

具空間指數分佈水力傳導係數之二維飽和 土壤中污染物傳輸研究

Analysis of Solute Transport in Two-Dimensional Saturated Soils with Spatially Exponential Distributions of Hydraulic Conductivity

國立雲林科技大學
環境與安全工程研究
副教授

溫志超

Jet-Chau Wen

國立雲林科技大學
環境與安全工程研究
研究生

張湘杰

Hsiang-Chieh Chang

國立中興大學
土木工程研究所
副教授

陳榮松

R.-S. Chen

國立中正大學
電機工程研究所
教授

溫志宏

Jyh-Horng Wen

摘 要

本研究假設具空間隨機分佈的參數有：對數水力傳導係數 ($\log k$)、水頭、流速及污染濃度；其餘的地下水參數如孔隙率及孔隙尺度延散係數則設定為均值。考慮近似穩流（即污染物擴散範圍已達到某一成長率）的狀況下，探討飽和對數水力傳導係數具等向性指數型態分佈時，污染物於其中擴散過程，並針對縱向、橫向的大尺度延散係數所受的影響提出定性討論，此結果有助於了解地下水中污染傳輸特性。研究發現主流 (A_{11}) 及側流 (A_{22}) 方向的大尺度延散係數均與無因次特性長度 (Y) 有強烈關係，即無因次特性長度 (Y) 變小，主流方向大尺度延散係數 (A_{11}) 變大。由質量守恆知，當近似穩流時污染物流進入控制體的量等於污染物流出控制體的量，因此在主流方向大尺度延散係數 (A_{11}) 變大，表示主流方向的污染傳輸速率較快；換言之，側流方向的污染傳輸速率較慢，也就是側流方向大尺度延散 (A_{22}) 變小。

關鍵詞：對數水力傳導係數，主流方向大尺度延散係數，側流方向大尺度延散。

ABSTRACT

In the study, we propose some spatial random variables, logarithm hydraulic conductivity ($\log k$), head, velocity and pollutant concentration. The porosity and pore-

level dispersivity are, however, assumed to be constant. Meanwhile, the quasi-steady state advective-dispersion equation is used for examining the contaminant transport in heterogeneous soils with exponential distribution of log k. In the study, the macrodispersivity coefficients of longitudinal and transverse directions are investigated. It is found that the larger the dimensionless characteristic length ($\gamma = \frac{\alpha_L}{\lambda}$), the less the longitudinal macrodispersivity. On the other hand, the larger the transverse macrodispersivity, the less the solute transport in the longitudinal direction.

Keywords: Logarithm hydraulic conductivity, Longitudinal macrodispersivity, Transverse macrodispersivity.

一、前言

早期的地下水模式研究以均質定律模式 (Bear, 1979)；然而，因為實際飽和土壤大多為非均質性，故有關地下水模式應以非均質地下水含水層方式探討較符合實際，所以遂有描述非均質的序率模式出現 (Mackay et al., 1986; Prickett et al., 1981)。最早的序率模式是以蒙地卡羅方法來描述 (Freeze, 1975)，後續的研究則以序率模式中 加入能譜理論及微量擾動的觀念 (Bakr et al., 1978; Mizell et al., 1982)。至於非均質的序率模式中，具有統計上等向特性的研究，直到最近幾年才慢慢的被探討 (Gelhar 1993; Dagan, 1989)；鑑於前人只發表三維大尺度延散係數推導 (Gelhar 及 Axness, 1983)，並未詳細推導二維大尺度延散係數。所以，本研究重點乃是推導二維大尺度延散係數，進而分析積分尺度 (λ) 與孔隙尺度延散係數 (α_L) 對於污染傳輸之影響。本研究應用空間等向性理論、微量擾動方法與能譜理論將模式建立，並針對具統計等向性水力傳導係數 (log K) 分佈之飽和土壤中污染濃度參數進行分析及討論。

研究中，假設具空間隨機分佈的參數有：對數水力傳導係數 (log k)、水頭、流速及污染濃度，其餘的地下水參數如孔隙率則設定為均質。並採用微量擾動、能譜理論及等向特性空間分佈的觀念以進行序率模式建立、研究及分析。其中等向特性空間分佈的觀念採用 Yaglom (1987) 的方

法，以推求具統計等向性之 log K 頻譜函數。

本研究過程所使用水力參數的控制方程式為：近似穩流之保守污染傳輸方程式。以一階微量擾動方法代入控制方程式，導出各水力參數的序率微分方程式。再將各參數擾動量以傅立葉-史泰茲表示 (Fourier-Stieltjes representation) 方式，由實數域 (Real domain) 的序率微分方程式轉換到頻率域 (Frequency domain) 中，其結果以各參數振幅函數表示，再配合能譜理論求得各水力參數擾動量的能譜密度函數 (spectral density functions)。由於，本研究重點在於了解污染物於非均質飽和土壤中傳輸特性，所以，將延用 Gelhar 及 Axness (1983) 發表大尺度延散係數的積分公式，推導出二維平面上的大尺度延散係數，並加以分析其所具有的特性。

二、大尺度延散係數分析

本研究於求解污染傳輸問題時以近似穩流之保守污染傳輸方程 (Bear, 1979; Gelhar 及 Axness, 1983) 為控制方程式，其表示如下：

$$\frac{\partial(q_i c)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[E_{ij} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right] \dots\dots\dots (1)$$

其中：

- E_{ij} : 延散係數 (= nD_{ij}) (local bulk dispersion coefficient)
- n : 孔隙率
- D_{ij} : 延散係數 (pore level dispersion

coefficient tensor)

- q_i : 流速
- i 及 j : 表示在二維空間的座標軸 (即 $i=1$ 或 2 ; $j=1$ 或 2)
- c : 地下水中污染濃度

將微量擾動的觀念代入控制方程式中, 可分離出與污染濃度相關之序率微分方程式。再應用傅立葉轉換, 將水力參數由實數域轉至頻率域; 並利用能譜理論, 則可得污染濃度之能譜密度函數。再利用 Gelhar 及 Axness(1983)發表描述污染物於地下水流場中大尺度延散係數 (macrodispersivity) 方程式, 進行推導本研究主題二維地下水流中大尺度延散係數之解析解, 今將 Gelhar 及 Axness (1983)所發表之對角線上大尺度延散係數 A_{ii} 方程式表示如下:

$$A_{ii} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\delta_{ii} - \frac{k_i k_i}{k^2})^2 (\alpha_L k_1^2 + \alpha_T k_2^2) S_{ff}(\vec{k})}{\gamma^2 [k_1^2 + (\alpha_L k_1^2 + \alpha_T k_2^2)^2]} d\vec{k} \dots (2)$$

其中, $\delta_{ii} = \frac{J_i}{J_1}$ 且 $\gamma^2 = \frac{q^2}{k_G^2 J_1^2}$, J_i 表示平均水力梯度, k 代表頻率域的波數, k_i 表示二維頻率域中在 i 方向波數, i 表示二維空間的座標軸(1 或 2), k_G 表示水力傳導係數之幾和平均值。 α_L 、 α_T 分別為主流及側流方向之孔隙尺度延散係數, 在本研究中假設此兩係數相等(即等向性)。 S_{ff} 代表具等向性指數型態飽和水力傳導係數能譜函數(王啟仁, 1999), 故在等向性特性下, 一維尤拉維度下之 $\log k$ 能譜密度函數可表示成

$$S_{ff}^{(1)}(\vec{k}) = \frac{\sigma_f^2 \lambda}{\pi(1+k^2 \lambda^2)}, \text{ 二維尤拉維度下之 } \log k \text{ 能譜}$$

密度函數可表示成 $S_{ff}^{(2)}(\vec{k}) = \frac{\sigma_f^2 \lambda^2}{2\pi(1+k^2 \lambda^2)^2}$, 而三維尤

拉維度下之 $\log k$ 能譜密度函數可表示成

$$S_{ff}^{(3)}(\vec{k}) = \frac{\sigma_f^2 \lambda^3}{\pi^2(1+k^2 \lambda^2)^2}, \text{ 其中 } \lambda \text{ 表示為對數水力傳}$$

導係數空間分佈之積分尺度, σ_f 表示為對數水力傳導係數; 由於三維尤拉維度下之地下水水流及污染傳輸分析研究, 已由王啟仁(1999)及 Gelhar 及 Axness(1983)分別完成。至於, 在一維

尤拉維度當無任何吸附與化學反應時, 在質量守恆, 並考慮穩流條件時, 污染物流進控制體的量會等於污染物流出控制體的量; 即表示此時一維污染傳輸絕對會無條件滿足質量守恆。所以一、三維尤拉維度實無須再以探討, 因此本研究只針對二維地下水流場污染傳輸進行討論。

(一) 主流方向大尺度延散係數, A_{11} :

當主流方向 ($i=1$), 代回(2)式得:

$$A_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_G^2 (J_1 - \frac{J_1 k_1^2}{k^2})^2 (\alpha_L k_1^2 + \alpha_T k_2^2)}{q^2 [k_1^2 + (\alpha_L k_1^2 + \alpha_T k_2^2)^2]} S_{ff}^2 d\vec{k} \dots (3)$$

上式對 $d\vec{k}$ 的積分項為 dk_1, dk_2 , 將轉換為極座標 (r, θ) 方式積分。即令: $k_1 = k \cos \theta$, $k_2 = k \sin \theta$ 代入 (3) 式 且由 Gradshteyn(1980) 可得:

$$A_{11} = \frac{\sigma_f^2 \lambda}{\gamma^2} \left\{ \frac{3}{2} (Y) + \left(\frac{Y}{1+Y^2} \right) \left[\frac{1}{Y} E\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-Y^2}\right) - (Y) F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-Y^2}\right) \right] + \left[\left(\frac{2Y^2}{1-Y^2} \right) \left[F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-Y^2}\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-Y^2}\right) \right] + \int_0^{\infty} \left(\frac{Y^3 Z^3}{\sqrt{Y^2 Z^2 + 1}} - Y^2 Z^2 \right) \frac{ZY}{(1+Z^2)^2} dZ \right] \right\} \dots (4)$$

其中: $Y = \frac{\alpha_L}{\lambda}$ (無因次特性長度), $Z = k\lambda$, $dZ = \lambda dk$ 。由(4)式可以發現 A_{11} 是無因次特性長度 (Y) 之函數。當 $Y \approx 0$ 即 $\lambda \rightarrow \infty$ 時, (4)式可化簡

$$A_{11} = \frac{\sigma_f^2 \lambda}{\gamma^2} \dots (5)$$

按 Gelhar 及 Axness(1983)所提二維流場主流方向大尺度延散係數的漸進值與(5)式完全相同。所以, 可確定本研究在 A_{11} 理論解推導過程及結果應是正確的。

(二) 側流方向大尺度延散係數, A_{22} :

當側流方向 ($i=2$), 代回(2)得:

$$A_{22} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_G^2 (J_2 - \frac{J_1 k_1 k_2}{k^2})^2 (\alpha_L k_1^2 + \alpha_T k_2^2)}{q^2 [k_1^2 + (\alpha_L k_1^2 + \alpha_T k_2^2)^2]} S_{ff}^2 d\vec{k} \dots (6)$$

同樣以 A_{11} 推導方式可得以下 A_{22} 方程式：

$$A_{22} = \frac{\sigma_f^2 \lambda}{\gamma^2} \left\{ \frac{1}{2} Y + \frac{Y^2}{1-Y^2} \left[F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-Y^2}\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-Y^2}\right) \right] \right. \\ \left. + \int_0^\infty \left[Y^2 Z^2 - \frac{Y^3 Z^3}{\sqrt{Y^2 Z^2 + 1}} \right] \frac{Z}{(1+Z^2)^{\frac{3}{2}}} dZ \right\} \dots\dots\dots(7)$$

其中： $Y = \frac{\alpha_L}{\lambda}$ （無因次特性長度）， $Z = k\lambda$ ， $dZ = \lambda dk$ ，由(7)式可以發現 A_{22} 是無因次特性長度（ Y ）之函數。且當 $Y \approx 0$ 即 $\lambda \rightarrow \infty$ ，(7)式可化簡

$$A_{22} = \frac{\sigma_f^2 \alpha_L}{2\gamma^2} \dots\dots\dots(8)$$

依 Gelhar 及 Axness(1983)所提二維流場側流方向大尺度延散係數的漸進值與(8)式完全相同。所以，可確定本研究在 A_{22} 理論解推導過程及結果應是正確的。

三、分析與討論

根據 Gelhar 及 Axness(1983)，對具指數空間分佈的對數水力傳導係數之積分尺度（ λ ）定義，乃是以對數水力傳導係數的相關函數（Correlation function）曲線下的面積，即為積分尺度。其物理意義乃是指存在空間中任意兩點其相對距離小於積分尺度時，此兩不同點的對數水力傳導係數間的相關性較為強烈，即此兩點間的對數水力傳導係數具有高度相關性。因此，兩點間的相對距離若小於積分尺度時，其間飽和水力傳導係數值亦比較接近，故此兩點範圍內的區域可視為一接近均值的區域。換言之，當含水層範圍超過積分尺度時，在積分尺度大小範圍內不同點間之飽和水力傳導係數分佈與超出範圍之不同點間飽和水力傳導係數的分佈特性將呈現較低的相關性，即出現強烈非均質性。依此物理特性，我們可以分析主流及側向大尺度延散係數（ A_{11} 及 A_{22} ）的特性。

(4)式為主流方向大尺度延散係數（ A_{11} ），當以無因次 A_{11} （ $\frac{\gamma^2 A_{11}}{\sigma_f \lambda}$ ）方式表示可得如圖 1

中 A_{11} 圖形。由 A_{11} 圖形得知，當無因次特性長度（ Y ）變小，即代表對數水力傳導係數分佈的積分尺度變大，相對地飽和水力傳導係數分佈呈現均質機會增加，導致地下水主流方向流況也呈現近似均勻流，所以主流方向的污染傳輸速率也就變大，即主流方向的大尺度延散係數變大；此一情形可由質量守恆得知，即在近似穩流且無化學反應時，地下水流場中污染物流進於控制體的量等於污染物流出控制體的量。因此主流方向大尺度延散係數變大，即此時主流方向的污染傳輸速率變快；相對地，可以了解此時側流方向的污染傳輸速率變慢。反之，當無因次特性長度（ Y ）變大，積分尺度變小，相對地飽和水力傳導係數分佈呈現強烈非均質特性，導致主流方向流況也隨著呈現非均質特性，所以主流方向的污染傳輸速率也就變小。因此當主流方向大尺度延散係數變小，即表示主流方向的污染傳輸速率變慢；相對地，促進側流方向污染物質傳輸速率。

因此，由圖 1 可以了解 A_{11} 變大，即表示污染傳輸變快；相形之下，側向污染傳輸速率變慢，即表示此時側流方向之大尺度延散係數（ A_{22} ）應是變小的。為了解 A_{22} 的變化情形，我們將(7)式及(8)式繪製於圖 2，由圖 2 可以發現在無因次特性長度（ Y ）變小時， A_{22} 亦跟著變小，此乃是因為 Y 變小，代表 λ 變大，即在 λ 範圍內之任意兩點間的飽和水力傳導係數分佈呈現近似均值狀態，故主流方向流況也呈現均勻流，所以形成主流方向的傳輸速率變快；相形之下，側向流向的污染傳輸速率變慢，即為 A_{22} 變小。相反地，當無因次特性長度（ Y ）變大時， A_{22} 亦跟著變大，此乃是因為 Y 變大，代表 λ 變小，即含水層範圍大小容易大過積分尺度，故發生任意兩點間的距離大過積分尺度的機會加大，此時的飽和水力傳導係數分佈呈現非均值狀態，主流方向流況也呈現非均質分佈狀態，所以，主流方向的污染傳輸速率會因此而變慢。換言之，側流方向的污染傳輸速率相對的變快，即此時 A_{22} 變大。

另外，由圖 1 及圖 2 可以發現在主流方向及

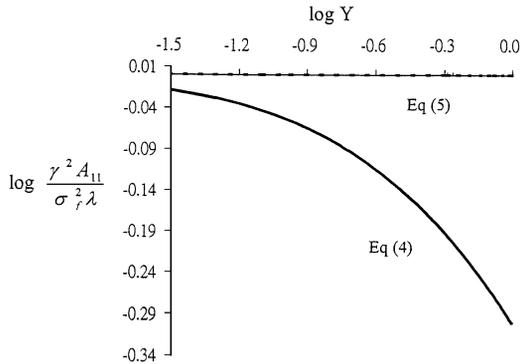


圖 1 A_{11} 主流方向大尺度延散係數

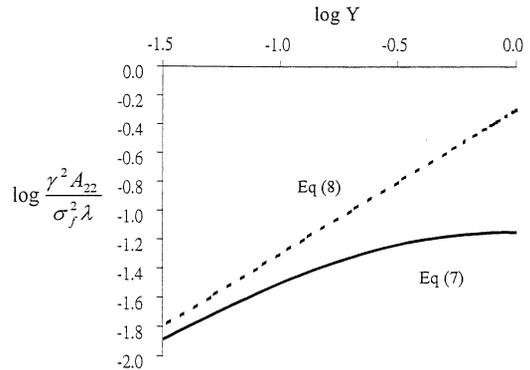


圖 2 A_{22} 測流方向大尺度延散係數

側流方向的大尺度延散係數之漸近值，為主流方向之 A_{11} 維持一定值，而側流方向之 A_{22} 則隨無因次特性長度增加而呈現線性遞增的情形。換言之，當飽和土壤中污染傳輸過程到達漸近行為時，其主流方向的傳輸速率將為一定值；而側流方向的傳輸速率的大小則受積分尺度大小的影響，即側流方向的傳輸速率與積分尺度成反比。此乃是積分尺度越大，表示含水層範圍大小內任意兩點的距離小於積分尺度的機會增加，即此時飽和水力傳導係數分佈越接近均質土壤，故污染傳輸以主流方向為主，且很快地達到類似柱塞流（break through flow），即主流方向傳輸速率達到定值。

此外，本研究分析發現在污染傳輸過程未達漸近行為時，主流方向及側流方向大尺度延散係數非定值，而是隨無因次特性長度變化的函數，故可知在污染傳輸中無因次特性長度角色的重要性。

四、結論

本研究是針對二維污染傳輸之主流方向與側流方向的大尺度延散係數參數的特性，進行分析研究。由於積分求導大尺度延散係數方程式十分複雜，為判斷是否正確，在分析大尺度延散係數參數時，發現當 $\lambda \rightarrow \infty$ 時本研究推導主流方向與側流方向的大尺度延散係數與 Gelhar 及 Axness(1983) 所推導之大尺度延散係數的結果完全相同。可見，本研究所採用之方法，在地下

水污染傳輸的應用上是正確的。此外，本研究分析發現主流（ A_{11} ）及側流（ A_{22} ）方向大尺度延散係數與無因次特性長度（ Y ）有強烈關係，即無因次特性長度（ Y ）變大，主流方向大尺度延散係數的污染物傳輸變小；相對地，此時側流方向大尺度延散係數會變大。反之，當無因次特性長度（ Y ）變小，主流方向大尺度延散係數的污染物傳輸變大；相對地，此時側流方向大尺度延散係數會變小。分析過程中得知，大尺度延散係數非定值，而是 $\log k$ 的無因次特性長度的函數，故可知 $\log k$ 的無因次特性長度在地下水污染傳輸中的重要性。此一發現，可協助未來進行污染傳輸分析中定性及定量研判之用。

本研究對土壤性質之描述，係假設水力傳導係數之空間分佈為等向性，以簡化問題。此一假設與實際含水層之地質參數多為非等向性質，仍有一段差距。所以，日後從事地下水研究者，應可針對水力傳導係數非等向性空間分佈的影響效應，加以探討。

誌謝

本研究承國科會計畫 NSC-86-2621-P-033-002 及桃園縣環保局八十六年度計畫之補助，謹此致謝。

參考文獻

1. 王啟仁，具統計等向性空間分佈之隨機程序研究—應用於飽和水力參數結構分析，國立

- 雲林科技大學環境與安全工程系碩士論文，
88 年。
2. Bakr, A. A., L. W. Gelhar, A. L. Gutjahr, and J. R. MacMillan, "Stochastic analysis of spatial variability in subsurface flow, I, Comparison of one- and three-dimensional flows", *Water Resour. Res.*, 14(2), 263-271, 1978.
 3. Bear, J., *Hydraulic of Groundwater*, McGraw-Hill, New York, 1979.
 4. Dagan, G., *Flow and Transport in Porous Formations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1989.
 5. Freeze, R. A., "A stochastic-conceptual analysis of one-dimension groundwater flow in nonuniform homogenous media", *Water Resour. Res.*, 11(5), 725-741, 1975.
 6. Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M., *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic press, Orlando, 1980.
 7. Gelhar, Lynn W. and Axness, C. L., "Three-Dimensional Stochastic Analysis of Macrodispersion in Aquifers", *Water Resour. Res.*, Vol. 19, No. 1, pp.161-180, 1983.
 8. Gelhar, Lynn W., *Stochastic Subsurface Hydrology*, Prentice-Hall, Inc., 1993.
 9. Mackay, D. M., Freyber, D. L., Roberts, P. V., and Cherry, J. A., "A natural gradient experiment on solute transport in sand aquifer, I. Approach and Overview of Puma movement", *Water resources Research*, Vol. 22, No. 13, pp.2017-2030, 1986.
 10. Mizell, S. A., A. L. Gutjahr, and L. W. Gelhar, "Stochastic analysis of spatial variability in two-dimensional steady groundwater flow assuming stationary and nonstationary heads", *Water Resour. Res.*, 18(4), 1053-1067, 1982.
 11. Prickett, T. A., Naymik, T. C., and Lonquist, C. G., "A "random walk" solute transport model for selected groundwater quality evaluation, Illinois State Water Survey, Bulletin 65, 1981.
 12. Yaglom, A. M., *Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions Volume I: Basic Results*, pp. 349-361, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.

收稿日期：民國 89 年 8 月 31 日
修正日期：民國 89 年 11 月 2 日
接受日期：民國 89 年 11 月 27 日