

## 泥砂顆粒帶起機率之研究

### An Investigation on Pickup Probability for Sediment Entrainment

國立台灣大學農業工程學系副教授  
兼水工試驗所副研究員

吳 富 春

Fu-Chun Wu

國立台灣大學農業工程學研究所  
碩士生

林 曜 成

Yao-Cheng Lin

#### 摘 要

渠道中水流之輸砂能力與泥砂顆粒帶起機率關係密切，本研究以理論方式探討泥砂顆粒被水流帶起之機率，並與文獻資料進行比較。渠道中泥砂顆粒所承受之上升力大於其有效重量時，泥砂顆粒即被帶起而產生移動，上升力之大小與近床水流速度有密切關聯。過去之相關研究初步假設近床速度之機率分佈為常態分佈，並利用實驗資料推估亂流流況時近床水流速度之平均值及標準偏差與剪力速度之關係，進而推求泥砂顆粒在不同剪應力下之帶起機率。然而根據理論值與實驗值之比較顯示近床速度假設為常態分佈導致顯著之誤差，因此本研究乃以較合於物理現象之對數常態分佈探討泥砂顆粒之帶起機率，以增進計算精度。研究結果顯示近床水流速度假設為對數常態分佈計算所得帶起機率與實驗數據更為吻合，可降低 50% 以上之誤差。在相同的流況及上升力係數條件下，對數常態分佈有較高的帶起機率，約為常態分佈所得帶起機率之 4~6 倍。

**關鍵詞：**帶起機率，泥砂揚起，機率分佈，無因次剪應力，上升力。

#### ABSTRACT

The transport of sediment in open-channel flows is closely related to its pickup probability. This study theoretically investigates the pickup probability for sediment entrainment and compares the results with the published data. When the flow-induced lift force for a particle is greater than its submerged weight, the movement of sediment particle will occur. The lift force is a function of the near-bed velocity approaching to the particle. The previous study has assumed that the probability density of the near-bed velocity is normally distributed and used the experimental mean value and standard

deviation to formulate a theoretical relationship between the pickup probability and the dimensionless shear stress. However, the previous result reveals a significant error as compared to the experimental data. This study aims to improve the accuracy by using the log-normal distribution to characterize the near-bed velocity because it is more physically reasonable for open-channel flows. The results indicate that the pickup probability derived from the log-normal distribution is in better agreement with the experimental data. The improvement of the accuracy exceeds 50%. Under the identical flow condition and the lift coefficient, the pickup probability derived from the log-normal distribution is approximately 4-6 times of that from the normal distribution.

**Keywords:** Pickup probability, Sediment entrainment, Probability distribution, Dimensionless shear stress, Lift force.

## 一、前言

過去有關泥砂起動之研究，多以定率 (Deterministic) 的方式來考慮泥砂顆粒的運動行為，如 Shields (1936) 所提出之理論即是利用因次分析而推導出兩個無因次參數，進而利用實驗方式決定在不同的顆粒雷諾數之下，泥砂顆粒達到臨界起動條件之無因次剪應力。然而 Gessler (1965) 從實驗中觀察到，即使當底床剪應力已經到達甚至超過臨界剪應力時，仍會有一部分的泥砂顆粒不發生移動。因此實際上泥砂顆粒之起動是一種隨機的現象，與其所在的位置、顆粒的大小及近床的流況皆有密切的關係。

過去以序率方式研究泥砂之起動理論中較著名者首推 Einstein (1950)，他將帶起機率 (Pickup probability) 定義為：泥砂顆粒所承受的瞬間上升力大於泥砂顆粒有效重量的機率，並由此出發推導出泥砂顆粒帶起機率如下：

$$P = 1 - \int_{-0.143/\theta-2}^{0.143/\theta-2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-t^2) dt \dots\dots\dots(1)$$

其中  $t$  = 積分變數， $\theta$  為無因次剪應力  $= u_*^2 / \Delta g d$ ， $u_*$  = 剪力速度， $\Delta = (\rho_s - \rho) / \rho$ ， $\rho_s$  = 泥砂顆粒的密度， $\rho$  = 流體密度， $g$  = 重力加速度， $d$  = 泥砂顆粒直徑。而近來則有 Cheng and Chiew (1998) 沿用 Einstein (1950) 之帶起機率定義，在假設亂流流況之近床流速機率密度函數遵循常態分佈之條件下，求得不同無因次剪應力之

帶起機率，其公式如下：

$$P = 1 - 0.5 \sqrt{\frac{0.21 - \sqrt{\theta C_L}}{0.21 - \sqrt{\theta C_L}}} \sqrt{1 - \exp\left[-\left(\frac{0.46}{\sqrt{\theta C_L}} - 2.2\right)^2\right]} - 0.5 \sqrt{1 - \exp\left[-\left(\frac{0.46}{\sqrt{\theta C_L}} + 2.2\right)^2\right]} \dots\dots\dots(2)$$

式中  $C_L$  為上升力係數。

然而在天然渠道中假設流速為常態分佈卻是值得商榷的。原因係明渠中水流多朝下游流動，因此水流速度多為正值，不同於速度跳動  $u'$  ( $= u - \bar{u}$ ) 的分佈可視為常態分佈，因此流速採用對數常態分佈應為較合理之假設。本研究即針對流速之機率分佈做修正，利用理論推導帶起機率並與過去研究結果以及實驗數據進行比較，最後以誤差分析驗證對數常態分佈之結果具有較高之精確度。

## 二、理論推導

### 2.1 起動條件

泥砂顆粒之起動條件因不同之研究者而有不同的定義，一般而言多是定義為泥砂顆粒的受力與有效重量比超過某個臨界值時即被起動。Einstein (1950) 及 Yalin (1977) 將顆粒的起動條件表示為：

$$F_L > W \dots\dots\dots(3)$$

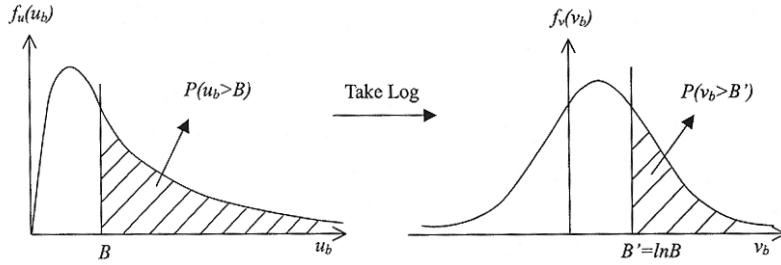


圖 1 帶起機率之轉換示意圖

其中  $F_L$  = 顆粒所承受的瞬間上升力， $W$  = 顆粒的有效重量。因此泥砂顆粒之帶起機率可表示如下：

$$P = P(F_L > W) \quad \dots\dots\dots(4)$$

而泥砂顆粒所承受的瞬間上升力與近床水流速度有關，如下式所示：

$$F_L = C_L \frac{\pi d^2}{4} \frac{\rho u_b^2}{2} \quad \dots\dots\dots(5)$$

其中  $d$  = 泥砂粒徑， $u_b$  = 近床水流速度。泥砂顆粒之有效重量如下所示：

$$W = (\rho_s - \rho)g \frac{\pi d^3}{6} \quad \dots\dots\dots(6)$$

將式(5)與式(6)代入式(4)可得到：

$$P = P(u_b^2 > B^2) = P(u_b > B) + P(u_b < -B) \dots\dots\dots(7)$$

其中  $B = \sqrt{\frac{4\Delta g d}{3C_L}}$ 。

### 2.2 流速之機率分佈修正

本研究假設近床水流速度  $u_b$  符合對數常態分佈( $u_b > 0$ )，故式(7)可改寫為：

$$P = P(u_b > B) \quad \dots\dots\dots(8)$$

為求式(8)之帶起機率，可定義  $v_b = \ln(u_b)$ ，則  $v_b$  符合常態分佈，其轉換示意圖如圖 1 所示。 $v_b$  之機率密度函數可表示為：

$$f_v(v_b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp\left[-\frac{(v_b - \bar{v}_b)^2}{2\sigma_v^2}\right] \dots\dots\dots(9)$$

其中  $\bar{v}_b$  及  $\sigma_v$  為  $v_b$  之平均值與標準偏差。因此式(8)之帶起機率即可表示為：

$$P = P(v_b > B') = 1 - \int_{-\infty}^{B'} f_v(v_b) dv_b \quad \dots\dots\dots(10)$$

式中  $B' = \ln(B)$ 。由於常態分佈之積分並無解析解可求，因此採用 Guo (1990)所提出之近似解求其積分值，如下式所示：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \approx 0.5 \frac{x}{|x|} \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{2x^2}{\pi}\right)} \quad (11)$$

此近似解的誤差在 0.7% 以內。因此式(10)即可整理如下：

$$P = 1 - \left( \int_{-\infty}^{\bar{v}_b} f_v(v_b) dv_b + \int_{\bar{v}_b}^{B'} f_v(v_b) dv_b \right) = 0.5 - 0.5 \frac{(B' - \bar{v}_b)}{|B' - \bar{v}_b|} \sqrt{1 - \exp\left[-\frac{2}{\pi} \left(\frac{B' - \bar{v}_b}{\sigma_v}\right)^2\right]} \quad \dots\dots\dots(12)$$

### 2.3 近床水流平均速度 $\bar{u}_b$ 與亂流強度 $\sigma_u$

亂流流況之近床水流平均速度可以對數速度分佈表示之：

$$\frac{\bar{u}_b}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) \quad \dots\dots\dots(13)$$

其中  $\bar{u}_b$  = 近床水流之時間平均速度， $\kappa$  = von Karman 常數 = 0.4， $y_0$  = 零速度點之高度 = 0.033 $k_s$  (van Rijn, 1984)， $k_s$  = 底床粗糙高度 = 2 $d$ 。根據 Cheng and Chiew (1998)的研究，建議採用  $y = 0.6d$  以計算平均速度。將上述參數代入式(13)後可得到  $\bar{u}_b = 5.52u_*$ 。亂流強度(標準偏差)則參考

Kironoto and Graf (1994)之研究結果，採用  $\sigma_u = 2u_*$ 。

$$\begin{cases} \bar{v}_b = \ln(\bar{u}_b) = \ln(5.52u_*) \\ \sigma_v = \frac{1}{\bar{u}_b} \sigma_u = \frac{1}{5.52u_*} 2u_* = 0.362 \end{cases}$$

## 2.4 平均速度與標準偏差之轉換

根據上述結果我們已經有了速度平均值  $\bar{u}_b$  以及標準偏差  $\sigma_u$ ，為進一步利用式(12)求得帶起機率，我們需要常態分佈之平均值  $\bar{v}_b$  及標準偏差  $\sigma_v$ ，本研究採用兩種方法轉換平均速度與標準偏差，分別說明如下：

### 2.4.1 解析法

利用統計機率理論之變數轉換可以求得轉換後的平均值  $\bar{v}_b$  及標準偏差  $\sigma_v$ ，詳細推導參見附錄一。若令隨機變數  $X = u_b$ ， $Y = v_b = \ln(u_b)$ ，則  $X$  和  $Y$  的平均值與標準偏差關係式如下所示：

$$\bar{v}_b = E[Y] = \ln \left[ \frac{E(X)}{\sqrt{1 + \frac{V[X]}{E^2[X]}}} \right] \dots\dots\dots(14)$$

$$\sigma_v^2 = V[Y] = \ln^2 \left( 1 + \frac{V[X]}{E^2[X]} \right) \dots\dots\dots(15)$$

將  $E[X]$  與  $V[X]$  以  $\bar{u}_b$  與  $\sigma_u^2$  代入式(14)與式(15)，則可以得到：

$$\begin{cases} \bar{v}_b = \ln \left[ \frac{5.52u_*}{\left( 1 + \frac{4u_*^2}{5.52^2 u_*^2} \right)^{0.5}} \right] = \ln(5.19u_*) \\ \sigma_v^2 = \ln^2 \left( 1 + \frac{4u_*^2}{5.52^2 u_*^2} \right) = 0.123 \rightarrow \sigma_v = 0.351 \end{cases}$$

### 2.4.2 一階近似法

一階近似法則是利用泰勒級數展開隨機變數  $Y = \phi(X)$ ，取其一階近似之期望值後可以求得隨機變數  $X$  與  $Y$  之平均值與標準偏差之關係如下所示(詳細推導參見附錄二)：

## 2.5 修正之帶起機率

上述所得之均值  $\bar{v}_b$  以及標準偏差  $\sigma_v$  代入(12)式即可估算帶起機率，以下分別列出解析法與一階近似法所得到之結果。

### 2.5.1 解析法

以  $\bar{v}_b = \ln(5.19u_*)$  以及  $\sigma_v = 0.351$  代入(12)式即可求得在給定  $C_L$  值時不同無因次剪應力下的帶起機率，如下式所示：

$$P = 0.5 - 0.5 \frac{\ln \left( \frac{0.049}{\theta C_L} \right)}{\left| \ln \left( \frac{0.049}{\theta C_L} \right) \right|} \sqrt{1 - \exp \left[ -\frac{2}{\pi} \left( \frac{\ln \left( \frac{0.049}{\theta C_L} \right)}{0.702} \right)^2 \right]} \dots\dots\dots(16)$$

### 2.5.2 一階近似法

將  $\bar{v}_b = \ln(5.52u_*)$  及  $\sigma_v = 0.362$  代入(12)式可得到帶起機率如下：

$$P = 0.5 - 0.5 \frac{\ln \left( \frac{0.044}{\theta C_L} \right)}{\left| \ln \left( \frac{0.044}{\theta C_L} \right) \right|} \sqrt{1 - \exp \left[ -\frac{2}{\pi} \left( \frac{\ln \left( \frac{0.044}{\theta C_L} \right)}{2 \cdot 0.362} \right)^2 \right]} \dots\dots\dots(17)$$

## 三、結果與討論

### 3.1 結果比較

為比較上述各項結果，將式(16)、(17)與式(2)同繪於圖 2 比較其帶起機率，其中上升力係數則依據 Cheng and Chiew (1998)之優選結果均給定為  $C_L = 0.25$ 。圖中顯示，在相同的流況及上升力係數條件下，當無因次剪應力達到 Shields 臨界起動條件( $\theta = 0.05$ )時，對數常態分佈所得之結果有較高的帶起機率，其中解析法所得帶起機率為 3.8%，一階近似法約為 2.3%，而常態分佈

表 1 各種機率分佈之整體誤差統計表

機率分佈	常態分佈	對數常態分佈					
	解析解	解 析 法			一階近似法		
$C_L$	0.25	0.2	<b>0.21</b>	0.22	0.17	<b>0.18</b>	0.19
$\ e\ _2$	0.538	0.269	<b>0.262</b>	0.279	0.288	<b>0.261</b>	0.264

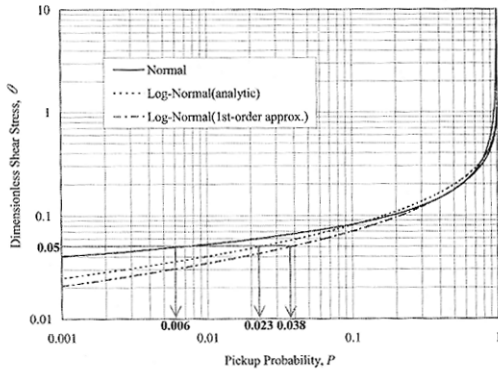


圖 2 不同機率分佈之帶起機率比較( $C_L = 0.25$ )

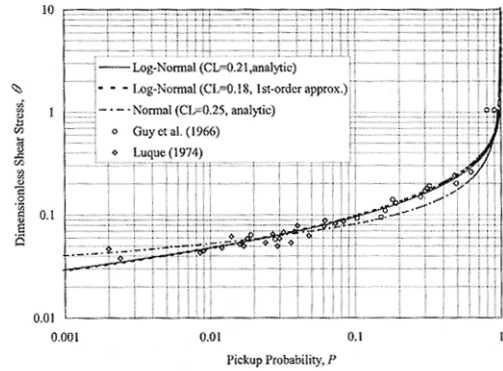


圖 3 不同機率分佈之帶起機率與實驗值比較圖

所得之帶起機率僅 0.6%，對數常態分佈所得之帶起機率約為常態分佈所得結果之 4~6 倍，推測其原因與對數常態分佈之流速均為正值有極大關聯。

### 3.2 誤差分析

本研究利用 Guy et al. (1966) 及 Luque (1974) 之實驗數據以比較不同機率分佈所得結果與實測值之吻合度。一般而言，計算值與實驗值的整體誤差 (Overall error) 可以 Euclidean norm 代表之，其定義為：

$$\|e\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n e_i^2} \quad \dots\dots\dots(18)$$

其中  $e_i$  是第  $i$  個計算值與實驗值的差值， $n$  是實驗資料的個數。各種機率分佈所得結果之整體誤差如表 1 所示，其中對數常態分佈解析法與一階近似法優選所得之  $C_L$  值分別為 0.21 與 0.18。表中數值顯示對數常態分佈所得帶起機率與實驗值的誤差 (0.262) 明顯小於常態分佈所得結果 (0.538)，減少大約 50% 的誤差，因此水流速度假

設為對數常態分佈可得到較合乎實際之結果。而對數常態分佈之一階近似解誤差 (0.261) 與解析解誤差 (0.262) 相差無幾，可知一階近似法即可獲得相當好的精度。

本研究另將各種方法所得之優選結果配合實驗值繪成圖 3 進行比較。圖中顯示常態分佈的結果與實驗值有較大的誤差，圖中並顯示兩條對數常態分佈的曲線幾乎重疊，由表 1 之數據可看出其整體誤差幾乎相同，絕大多數的資料點均相當靠近對數常態分佈所得曲線。而常態分佈曲線在無因次剪應力大於 0.07 的部分明顯高估帶起機率，在無因次剪應力小於 0.07 之部分則低估帶起機率。

## 四、結論

本研究以理論推導並計算底床上之泥砂顆粒被水流帶起之機率，研究結果顯示在相同的平均速度與亂流強度之下，近床水流速度假設為對數常態分佈時，其結果與實驗數據更為吻合，可較常態分佈所得結果減少 50% 以上的誤差。而在 Shields 臨界起動條件 ( $\theta = 0.05$ ) 時，在相同的平

均速度與亂流強度以及上升力係數( $C_L = 0.25$ )條件之下，對數常態分佈之流速有較高之帶起機率，約為常態分佈所得帶起機率之4~6倍。本研究所得之泥砂顆粒帶起機率可結合輸砂物理機制模式，進一步提高河川輸砂率計算之精度。

### 五、參考文獻

1. Cheng, N. S. and Chiew, Y. M., (1998). "Pickup probability for sediment entrainment." J. Hydr. Engrg., ASCE, 124(2), 232-235.
2. Einstein, H. A. (1950). "The bed load function for sediment transportation in open channel flows." Tech. Bull. 1026, U.S.D.A., Washington, D.C.
3. Gessler, J. (1965). "The Beginning of Bedload Movement of Mixtures Investigated as Natural Amoring in Channels." W. M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology, Pasadena.
4. Guo, J. K. (1990). "Re-Study on Einstein theory on bed material transport." Proc, Youth Congr. On Water Sci., Water Resources Press, Beijing, China, 337-342.
5. Guy, H. P., Simons, D. B., and Richardson, E. V. (1966). "Summary of alluvial channel data from flume experiments, 1956-1961." U.S.G.S Professional Paper, 462-I.
6. Kironoto, B.A., and Graf, W. H. (1994). "Turbulence characteristics in rough uniform open-channel flow." Proc., Instn. Civ. Engrs., Water, Maritime and Energy, London, U.K., 106(Dec), 333-344.
7. Luque, R. F. (1974). Erosion and transport of bed load sediment. Delft University of Technology, Delft, The Netherlands.
8. Shields, A. (1936). "Application of Similarity Principles, and Turbulence Research to Bed-Load Movement." California Institute of Technology, Pasadena (Translated from Germany).

9. van Rijn, L. C., (1984). "Sediment pickup function." J. Hydr. Engrg., ASCE, 110(10), 1494-1502.
10. Yalin, M. S. (1977). Mechanics of sediment transport. Pergamon Press, Tarrytow, N.Y.

### 附錄一 解析法

令隨機變數  $X = u_b$  ,  $Y = v_b = f(x) = \ln(u_b)$  , 隨機變數  $Y$  為常態分佈，其機率密度函數如下式：

$$p_Y \{y\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y-\eta)^2}{2\sigma^2}\right), -\infty < y < \infty \quad (19)$$

其中  $\eta = E[Y]$  ,  $\sigma^2 = V[Y]$  , 根據 Chain rule 以及式(19), 隨機變數  $X$  之機率密度函數可表示如下：

$$p_X \{x\} = p_Y \{f(x)\} \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\ln x - \eta)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{x},$$

$$0 < x < \infty \quad \dots\dots\dots (20)$$

則隨機變數  $X$  之均值可表示如下：

$$E[X] = \int_0^\infty x p_X dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\ln x - \eta)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\ln \frac{x}{\xi})^2}{2\sigma^2}\right) dx \quad \dots\dots\dots (21)$$

令  $\eta = \ln \xi$  ,  $\ln \frac{x}{\xi} = t$  , 則  $x = \xi e^t \rightarrow dx = \xi e^t dt$   
 $(0 < x < \infty \Rightarrow -\infty < t < \infty)$  , 故可得下列結果：

$$E[X] = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \xi \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2} + t\right) dt$$

$$= \xi e^{\sigma^2/2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(t-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) dt \quad (22)$$

$$= e^{\eta + \sigma^2/2}$$

同理可得下式：

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 p_X dx = \int_0^\infty x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(\ln x/\xi)^2}{2\sigma^2}\right) dx \dots\dots\dots(23)$$

同理亦可求得：

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^\infty \xi e^t \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \xi e^t \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right] dt \\ &= \xi^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2} + 2t\right] dt \\ &= \xi^2 e^{2\sigma^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(t-2\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right] dt \\ &= \xi^2 e^{2\sigma^2} \end{aligned}$$

因  $V[X] = E[X^2] - E^2[X]$ ，故

$$V[X] = e^{(2\eta+\sigma^2)} (e^{\sigma^2} - 1)$$

經整理得：

$$e^{\sigma^2} - 1 = \frac{V[X]}{E^2[X]}$$

$$\therefore V[Y] = \ln\left(1 + \frac{V[X]}{E^2[X]}\right) \dots\dots\dots(24)$$

$$\therefore \eta = E[Y] = \ln\left[\frac{E(X)}{\sqrt{1 + \frac{V[X]}{E^2[X]}}}\right] \dots\dots\dots(25)$$

## 附錄二 一階近似法

令 隨 機 變 數  $X = u_b$ ，  
 $Y = v_b = \phi(X) = \ln(u_b)$ ， $E[X] = \mu$ ，利用泰勒級數以  $\mu$  為展開點可得到：

$$\begin{aligned} Y &= \phi(\mu) + \phi'(\mu)(X - \mu) + \frac{\phi''(\mu)}{2!}(X - \mu)^2 \\ &+ \dots\dots\dots \frac{\phi^{(n)}(\mu)}{n!}(X - \mu)^n \end{aligned} \dots\dots(26)$$

其一階近似式如下所示：

$$Y = \phi(\mu) + \phi'(\mu)(X - \mu) \dots\dots\dots(27)$$

取一階近似式之期望值可得下式：

$$E[Y] = \phi(\mu) + \phi'(\mu)E[X - \mu] = \phi(\mu) \dots\dots\dots(28)$$

式(27)與式(28)之差可表示為：

$$Y - E[Y] = \phi'(\mu)(X - \mu) \dots\dots\dots(29)$$

根據方差之定義，可利用式(29)得到下式：

$$\begin{aligned} V[Y] &= E[(Y - E[Y])^2] \dots\dots\dots(30) \\ &= \{\phi'(\mu)\}^2 E[(X - \mu)^2] \approx \{\phi'(\mu)\}^2 V[X] \end{aligned}$$

收稿日期：民國 89 年 11 月 2 日

修正日期：民國 89 年 11 月 29 日

接受日期：民國 90 年 2 月 22 日