. Duxbury, Belmont, California.
12. Rantz, S. E., et al., 1983. *Measurement and Computation of Stream flow: Volume 1. Measurement of Stage and Discharge*. U.S. Geological Survey Water-Supply Paper 2175, U.S. Government Printing Office, Washington.
13. Shannon, C. E., 1948. “A mathematical theory of communication.” *The Bell System Technical Journal* 27, 623-656.
14. Wu, N., 1997. *The Maximum Entropy Method*. Springer-Verlag, New York.
15. www.twd.gov.tw, 2002. Web site of the Taipei Water Department.

### 附 錄

本研究中之(9)式主要為最大化熵值，而熵值則如

$$H(x) = -\sum_j p(x_j) \ln p(x_j) \dots\dots\dots(A1)$$

(A1)式顯示熵值則為不確定性之平均值，若為連續性則為

$$H(u) = -\int_0^{u_{\max}} p(u) \ln p(u) du \dots\dots\dots(A2)$$

$p(u)$ 為機率密度函數，因此必須滿足

$$\int_0^{u_{\max}} p(u) du = 1 \dots\dots\dots(A3)$$

此外  $p(u)$ 也要滿足

$$\int_0^{u_{\max}} u p(u) du = \bar{u} \dots\dots\dots(A4)$$

藉由 Larange Multipliers 法則，則可得到

$$p(u) = e^{(\lambda_1-1)} e^{\lambda_2 u} \dots\dots\dots(A5)$$

其中 $\lambda_1$ 與 $\lambda_2$ 為係數。將(A5)式代入(A3)式則可得

$$\int_0^{u_{\max}} e^{(\lambda_1-1)} e^{\lambda_2 u} du = 1 \dots\dots\dots(A6)$$

或

$$e^{\lambda_1-1} = \frac{\lambda_2}{e^{\lambda_2 u_{\max}} - 1} \dots\dots\dots(A7)$$

令  $M = \lambda_2 u_{\max}$  並將(A7)代入(A5)式，機率分佈方程式則為

$$p(u) = \frac{M}{u_{\max} (e^M - 1)} e^{\frac{M}{u_{\max}} u} \dots\dots\dots(A8)$$

累積機率方程式也將為

$$\int_0^u p(u) du = \frac{e^{\frac{M}{u_{\max}} u} - 1}{e^M - 1} \dots\dots\dots(A9)$$

由(A9)式及  $0 \leq \xi \leq 1$ ，將可求得流速分佈方程式

$$\frac{u}{u_{\max}} = \frac{1}{M} \ln \left[ 1 + (e^M - 1) \frac{\xi - \xi_0}{\xi_{\max} - \xi_0} \right] \dots\dots(A10)$$

將(A8)式代入(A4)式將可得到平均流速與最大流速之關係

$$\int_0^{u_{\max}} u \frac{M e^{\frac{M}{u_{\max}} u}}{u_{\max} (e^M - 1)} du = \bar{u} \dots\dots\dots(A11)$$

或

$$\frac{\bar{u}}{u_{\max}} = \frac{e^M}{e^M - 1} - \frac{1}{M} = \Phi \dots\dots\dots(A12)$$

收稿日期：民國 91 年 7 月 31 日

修正日期：民國 91 年 9 月 2 日

接受日期：民國 91 年 9 月 9 日