

二維 Holly-Preissmann 數值方法的探討 與應用於變動飽和地下水污染物傳輸例

Revising of 2D Holly-Preissmann Scheme and Application on Modeling Solute Transport in a Variably Saturated Groundwater Zone

逢甲大學水利工程學系
副教授

許少華

Shaohua Marko Hsu

逢甲大學水利工程學系
碩士級研究助理

林伯聰

Bor-Tsong Lin

美國密西根州立大學土木及環境
工程學系博士班研究生

倪春發

Chuen-Fa Ni

摘 要

建構污染物傳輸預測模式，常會遇到嚴重之數值擴散或振盪問題，前人之研究指出其主要源自於移流過程的差分或有限元誤差。本文針對模擬移流過程表現良好之二維 Holly-Preissmann 特性線法進行研究，先由原理著手，發現為符合其基本假設應進一步進行積分修正，修正後之方法顯示於二維剛體旋轉流場中有優異的表現。將之與模擬延散過程的 Crank-Nicolson ADI 法以分離演算法結合建構出污染物傳輸模組。水流模組則配合 van Genuchten 土壤水理曲線，由雙步驟 ADI 法求解二維 Richards 方程式。水流與傳輸模組合併成地下水污染物傳輸模式，以不同降雨條件模擬垂直二維土體中污染物於變動飽和層之傳輸現象。研究發現，簡化的平均降雨條件將使數值結果嚴重高估污染物之滲漏深度。

關鍵詞：移流，延散，二維，分離演算法，Holly-Preissmann 特性線法，Crank-Nicolson 法。

ABSTRACT

Solute transport modeling usually exhibits spurious damping or oscillation when advection dominates. Holly-Preissmann scheme for two-dimensional pure advection transport is revised based on its basic theory. Propagation of the second order derivative terms along the characteristic lines is considered in this study by either numerical or analytical integration. The proposed correction is then verified by a benchmark problem

with initial distributions of continuous Gaussian in a two-dimensional flow called rigid-body rotation.

Split-operator concept is adopted for solving the two-dimensional advection/dispersion equation. In the first step, only advection process is considered and solved by the Holly-Preissmann scheme. The second step is within the same time interval, in which dispersion operator is performed on the advected resulting distribution. The Crank-Nicolson ADI scheme is used in the dispersion step.

A vertical two-dimensional model is then constructed for both flow field and solute transport in variably saturated zone of groundwater. Richards equation and van Genuchten formulas are used as the governing equations for the flow field and solved by two-step ADI scheme to obtain the pressure distribution in the flow field. Unsaturated soil properties are modified at the end of the first step to enlarge the numerical time step.

Application of this model shows that the time scale of precipitation can play an important role in predicting the plume movement. Year-averaged precipitation may overestimate the percolation depth of ground pollutant.

Keywords: Advection, Dispersion, Two-dimensional, Split operator, Holly-Preissmann scheme, Characteristics, Crank-Nicolson scheme.

一、前言

以一般的數值方法直接求解移流延散方程式常伴隨著數值擴散及震盪的問題，且於模擬對象具有 Δt 、速度梯度或濃度梯度較大之特徵時所產生的不良影響更是顯著。而造成此一問題的原因乃是移流延散傳輸方程式本身為混合型偏微分方程式之故，其主要是由一階雙曲線型偏微分方程式的移流項與二階拋物線型偏微分方程式的延散項所組成，故以常用之數值方法直接模擬移流延散過程只能完整的表現出移流或擴散過程無法兩者兼顧，而欲得良好之模擬結果則需以複雜的數值方法才能獲得[1]。

Miller 與 Ralidean(1993)以分離運算子(Split Operator)觀念，將傳輸方程式中的移流項與延散視為兩個物理過程先後發生於同一個時間間距中，如此便可將移流項及延散項拆開求解[2]，依照兩階段不同的傳輸過程，分別以合適的數值方法求解，可以改善傳統模式所受到時間間距及速度或濃度梯度的限制[3]。而由於誤差的主要來源乃是移流項，故求解移流項之數值方法選擇可說是決定數值模式優劣之關鍵。

由過去的研究證明 Holly-Preissmann 特性線法[4]配合 Crank-Nicolson 模擬一維移流延散過程之結果十分理想[5]。由於二維 Holly-Preissmann 特性線法[6]在文獻中並未詳細的敘述步驟，故本文主要針對二維情況下 Holly-Preissmann 特性線法的理論闡述與準確性進行探討，再建構一數值模式模擬垂直二維污染物傳輸，並對簡化降雨條件及真實降雨條件所模擬出之結果進行比較。

二、Holly-Preissmann 特性線法之理論分析

Holly 與 Preissmann (1977) 所提出的特性線法可較準確地求解一維移流(波傳)方程式，為了易於說明二維 Holly-Preissmann 空間平面法，需先瞭解一維 Holly-Preissmann 特性線法為何。一維 Holly-Preissmann 特性線法與其他特性線數值方法最大的不同點，乃在於採用空間上兩點間的三次式內插(Hermitian 內插法或 Two-point fourth-order 法)而非一般的線性內插或多點高次內插，詳細內容置於附錄一。然此一數值方法受限於可蘭數($Cr = U\Delta t/\Delta x$)需小於或等

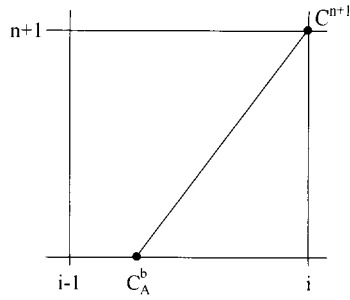


圖 1 空間軸差分示意圖

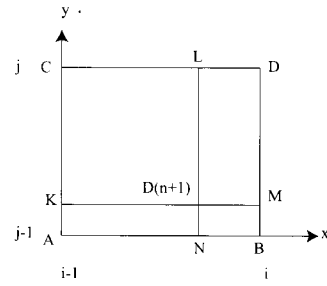


圖 2 空間平面法格點示意圖

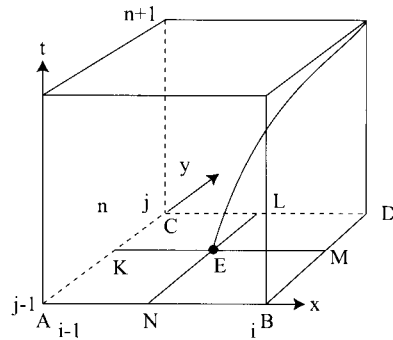


圖 3 空間平面法示意圖

於 1 的情況下方能成立，為了突破一維 Holly-Preissmann 特性線法可蘭數需小於 1 之限制，Yang 與 Hsu(1990)發展出特性線時間軸修正法，使其於可蘭數大於 1 時仍可正確演算[7]。許少華與倪春發（1996）發展單網格時間軸修正之 Holly-Preissmann 特性線法，使此一特性線法可在單一網格中突破可蘭數小於一的限制[8]。

將二維度的純移流波傳方程式取 x、y 軸且 x 方向流速為 U、y 方向流速為 V 則方程式可表示如下：

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

延續一維 Holly-Preissmann 特性線法的觀念，同樣地對於求解二維的問題仍須找出其特性線的位置，差別在於特性線與原時間平面的交點，於一維問題是落在空間中一線段上（如圖 1 所示），而二維的情況則是落在空間平面上（如圖 2、3 所示）。若以空間曲面的觀念，已知網格四個角落點上的 C 值，C 在 x 與 y 兩方向的斜率值以及 C 對 x 與 y 的兩次微分值，則理論上有 16 個條件，應可建構四點間的雙三次式多項式曲面（bicubic polynomial 即最高次項為 x^3y^3 項），然後再進行內插。二維 Holly-Preissmann 特性線法所採用的平面點內插仍沿用多次一維度空間上兩點間的三次式內插亦即 Lagrange 式的 Hermitian interpolation[9]（附錄一 2a、3a 兩式），如圖 2 所示，其中 ABCD 四點各點的變數值 C 與每個點上的三個導數值 $\partial C / \partial x = C_x$ ， $\partial C / \partial y = C_y$ ， $\partial^2 C / \partial x \partial y = C_{xy} = C_{yx}$ 假設於時間

n 均為已知，以下過程乃根據法國 SOGREAH 的 CYTHERE 模式之計算步驟[10]則可求出 D 點於時間 n+1 的濃度，如圖 3 的示意圖所示。

STEP 1：以 AB 線段與 CD 線段端點上的 C 與 C_x 求出 N 與 L 點的 C。

$$C_N^n = e_1 C_{i-1,j-1}^n + e_2 C_{i,j-1}^n + e_3 \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_{i-1,j-1}^n + e_4 \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_{i,j-1}^n \dots\dots\dots(2)$$

$$C_L^n = e_1 C_{i-1,j}^n + e_2 C_{i,j}^n + e_3 \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_{i-1,j}^n + e_4 \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_{i,j}^n \dots\dots\dots(3)$$

STEP 2：以 AB 線段與 CD 線段端點上的 C_y 與 $(C_y)_x$ 求出 N 點與 L 點的 C_y 。

$$\left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_N^n = e_1 \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_{i-1,j-1}^n + e_2 \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_{i,j-1}^n + e_3 \left(\frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} \right)_{i-1,j-1}^n + e_4 \left(\frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} \right)_{i,j-1}^n \dots\dots\dots(4)$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{i,j}^n = e_1 \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{i-1,j}^n + e_2 \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{i,j}^n + e_3 \left(\frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x}\right)_{i-1,j}^n \dots(5)$$

$$+ e_4 \left(\frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x}\right)_{i,j}^n$$

STEP 3 : 以 AC 線段與 BD 線段端點上的 C 與 Cy 求出 K 與 M 點的 C 值。

$$C_K^n = e_5 C_{i-1,j-1}^n + e_6 C_{i,j}^n + e_7 \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{i-1,j-1}^n + e_8 \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{i,j}^n \dots(6)$$

$$C_M^n = e_5 C_{i,j-1}^n + e_6 C_{i,j}^n + e_7 \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{i,j-1}^n + e_8 \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{i,j}^n \dots(7)$$

STEP 4 : 以 AC 線段與 BD 線段端點上的 Cx 與 (Cx)y 求出 K 點與 M 點的 Cx。

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_K^n = e_5 \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{i-1,j-1}^n + e_6 \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{i,j}^n + e_7 \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}\right)_{i-1,j-1}^n + e_8 \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}\right)_{i,j}^n \dots(8)$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_M^n = e_5 \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{i,j-1}^n + e_6 \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{i,j}^n + e_7 \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}\right)_{i,j-1}^n + e_8 \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}\right)_{i,j}^n \dots(9)$$

STEP 5 : 以 KM 線段端點上的 C 與 Cx 求出 E 點的 C 與 Cx。

$$C_E^{n+1} = C_E^n = e_1 C_K^n + e_2 C_M^n + e_3 \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_K^n + e_4 \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_M^n \dots(10)$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_E^{n+1} = \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_E^n = f_1 C_K^n + f_2 C_M^n + f_3 \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_K^n + f_4 \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_M^n \dots(11)$$

STEP 6 : 以 NL 線段端點上的 C 與 Cy 求出 E 點的 Cy。

$$\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_E^{n+1} = \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_E^n = f_5 C_E^n + f_6 C_N^n + f_7 \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_E^n + f_8 \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_N^n \dots(12)$$

由(14)·(15)與(16)式便可求得 n+1 時段 D 點的 C 值與 C 分別對 X 與 Y 方向的一階導數值，以上各方程式中之係數如下

$$\begin{cases} e_1 = Crx^2(3-2Crx) & f_1 = 6Crx(Crx-1)/\Delta x \\ e_2 = 1-e_1 & f_2 = -f_1 \\ e_3 = Crx^2(1-Crx)\Delta x & f_3 = Crx(3Crx-2) \\ e_4 = -Crx(1-Crx)^2 \Delta x & f_4 = (Crx-1)(3Crx-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_5 = Cry^2(3-2Cry) & f_5 = 6Cry(Cry-1)/\Delta y \\ e_6 = 1-e_5 & f_6 = -f_5 \\ e_7 = Cry^2(1-Cry)\Delta y & f_7 = Cry(3Cry-2) \\ e_8 = -Cry(1-Cry)^2 \Delta y & f_8 = (Cry-1)(3Cry-1) \end{cases}$$

$$Crx = U\Delta t/\Delta x \quad Cry = V\Delta t/\Delta y \dots\dots\dots(13)$$

檢視上述之理論可發現，Holly 特性線法主要的基本假設在於特性線上之 $\frac{DC}{Dt} = 0$ ，因此才能確定交點上 n 時段的 C 值即為 n+1 時段之 C 值。但其 C 值一階導數的求法與 C 值同樣採用兩點三次式內插而得，所以也應符合 $D\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)/Dt = 0$ 之基本假設才能成立，但上述方法並不符合此一假設，此在一維純移流問題的 Holly-Preissmann 法即面對過：

若將附錄一(1a)式對 x 微分可得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial C}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right) = -U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right) \dots\dots\dots(14)$$

已知沿著 $\frac{dx}{dt} = U$ 移動，則上式成爲

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right) \dots\dots\dots(15)$$

因此(15)式等號右邊非 0，因此爲了符合特性線基本假設，故需再沿著特性線做積分方可得符合基本假設的值

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_i^{n+1} = \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_i^n + \int_i^{i+\Delta t} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right) dt \dots\dots\dots(16)$$

同樣的二維 Holly-Preissmann 特性線法所面對的二維純移流問題依舊存在 Cx 與 Cy 理論與數值上的誤差，將(1)式對 x 微分可得

$$\frac{D}{Dt}(C_x) = -\frac{\partial U}{\partial x} C_x - \frac{\partial V}{\partial x} C_y \dots\dots\dots(17)$$

將(1)式對 y 微分可得

$$\frac{D}{Dt}(C_y) = -\frac{\partial U}{\partial y} C_x - \frac{\partial V}{\partial y} C_y \dots\dots\dots(18)$$

經由以上分析可知道二維 Holly-Preissmann 特性線法的計算式並不滿足此一全微分基本假設，故 C_x 與 C_y 應加以修正才能使數值方法符合其基本原理。由(17)與(18)發現 C_x 與 C_y 需以聯立的方式求解，此情況比單一變數的一維度問題更加複雜，這或許是二維 Holly-Preissmann 特性線法忽略(17)與(18)兩式的主要原因，故本文對於此點進行數值探討，以明瞭其影響大小。

此外，二維 Holly-Preissmann 特性線法依舊有可蘭數需小於 1 的限制，尤其在流速有較大的落差時，常需為了局部小區域過大流速加大網格間距放棄較高的解析度，或是縮小時間間距加長了整個模式演算的時間。因此，為了突破此一限制林伯聰（1999）以一維時間軸修正為基礎，發展出時間平面修正法與時空平面修正法，使模式可突破可蘭數需小於 1 的限制[11]，然此一時間軸內插方法若於流場過於複雜的情況下則較難施展。

三、Holly 特性線法驗證

為瞭解二維 Holly 特性線法及 C_x 與 C_y 於理論上所需進行之修正對於模擬精度提升之幅度，本文採用 bench-makr 標準測試中將高斯分佈型態污染團置於二維旋轉流場之測試例進行模擬。由(17)與(18)中可知 C_x 與 C_y 兩變數互相相依，因此求解時應將兩式聯立進行求解方能得最準確之解。但兩 P.D.E 聯立求解需要較複雜的運算過程方能得其解，基於數值方法計算乃求得一近似解的觀念下，以簡單之數值積分探討兩種修正式之影響，因此本文以(a)較複雜的聯立求解、(b)簡易的數值積分、(c)未修正，三種模式與進行比較，其設定如下所示：

數值設定：網格間距： $\Delta x = 1$ $\Delta y = 1$
 總網格數：300*300

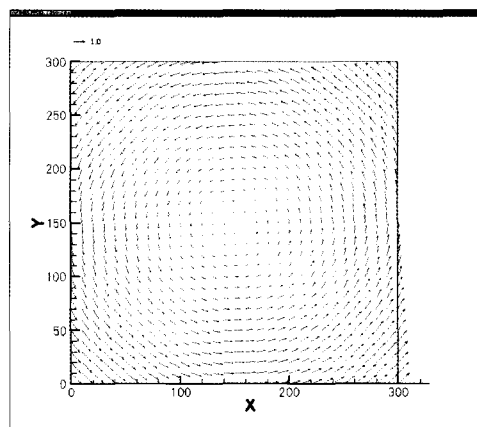


圖 4 旋轉測試例之流場速度向量圖

時間間距： $\Delta t = 1$

起始條件：起始位置： $(x, y) = (150, 75)$

濃度尖峰值：1

$$\text{污染物濃度 } C(x, y) = \exp\left(\frac{L^2}{2\sigma_0^2}\right)$$

污染物初始濃度分佈平面及立體如圖 5 與 6 所示

$$\text{其中 } L = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$\sigma_0 = 10, \quad x_0 = y_0 = 150$$

旋轉流場速度向量如圖 4 所示乃依以下的計算式給定：

$$U = -r \sin \theta; \quad V = r \cos \theta;$$

$$r = \sqrt{(i - 150)^2 + (j - 150)^2} / 150 \Delta x$$

式中 r 乃距中心點的距離， i, j 為網格位置。其模擬結果如圖 7 至圖 15 所示。

首先比較(a)聯立求解與 (b)數值積分兩種修正方式之差別，取污染物旋轉一圈模擬結果進行探討發現，兩種修正演算其污染物濃度分佈大致相同，僅於尖峰值有不同程度的消滅，(a)聯立求解法其尖峰值為 0.9593、(b)數值積分法其尖峰值為 0.9591，而將此結果與(c)未做積分修正之結果比較發現(a)、(c)不論是於濃度分佈或尖峰值的消滅上均呈現完全相同結果。由此一結果並無法看出理論上應有之修正對於模擬精度有何種程度之提升，但仍可發現若以簡單之數值積分方式

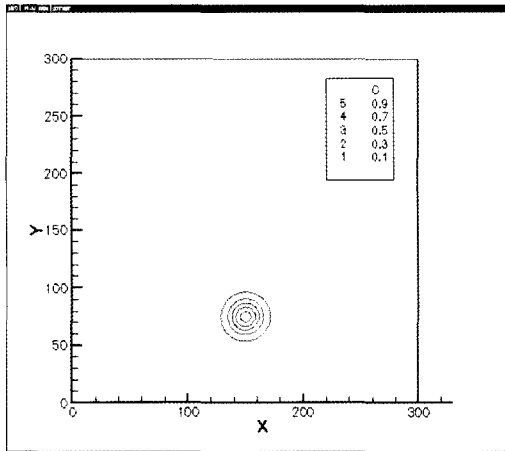


圖 5 旋轉測試例以污染物初始濃度分佈圖

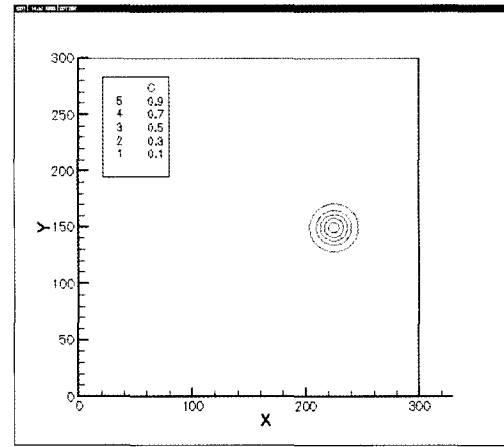


圖 7 旋轉測試例旋轉 1/4 圈之濃度分佈圖

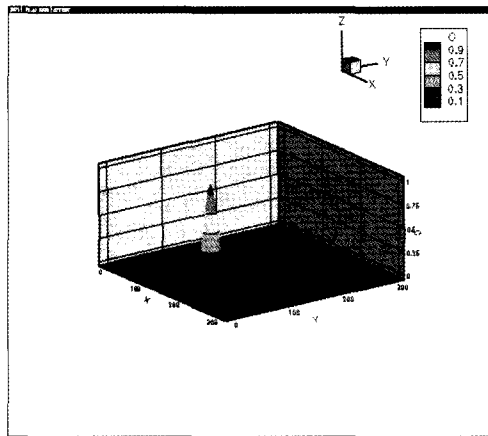


圖 6 旋轉測試例污染物初始濃度分佈立體圖

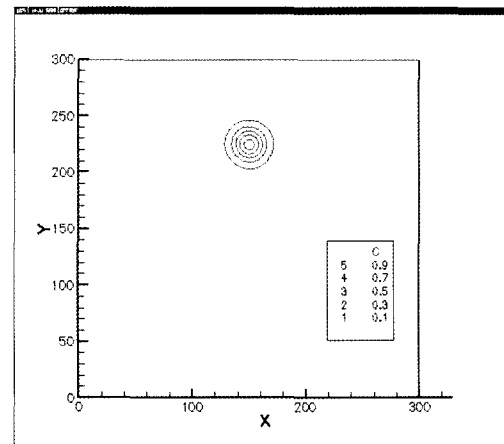


圖 8 旋轉測試例旋轉 1/2 圈之濃度分佈圖

進行修正演算，將因數值積分自身之誤差而得到降低模擬精度之反效果。

模式於旋轉測試例中第一圈之結果如圖 10 所示。由圖 10 可知，於第一圈之數值解與解析解相當吻合，污染團的形狀並無產生明顯的變形，且尖峰並無劇烈之消滅。測試污染物傳輸於 1/4、1/2、3/4 與 1 圈時之表現，其結果如圖 7 至圖 10 所示，由圖 7 即旋轉 1/4 圈時間為 1.57 的模擬結果可發現，模式並未產生相位差且無明顯之誤差，其尖峰消滅約 0.33%。圖 8 為時間 3.14 即旋轉 1/2 圈之模擬結果，於此時刻仍可準確的模擬污染團之傳輸，數值解並未產生相位差

且所得之結果仍與解析解相當吻合，其尖峰消滅約為 0.55%。圖 9 為時間 4.71 即旋轉 3/4 圈之模擬結果，數值解與解析解比較仍相當準確，尖峰消滅約為 0.82%，但模式產生了向右一個網格的相位差。

進一步的令污染物進行多圈旋轉之測試，將繞一、五、十圈之結果輸出進行比較其結果如圖 11 至圖 15 所示，由圖 11 中可發現於起始旋轉時，將數值解與解析解比較模式大致上仍可準確的模擬，但污染團在朝旋轉中心的方向已漸漸的產生一些數值擴散。如圖 12、13 即旋轉 5 圈之模擬結果所示，由圖中可發現模式所產生的相位

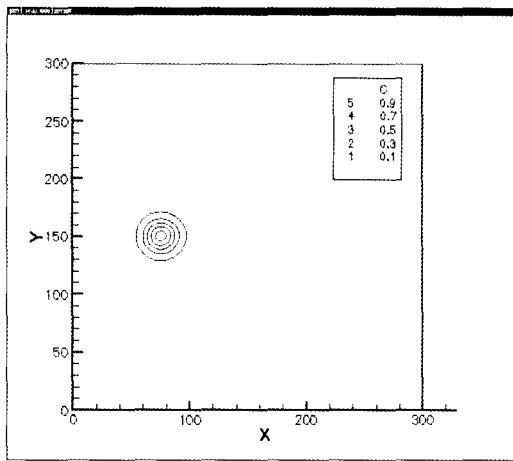


圖 9 旋轉測試例旋轉 3/4 圈之濃度分佈圖

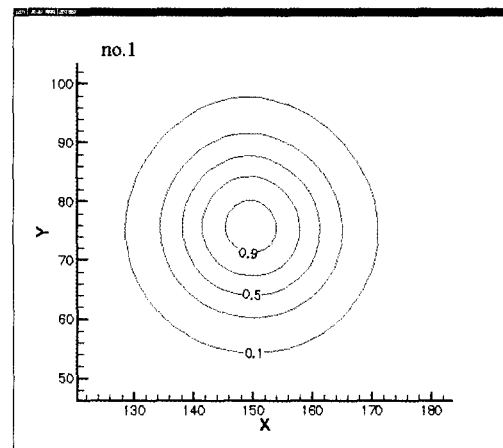


圖 11 旋轉測試旋轉 1 圈濃度局部放大分佈圖

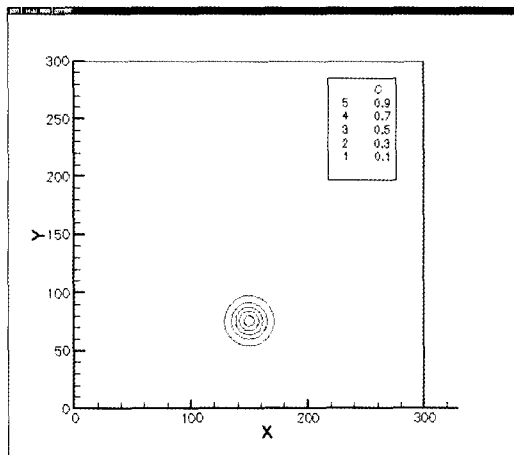


圖 10 旋轉測試例旋轉 1 圈之濃度分佈圖

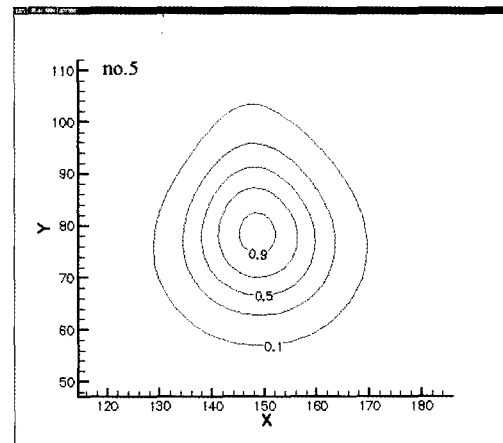


圖 12 旋轉測試旋轉 5 圈濃度局部放大分佈圖

差逐漸地加大，在此一時刻其相位往左偏差 1 個網格間距往上偏差三個網格間距，其尖峰消滅為 4.76%。於圖 14、15 旋轉 10 圈之模擬結果可知，模式的尖峰誤差為 5.56%，其相位差為往左偏移 3 個網格間距往上偏移 7 個網格間距，而隨著旋轉的圈數繼續增加污染團的形變愈來愈明顯，其延伸的方向恰與旋轉的方向相反。

由以上的討論可知，模式於旋轉測試中初始的幾圈仍可模擬出令人滿意的結果，隨著旋轉次數的增加，模式則開始會產生一些數值擴散致使污染團的形狀改變且有些許相位差，由測試結果可知，旋轉次數高達 10 圈時其尖峰消滅的範圍

仍在 5% 左右，這種結果相較於一般的差分法是要好的太多了；一般的差分法毋須旋轉一圈即已因數值擴散而消散開來。

四、污染物傳輸應用

一般而言地下水的污染源大多來自地表上的人為因素，因此污染物多是由地表入滲，穿透未飽和層方達地下水層中，因此土壤的入滲過程直接的影響了污染物傳輸的過程。一般在估計污染物入滲的過程中常將降雨總量平均後進行計算且常忽略了未飽和土層的影響，此一假設造成了土體持續承受平均降雨的不合理現象，此一方

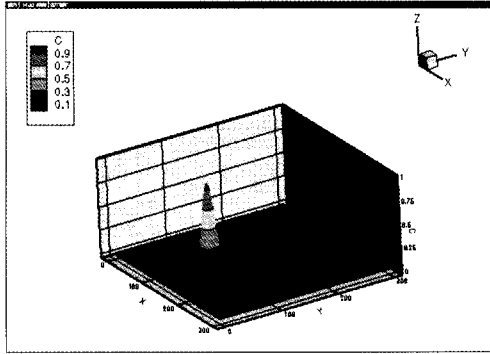


圖 13 旋轉測試例旋轉第 5 圈之濃度分部立體圖

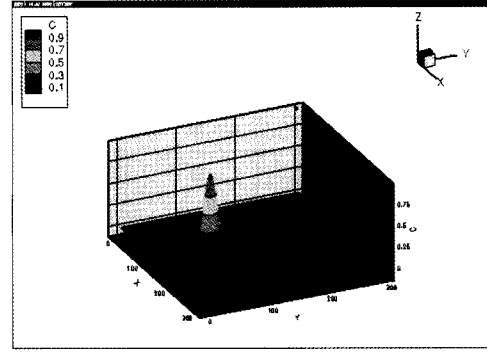


圖 15 旋轉測試例旋轉第 10 圈之濃度分佈立體圖

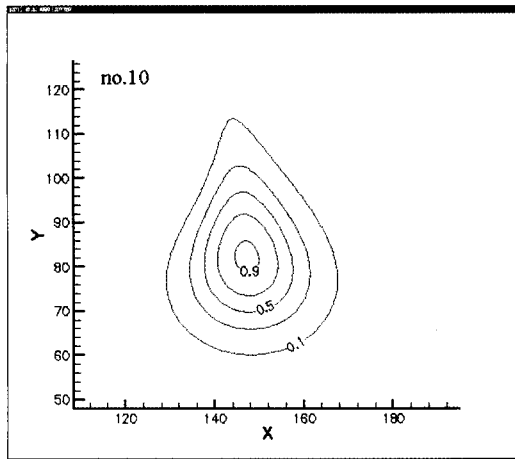


圖 14 旋轉測試旋轉 10 圈濃度局部放大分佈圖

式無法滿足實際降雨條件於時間上分佈的不均勻性，而無法忠實的反映出暴雨時除了入滲更有大部分水成爲地表逕流的事實[14]。有鑑於此，本文勢必建立可使用實際降雨條件模擬污染物入滲與滲漏過程之傳輸模式，方能與簡化後的持續降雨條件加以比較，而本文所建構之數值模式主要是由地下水水流流場部分與污染物傳輸部分所構成。

1. 地下水流場部分：先以 van Genuchten 土壤特性曲線計算含水量與張、壓力等土壤特性[12]，再以 Richards 方程式[13]演算地下水水流流速分佈[9,14]。由於未飽和層中含水量之變化對水力傳導係數 K 值影響甚巨，含水量些微的變動可使傳導係數呈現

相當劇烈的變動。在此一情形下，模式採用了先預測後修正的方式來演算土壤特性與求解水流流況，採用了此一方法可使時間間距與網格間距均可放大且依舊可以準確的模擬出土壤特性，而不會造成模式的不穩定。

2. 污染物傳輸部分：本文採用分離運算子觀念設計污染物傳輸模式，由以上之討論可瞭解，二維 Holly-Preissmann 特性線法可有效解決數值模式於移流過程產生嚴重數值擴散之問題。至於延散項若以 Crank-Nicolson 有限差分法直接離散後求解將會產生一巨大的矩陣待解，爲了避免大量的運算故以全隱式交互變換方向掃法 (ADI) 求解，在此項需注意的是除了在變數 C 做延散步驟以外，對於在純移流時所用到的 C_x 與 C_y 亦需一一做一次延散。而其延散係數之計算採用 Bear 於 1990 所提出之經驗式[15]，給定延散度、土壤曲折度與分子擴散係數即可依各點流速算出各位置之延散係數。而計算時所需之水理資訊，在每一時間間距中先由水理部分求出再供污染物傳輸模式使用。

應用例中土壤環境之設定如下，取一長爲 100m 深爲 50m 的土體爲模擬範圍，假設土體由均勻壤土所構成，其土壤特性曲線採 Van Genuchten 土壤特性曲線，各參數如表 1 所示，其中 $\psi_{ponding}$ 乃降雨所造成的地面積水深， ψ_m 則

表 1 壤土之土壤條件與 Van Genuchten 土壤參數

參數名稱	設定數值	參數名稱	設定數值
n	1.8	θ_s	0.47
ψ_a	-1.25m	θ_r	0.11
ψ_m	-2.0m	k_s	0.01m/hr
$\psi_{ponding}$	0.0m	α	$0.8m^{-1}$

為蒸發時地表上的最大張力設定。邊界條件如圖 16 所示設置一固定濃度之污染源於地表橫跨 10m 的位置，為了凸顯污染物於土層中受入、出滲水流之影響並減少影響因素，應用例中延散係數則固定為延散效果較小的 $0.001m^2/hr$ ，地下水位於初始時距地表 20m，右邊界有一河川經過其水位與初始的地下水位相同。上邊界與空氣接觸，底邊界則為不透水層。

數值條件則採如下設定，在模擬範圍為 $100*50m$ 之垂直二維土體，於模式中採用之網格為 $100*50$ ，其橫向網格間距為 $1m$ ($\Delta X = 1m$)、縱向網格間距為 $1m$ ($\Delta Y = 1m$)。模擬時間為一年，時間間距為 1 小時 ($\Delta T = 1hr$)。設定地下水位面於地表下 20m 處，先將土體浸水飽和後進行重力排水至穩定，取其結果之水頭分佈為起始條件。其他邊界條件如表 2 所示。

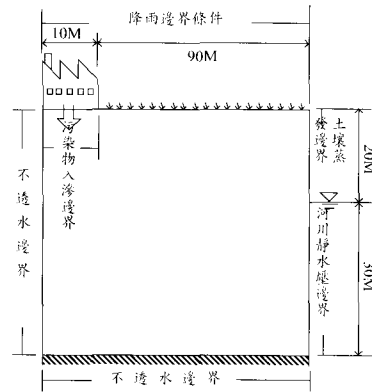


圖 16 模擬之初始土壤環境示意圖

本文於上邊界所採用之降雨量共計 2625.1 mm/year，實際降雨日共計 117 天，其降雨時間分佈如圖 17 所示。由表 2 之上邊界條件可知，若有降雨則將該日降雨量平均分配於 24 小時中亦即降雨全部入滲，若經模式演算後上邊界產生積水現象則改以積水深度來運算以避免產生強制入滲的現象，而模式中之允許積水深度為 0m，故當降雨量大於最大入滲量時多餘的水量將會排走。若無降雨則上邊界改採蒸發條件，本文之土壤蒸發通量 Q_e 採用 $0.00002m/hr$ ，若持續一段時間未降雨而造成過度蒸發，則改採土壤允許最小壓力 $\psi_m - 2.0m$ 。平均降雨則是將整年之

表 2 邊界條件設定表

位置	邊界條件	註	解
左邊界	Neumann B.C.	設為不透水	$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$
下邊界	Cauchy B.C.	設為不透水	$-k_y \frac{\partial h}{\partial y} = 0$
右邊界	Cauchy B.C. Dirichlet B.C.	$-K_y \frac{\partial \psi}{\partial x} = Q_e$ $50 \geq j > 30$ Q_e 為土壤蒸發通量 $\psi(100, j) = 30 - j$ $30 \geq j \geq 0$ 其中 j 為網格位置	
上邊界	變動邊界條件	一般降雨期間設其入流量為降雨量採用 Cauchy B.C. 當過度降雨造成地表積水時採用 Dirichlet B.C.，其積水深度若大於允許積水深則以允許積水深為之 當不降雨時設為蒸發條件採用 Cauchy B.C.，若過度蒸發則改採 Dirichlet B.C. 以土壤允許最小壓力為之 非穩定降雨採東勢地區 87 年之日降雨量為降雨條件，如圖十七所示。 穩定降雨條件則將整年降雨量加總後平均	

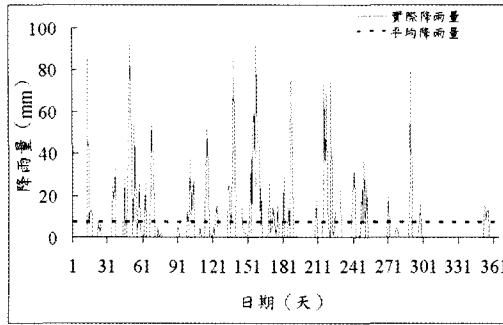


圖 17 東勢地區 87 年之日降雨量分佈圖

降雨量平均於每一時段中，約為 0.3mm/hr，若產生積水仍然改以模式之允許積水深度 0m 使無法入滲之水量排走。當降雨雨型採真實情況時，其模擬結果如圖 18 所示，而降雨雨型為平均降雨量時其模擬結果如圖 19 所示。

比較圖 18 與圖 19 可發現，污染物傳輸的範圍有很明顯的差距，在同樣施放污染物起始濃度為 1 的情況下，在真實降雨條件下經過 1 年的傳輸其污染物濃度 0.1 的鋒面下降約 16m，如圖 18 所示；而在平均降雨條件下，污染物濃度 0.1 的鋒面下降約 35m，如圖 19 所示。兩者傳輸之鋒面下降深度相差約 19m 之多，因此受污染場址計算污染物下降鋒面位置若以平均雨量來計算將會誤以為污染物下降至較深的土層中，而實際上污染物並未下降至深層土壤中而僅是停留在淺層的土壤中，而錯誤的深度判斷將致使清除污染物之施工難度與經費增加，但卻未能收到較佳之效果。

探究造成兩者污染物傳輸鋒面巨大差距的原因僅在於兩者使用不同的降雨情形，於平均降雨的條件下是將整年的降雨平均的分佈在每一天中，而此一計算方式於實際情形則是終年降雨，因此土體在任一時刻均有降雨的影響，致使地下水持續受到降雨補注，整個土體的上邊界有持續的雨量往下入滲。而實際降雨情形整年的降雨日僅有 117 天，在有降雨的時候雖然會以較大的水量入滲，然大雨時所產生之地表逕流並不會入滲至土層中，且在其他無降雨的天數中，上邊界持續的蒸發會抑制淺層土層中所含之水量往

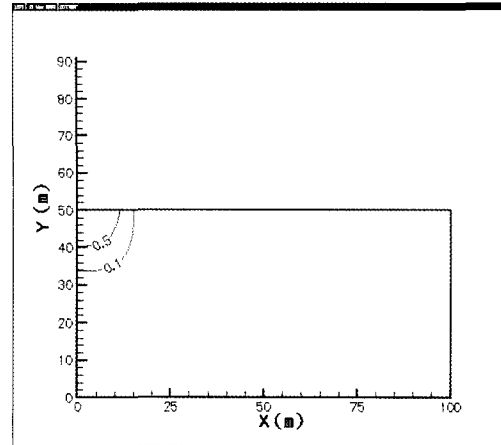


圖 18 壤土實際降雨條件一年後之污染物濃度分佈圖

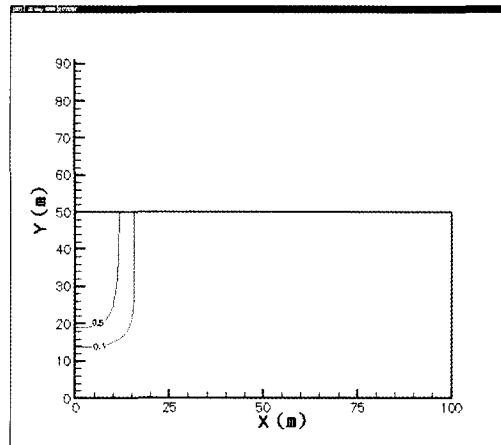


圖 19 壤土平均降雨條件一年後之污染物濃度分佈圖

下滲流。由模擬的結果比較可知，雖然平均降雨條件所取整年之總降雨量與真實情況之降雨總量相同，但由於假設降雨量在整年平均降下之條件甚不合乎實際現象，而造成如此大之差異。

五、結論

本研究為了解決傳輸方程式中移流項產生嚴重數值誤差之情形，應用了分離運算子之觀念

將移流與延散過程分開求解，針對求解移流項之二維 Holly-Preissmann 特性線法進行探討，並將其與以 van Genuchten 土壤特性曲線及 Richards 方程式所建構之水流模式結合再應用於求解地下水污染傳輸問題，研究發現：

1. 二維 Holly-Preissmann 特性線法於可蘭數小於等於 1 時，可有效的抑制數值擴散的現象，並且在非均勻流場中仍可模擬出良好的結果。
2. 修正二維 Holly-Preissmann 特性線法時，採用聯立解析的方式進行將比簡單的以數值積分方式進行可獲得更好的結果。
3. 由應用例中可發現，將雨量平均化後所做的推估，需事先以人為扣除地表逕流、蒸發量等損失，否則將造成模擬的結果高估了入滲與傳輸量。

六、參考文獻

1. Li, S. G., Ruan, F., and Mclaughlin, D., "A Space - Time Accurate Method for Solving Solute Transport Problems", *Water Resource Research*, Vol. 28, No. 9, pp.2297-2306, (1992).
2. Miller, C.T., and Rabideau, A.J. "Development of Split-Operator, Petrov-Galerkin Methods to Simulate Transport and Diffusion Problems", *Water Resour. Res.*, Vol.29, NO. 7, pp.2227-2240, (1993).
3. Cunge, J. A., Holly, F. M., and Verwey, Jr A., "Practical Aspects of Computational River Hydraulics", pp.320-332, Iowa institute of Hydraulic Research, Iowa, U.S.A., (1980).
4. Holly, F. M., and Preissmann, A., "Accurate Calculation of Transport in Two Dimensions", *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 103, No. HY11, pp.1259-1277, prentice, Toront, Canada , (1977).
5. 許少華、林伯聰、倪春發，「以分離運算子解一維移流延散方程式之數值參數準確性分析」，*農業工程學報*，第四十四卷四期，第 62~75 頁，(1998)。
6. Holly, F. M., and Jean-Marc Usseglio-Polatera," Dispersion Simulation in Two-Dimensional Tidal Flow", *Journal of the Hydraulic Engineering*, Vol. 110, No.7, July, pp.905-926 , (1984).
7. Yang, J. C., and Hsu, E.L, "Time-line Interpolation for Solution of the Dispersion Equation", *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 28, No.4, pp.503-520 , (1990).
8. 許少華、倪春發，「一維移流傳輸方程式之解法比較」，*逢甲學報*，第二十九期，第 133 - 144 頁，(1996)。
9. Cook, R. D., D. S. Malkus and M. E. Plesha, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", Third Edition, John Wiley & Sons, Inc, U. S. A. (1989).
10. Holly, F.M., 教授所寫之法文手稿。
11. 林伯聰，「垂直二維地下水變動飽和層之水利與污染物傳輸模擬」，碩士論文，逢甲大學土木及水利工程研究所，台中市 (1999)。
12. van Genuchten, M. T., "A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils", *Soil Sci. Soc. Am. J.*, Vol.44, pp.892-898, (1980).
13. Richards, L. A., "Capillary Conduction of Liquids Through Porous Mediums.", *Physics*, 1, pp.318-333, (1931).
14. 許少華、倪春發，(1999)，「以理查氏方程式數值解比較常用入滲公式之表現」，*中國土木水利工程學刊*，第 11 卷，第 2 期，pp.201-210。
15. Bear, J., and Verruijt, A., *Modeling Groundwater Flow and Pollution*, D. Reidel. Co. pp.123-195, (1990).

附錄一

一維 Holly-Preissmann 特性線法

一維波傳方程式假設以 x 軸為主軸向且流速為 U 則可表示如下：

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -U \frac{\partial C}{\partial x} \dots\dots\dots(1a)$$

(1)式沿著特性線 ($\frac{dx}{dt} = U$) 則 $\frac{DC}{Dt} = 0$ ，即在特性線上變數 C 不會隨時間的增減而有所改變。採用空間軸上的兩點三次式內插將之離散，如圖 1 所示，即以 I-1 點與 I 點之間內插出 A 點

$$C_i^{n+1} = C_A^n = a_1 C_{i-1}^n + a_2 C_i^n + a_3 \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{i-1}^n + a_4 \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_i^n \dots\dots\dots(2a)$$

由於採用兩點三次式內插方式，所以需四個條件來進行內插，因此除了兩點上原有的變數 C 值，

另外加入了變數 C 值對 x 軸的一階導數進行內插。

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_A^n = b_1 C_{i-1}^n + b_2 C_i^n + b_3 \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{i-1}^n + b_4 \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_i^n \dots\dots\dots(3a)$$

其中(2)式與(3)式之係數如下所示：

$$\begin{cases} a_1 = Cr^2(3 - 2Cr) & b_1 = 6Cr(Cr - 1)/\Delta x \\ a_2 = 1 - a_1 & b_2 = -b_1 \\ a_3 = Cr^2(1 - Cr)\Delta x & b_3 = Cr(3Cr - 2) \\ a_4 = -Cr(1 - Cr)^2 \Delta x & b_4 = (Cr - 1)(3Cr - 1) \end{cases} \dots\dots\dots(4a)$$

$$Cr = U\Delta t / \Delta x$$

收稿日期：民國 90 年 8 月 27 日
 修正日期：民國 91 年 1 月 7 日
 接受日期：民國 91 年 2 月 1 日