

二維不飽和入滲問題於連續變化降雨強度及 任意起始條件以及具地下水位條件下之解析解

Analytical Solution of Two Dimensional Unsaturated Infiltration Problems with Unsteady Continuous Changing Rainfall Intensity and with Water Table

華夏工商專科學校營建管理科講師暨
台灣大學農業工程研究所博士候選人

國立台灣大學農業工程研究所教授
暨國立台灣大學水工試驗所研究員

私立中國技術學院
土木工程系副教授

陳建謀

譚義績

陳主惠

Jiann-Mou Chen

Yih-Chi Tan

Chu-Hui Chen

摘 要

本文目的在於求解二維不飽和入滲問題於有地下水位時考慮降雨強度隨時間及空間變化與任意起始體積含水比下之解析解。基於假設 $k = k_s e^{\alpha\psi}$ 及 $\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) e^{\alpha\psi}$ 來表示水力傳導係數及體積含水比與張力水頭間之指數分佈關係，並透過函數轉換技巧可求出任意連續變化降雨強度下及任意起始條件下，積水前土壤體積含水比剖面之解析解，同時可預測達積水所需之時間。本解析解可應用於降雨入滲及蒸發散之邊界條件下，以壤土為例，可模擬降雨強度或蒸發散速度隨時間及空間變化與實際降雨或蒸發散特性較接近，此外所推導之結果為級數解之型式具容易運算之優點且可提供考慮連續變化降雨強度或蒸發散速度之複雜數值模式驗證之用。

關鍵詞：土壤體積含水比，張力水頭，蒸發散。

ABSTRACT

This purpose of this paper is to solve two-dimensional Richards's equation under the conditions of time dependent and non-uniform distribution of rainfall intensity and arbitrary initial volumetric water content. Exponential functional forms $k = k_s e^{\alpha\psi}$ and $\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) e^{\alpha\psi}$ are used to represent the hydraulic conductivity and volumetric water content with pressure relations. The analytical solution of this paper can predict ponding time and obtain the solution of volumetric water content distribution before and

ponding. Also, analytical solution can be applied to the case of evaporation and infiltration. For example of loam soil, it can simulate variation of rainfall intensity, which varied with time and space. The analytical solutions of this paper reflected real situation exactly, and can be applied to verify some complicated numerical models, which consider continuous changing rainfall intensity with time and space.

Keywords: Volumetric water content, Pressure head, Evaporation.

一、前言

大部分入滲問題之解析解均假設降雨強度始終維持常數，但實際之降雨狀況則非如此，降雨強度可能隨時間及空間變化。因此 Warrick[1975] 將控制方程式線性化，假設 Diffusivity 及水力傳導係數之導數為常數下解得任意降雨輸入之一維入滲問題之解析解；Morel-Seytoux[1978,1981] 不以 Richards equation 為控制方程式而以 Green and Ampt[1911] 的入滲方程式為基礎，自行推導控制方程式，雖可求解降雨強度變化為片段連續如降雨組體圖之一維入滲問題解析解，但仍需結合數值方法求解。Raats 與 Gardner[1974] 利用 Kirchoff 積分轉換來線性化理查方程式；Batu[1980] 利用 Kirchoff 積分轉換求解二維入滲問題之穩態解析解，Batu [1982, 1983] 利用 Kirchoff 積分轉換求解二維入滲問題於非週期性及週期性變化降雨強度之非穩態解析解，並假設無地下水位。本文目的在求解二維入滲問題於有地下水位時降雨強度隨時間及空間變化下，任意起始體積含水比之非穩態解析解。

本文利用理查方程式為控制方程式，利用函數轉換技巧可將控制方程式轉換成擴散方程式之型式並利用分離變數法及傅立葉級數(Fourier series)展開求得解析解。Batu[1982,1983] 雖已求得非均勻變化降雨強度下之非穩態解析解，但降雨強度僅隨空間變化並不隨時間變化，且假設無地下水位，本文可求出有地下水位時，任意不均勻隨空間變化及時間變化分佈之降雨強度與任意臨前水文條件下，積水前之體積含水比變化剖面並可預測其最早產生積水處所需之時間

(ponding time)。同時，此數學模式亦可應用於蒸發散速度隨空間及時間變化與任意臨前水文條件下之解析解。

二、數學模式

2.1 推導微分方程式之通解

本文假設比擴散度 D (diffusivity) 及水力傳導係數對體積含水比之微分 k^* 為常數，並利用函數轉換技巧可將理查方程式之體積含水比函數 $\theta(z,t)$ 轉換成擴散方程式型式之函數 $W(z,t)$ ，由於擴散方程式較容易求解，因此求得 $W(z,t)$ 之解後，透過函數轉換即可求得函數 $\theta(z,t)$ 之解。

考慮不飽和二維入滲問題如圖 1 所示，二維理查方程式可寫成如下的型式：

$$\frac{\partial \theta(x,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial k(\theta)}{\partial z} \dots (1)$$

上式中參數 t 表時間，參數 x, z 分別表示水平及垂直方向之座標軸，並定義向右及向下為正， θ 表體積含水比， k 表水力傳導係數， ψ 表張力水頭。

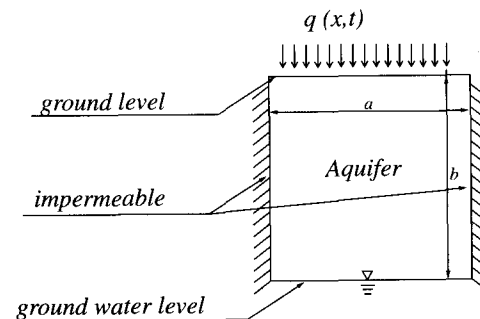


圖 1 二維入滲及蒸發散問題示意圖

本文假設指數函數關係之水力傳導係數與張力水頭如下所示與 Srivastava and Yeh [1991]之假設相同。

$$k = k_s e^{\alpha \psi} \quad \text{.....(2)}$$

爲了將理查方程式線性化以利於求解，今假設比擴散度 D (diffusivity) 及水力傳導係數對體積含水比之微分 k^* 爲常數，可得 θ 與 ψ 之關係如下：

$$\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) e^{\alpha \psi} \quad \text{.....(3)}$$

(2)式中 k_s 爲飽和之水力傳導係數， α 表土壤孔隙分佈參數，(3)式中 θ_r 表殘存體積含水比， θ_s 表飽和體積含水比。

假設比擴散度爲常數，則控制方程式可寫成：

$$\frac{\partial \theta(x, z, t)}{\partial t} = D \left[\frac{\partial^2 \theta(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, z, t)}{\partial z^2} \right] - k^* \cdot \frac{\partial \theta(x, z, t)}{\partial z} \quad \text{.....(4)}$$

上式中 $k^* = \frac{k_s}{\theta_s - \theta_r}$ ， $D = \frac{k^*}{\alpha}$ 可由邊界條件 $\psi \rightarrow -\infty$ ， $\theta = \theta_r$ 及 $\psi \rightarrow 0$ ， $\theta = \theta_s$ 求得。

(4)式爲 θ 之線性微分方程式，必須於地表降雨強度 $q(x, t)$ ，邊界條件及起始條件已知之情形下方可求解，可寫出：

$$\theta(x, z, 0) = h(x, z) \quad \text{.....(5)}$$

$$\theta(x, z, t) \Big|_{z=b} = \theta_s \quad \text{.....(6)}$$

$$\frac{\partial \theta(x, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad \text{.....(7)}$$

$$\frac{\partial \theta(x, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0 \quad \text{.....(8)}$$

其中 $h(x, z)$ 表任意函數，參數 a 表求解區間之水平距離，參數 b 表地下水位距地表之垂直距離。假設一轉換函數 $W(x, z, t)$ 定義如下：

$$\theta(x, z, t) = \theta_r + \frac{1}{D} e^{\frac{\alpha}{2}} \cdot e^{-\frac{\alpha^2 D t}{4}} \cdot W(x, z, t) \quad \text{.....(9)}$$

將(9)式代入(4)~(8)式可得：

$$\frac{\partial W(x, z, t)}{\partial t} = D \left[\frac{\partial^2 W(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x, z, t)}{\partial z^2} \right] \quad \text{.....(10)}$$

$$W(x, z, 0) = D \cdot [h(x, z) - \theta_r] \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{.....(11)}$$

$$W(x, z, t) \Big|_{z=b} = \frac{k_s}{\alpha} \cdot e^{\left(\frac{\alpha^2 D t}{4} - \frac{\alpha b}{2} \right)} \quad \text{.....(12)}$$

$$\frac{\partial W(x, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad \text{.....(13)}$$

$$\frac{\partial W(x, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0 \quad \text{.....(14)}$$

今考慮 $W(x, z, t)$ 之邊界條件如下：

$$-D \frac{\partial W(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = f(t) \quad \text{.....(15)}$$

上式中 $f(t)$ 爲任意之時間函數。而(10) ~ (15)式利用 Duhamel's Theorem [Ozisik, 1993, p.197, eq.5-4]及陳建謀等[1998]已推導之結果，應用分離變數法及傅立葉級數展開可求得其解如下：

$$W(x, z, t) = D \cdot [h(x, z) - \theta_r] \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}} - \int_{\tau=0}^t \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{0n} \cdot D \cdot \lambda_{0n}^2}{2} \cdot \cos \left[\frac{(2n+1)\pi z}{2b} \right] \cdot e^{-D \lambda_{0n}^2 (t-\tau)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \cdot D \cdot \lambda_{mn}^2 \cdot \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cdot \cos \left[\frac{(2n+1)\pi z}{2b} \right] \cdot e^{-D \lambda_{mn}^2 (t-\tau)} \right\} d\tau \quad \text{.....(16)}$$

其中

$$\lambda_{0n}^2 = \left[\frac{(2n+1)\pi}{2b} \right]^2 \quad \text{.....(17)}$$

$$\lambda_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left[\frac{(2n+1)\pi}{2b} \right]^2 \dots\dots\dots(18)$$

$$A_{0n} = \frac{2}{a} \int_0^a B_n(x) dx \dots\dots\dots(19)$$

$$A_{mn} = \frac{2}{a} \int_0^a B_n(x) \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \dots\dots\dots(20)$$

$$B_n(x) = \frac{2}{b} \int_0^b \left\{ D \cdot [h(x, z) - \theta_r] \cdot e^{-\frac{\alpha z}{2}} - \frac{k_s}{\alpha} \cdot e^{\left(\frac{\alpha^2 D \tau}{4} - \frac{\alpha b}{2} \right)} \right. \\ \left. + \frac{f(\tau)(z-b)}{D} \right\} \cdot \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2b}\right) dz \dots\dots\dots(21)$$

從入滲率之定義：

$$q(x, t) = -D \frac{\partial \theta(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} + k \Big|_{z=0} \dots\dots\dots(22)$$

由式(2)~(3), (15)及(22), 上式可寫為：

$$q(x, t) = \alpha \cdot D \cdot [h(x, z) \Big|_{z=0} - \theta] \cdot e^{-\frac{\alpha^2 D t}{4}} - D \cdot e^{-\frac{\alpha^2 D t}{4}} \cdot \frac{\partial h(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} - \\ \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-\frac{\alpha^2 D t}{4}} \cdot \int_{\tau=0}^t \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{0n} \cdot D \cdot \lambda_{0n}^2}{2} \cdot e^{-D \lambda_{0n}^2 (t-\tau)} + \right. \\ \left. \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \cdot D \cdot \lambda_{mn}^2 \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot e^{-D \lambda_{mn}^2 (t-\tau)} \right\} d\tau \dots\dots\dots(23)$$

在式(23)中因 $f(t)$ 與 $h(x, z)$ 均表任意函數，因此降雨強度 $q(x, t)$ 可由此兩個函數調整為任意型式隨時間及空間變化之降雨，可使所求之解應用上較廣泛。

由(16)式可求得 $W(x, z, t)$ 之解，因此將(16)式之結果帶入(9)式即可求得 $\theta(x, z, t)$ 之解。

2.2 $f(t)$ 為常數時之解析解

在(15)式中 $f(t) = \text{常數}$ ，則降雨強度 $q(x, t)$ 由(23)式可知仍然為空間及時間之函數，今將其積水前體積含水比之解析解及最早積水時間推導如下。

2.2.1 積水前體積含水比之解析解

考慮不飽和二維入滲問題如圖 1 所示，若 $f(t) = \gamma$ 而 γ 表一任意常數，且假設起始體積含水比 $h(x, z) = \theta_a - \beta \left\{ (x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right\}$ ，其中 θ_a, β, x_0 及 z_0 為常數，則 $\theta(x, z, t)$ 之解如下所

示：

$$\theta(z, t) = \theta_r + \left\{ \theta_a - \beta \left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] - \theta_r \right\} e^{-\frac{\alpha^2 D t}{4}} \\ + \frac{1}{D} \cdot e^{\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2 D t}{4} \right)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{0n}}{2} \cdot \cos\left[\frac{(2n+1)\pi z}{2b}\right] \\ \cdot \left(e^{\frac{\alpha^2 D t}{4}} - e^{-D \lambda_{0n}^2 t} \right) \\ + \frac{1}{D} \cdot e^{\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2 D t}{4} \right)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{0n}}{2} \cdot \cos\left[\frac{(2n+1)\pi z}{2b}\right] \\ \cdot \left(1 - e^{-D \lambda_{0n}^2 t} \right) \\ - \frac{1}{D} \cdot e^{\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2 D t}{4} \right)} \\ \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left[\frac{(2n+1)\pi z}{2b}\right] \cdot \left(1 - e^{-D \lambda_{mn}^2 t} \right) \dots\dots\dots(24)$$

其中

$$C_{0n}' = \frac{8 \cdot k_s \cdot (-1)^n \cdot \lambda_{0n}^2 \cdot e^{-\frac{\alpha b}{2}}}{(2n+1) \cdot \pi \cdot \alpha \cdot \left(\frac{\alpha^2}{4} + \lambda_{0n}^2 \right)} \dots\dots\dots(25)$$

$$C_{0n} = \frac{16 \cdot b \cdot \gamma}{(2n+1)^2 \cdot \pi^2 \cdot D} \\ - \frac{8D \left(\theta_a - \beta \cdot x_0^2 - \beta \cdot z_0^2 - \theta_r \right)}{\alpha^2 b^2 + (2n+1)^2 \cdot \pi^2} \cdot \left[\alpha b + e^{-\frac{\alpha b}{2}} \cdot (2n+1) \cdot \pi \cdot (-1)^n \right] \\ \cdot \left\{ e^{\frac{\alpha b}{2}} \cdot (2n+1) \cdot \pi \cdot (-1)^n \cdot b^2 \cdot \right. \\ \left. \left[24\alpha^2 b^2 + 8\alpha^3 b^3 + \alpha^4 b^4 \right. \right. \\ \left. \left. + 2(2n+1)^2 \cdot \pi^2 \cdot (\alpha^2 b^2 + 4\alpha b - 4) \right. \right. \\ \left. \left. + (2n+1)^4 \cdot \pi^4 \right. \right. \\ \left. \left. - 8\alpha b^3 [3 \cdot (2n+1)^2 \cdot \pi^2 - \alpha^2 b^2] \right] \right\} \\ - \frac{16Db\beta z_0}{[\alpha^2 b^2 + (2n+1)^2 \cdot \pi^2]^{\frac{5}{2}}} \\ \cdot \left\{ 2[\alpha^2 b^2 - (2n+1)^2 \cdot \pi^2] + \right. \\ \left. \left[e^{-\frac{\alpha b}{2}} \cdot (2n+1) \cdot \pi \cdot (-1)^n \cdot [\alpha^2 b^2 + 4\alpha b + (2n+1)^2 \cdot \pi^2] \right] \right\} \\ - \frac{8D\beta a}{[\alpha^2 b^2 + (2n+1)^2 \cdot \pi^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[x_0 - \frac{a}{3} \right] \cdot \left[\alpha b + e^{-\frac{\alpha b}{2}} \cdot (2n+1) \cdot \pi \cdot (-1)^n \right] \\ \dots\dots\dots(26)$$

$$C_{mn} = \frac{16D\beta a}{m^2\pi^2[(2n+1)^2\pi^2 + \alpha^2b^2]} \left[(-1)^n (x_0 - a) - x_0 \right] \cdot \left[\alpha b + e^{-\frac{\alpha b}{2} \cdot (2n+1) \cdot \pi} \cdot (-1)^n \right] \quad \dots\dots\dots(27)$$

降雨強度之邊界條件亦可寫出如下：

$$\begin{aligned} q(x,t) = & \alpha \cdot D \cdot \left\{ \theta_a - \beta \left[(x-x_0)^2 - z_0^2 \right] - \theta_r \right\} \cdot e^{-\frac{\alpha^2 Dt}{4}} \\ & - 2 \cdot D \cdot \beta \cdot z_0 \cdot e^{-\frac{\alpha^2 Dt}{4}} \\ & + \frac{\alpha}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C'_{0n}}{2} \cdot \left[1 - e^{-\left(\frac{\alpha^2 Dt}{4} + D \cdot \lambda_{0n}^2 t \right)} \right] \\ & + \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-\frac{\alpha^2 Dt}{4}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C'_{0n}}{2} \cdot \left(1 - e^{-D \cdot \lambda_{0n}^2 t} \right) \\ & - \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-\frac{\alpha^2 Dt}{4}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \left(1 - e^{-D \cdot \lambda_{mn}^2 t} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(28)$$

2.2.2 推導最早積水時間

在二維的入滲問題中，若地表之起始體積含水比及降雨強度皆非均勻分佈，則地表每一點之積水時間均不相同，因此僅能求得最早抵達積水時間之點。假設最早抵達積水時間之點為 x_{tp} ，最早積水時間為 t_p ，則 $\theta(x_{tp}, t_p) = \theta_s$ 可得：

$$\begin{aligned} \theta_s = & \theta_r + \left\{ \theta_a - \beta \left[(x_{tp} - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] - \theta_r \right\} \cdot e^{-\frac{\alpha^2 Dt_p}{4}} \\ & + \frac{1}{D} \cdot e^{-\left(\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha^2 Dt_p}{4} \right)} \\ & \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C'_{0n}}{2} \cdot \cos\left[\frac{(2n+1)\pi z}{2b}\right] \cdot \left(e^{-\frac{\alpha^2 Dt_p}{4}} - e^{-D \cdot \lambda_{0n}^2 t_p} \right) \\ & + \frac{1}{D} \cdot e^{-\left(\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha^2 Dt_p}{4} \right)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C'_{0n}}{2} \cdot \cos\left[\frac{(2n+1)\pi z}{2b}\right] \cdot \left(1 - e^{-D \cdot \lambda_{0n}^2 t_p} \right) \\ & - \frac{1}{D} \cdot e^{-\left(\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha^2 Dt_p}{4} \right)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x_{tp}}{a}\right) \cdot \cos\left[\frac{(2n+1)\pi z}{2b}\right] \cdot \left(1 - e^{-D \cdot \lambda_{mn}^2 t_p} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(29)$$

(29)式中， t_p 可利用試誤法求解。而可能最早抵達積水時間之點有兩點，一為地表起始體積含水比最大之點(以 x_w 表示)，另一為降雨強度最大之點(以 x_q 表示)，所以只需利用試誤法比較這兩點較先抵達積水者即是所求。

2.3 $f(t) = \gamma \cdot e^{-\frac{\alpha^2 Dt}{4}}$ 時積水前體積含水比之解析解

若(15)式中，若 $f(t) = \gamma \cdot e^{-\frac{\alpha^2 Dt}{4}}$ 其中 γ 表一任意常數，且假設起始體積含水比 $h(x, z) = \theta_a - \beta \left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right]$ ，其中 θ_a, β, x_0 及 z_0 為常數，則 $\theta(x, z, t)$ 之解如下所示。而最早積水時間之求法則如同 2.2.2 節所示。

$$\begin{aligned} \theta(z,t) = & \theta_r + \left\{ \theta_a - \beta \left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] - \theta_r \right\} \cdot e^{-\frac{\alpha^2 Dt}{4}} \\ & + \frac{1}{D} \cdot e^{-\left(\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha^2 Dt}{4} \right)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d'_{0n}}{2} \cdot \cos\left[\frac{(2n+1)\pi z}{2b}\right] \\ & \cdot \left(e^{-\frac{\alpha^2 Dt}{4}} - e^{-D \cdot \lambda_{0n}^2 t} \right) \\ & - \frac{1}{D} \cdot e^{-\left(\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha^2 Dt}{4} \right)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d'_{0n}}{2} \cdot \cos\left[\frac{(2n+1)\pi z}{2b}\right] \cdot \left(1 - e^{-D \cdot \lambda_{0n}^2 t} \right) \\ & - \frac{1}{D} \cdot e^{-\left(\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha^2 Dt}{4} \right)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} d_{mn} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left[\frac{(2n+1)\pi z}{2b}\right] \cdot \left(1 - e^{-D \cdot \lambda_{mn}^2 t} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(30)$$

其中

$$\begin{aligned} d'_{0n} = & \left[\frac{8 \cdot k_s \cdot (-1)^n \cdot e^{-\frac{\alpha b}{2}}}{(2n+1) \cdot \pi \cdot \alpha} + \frac{16 \cdot \gamma \cdot b}{D \cdot (2n+1)^2 \cdot \pi^2} \right] \\ & \cdot \left(\frac{\lambda_{0n}^2 \cdot D}{\frac{\alpha^2 \cdot D}{4} + \lambda_{0n}^2 \cdot D} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots(31)$$

$$d_{0n} = \frac{8D(\theta_a - \beta \cdot x_0^2 - \beta \cdot z_0^2 - \theta_r)}{\alpha^2 b^2 + (2n+1)^2 \cdot \pi^2} \left[\alpha b + e^{-\frac{\alpha b}{2} \cdot (2n+1) \cdot \pi \cdot (-1)^n} \right]$$

$$- \frac{8D\beta}{[\alpha^2 b^2 + (2n+1)^2 \cdot \pi^2]^{\frac{5}{2}}} \left\{ \begin{aligned} &e^{-\frac{\alpha b}{2} \cdot (2n+1) \cdot \pi \cdot (-1)^n} \cdot b^2 \cdot \\ &\left[24\alpha^2 b^2 + 8\alpha^3 b^3 + \alpha^4 b^4 \right. \\ &+ 2(2n+1)^2 \cdot \pi^2 \cdot (\alpha^2 b^2 + 4\alpha b - 4) \\ &+ (2n+1)^4 \cdot \pi^4 \\ &\left. - 8\alpha b^3 [3 \cdot (2n+1)^2 \cdot \pi^2 - \alpha^2 b^2] \right] \end{aligned} \right\}$$

$$+ \frac{16Db\beta z_0}{[\alpha^2 b^2 + (2n+1)^2 \cdot \pi^2]^{\frac{3}{2}}} \left\{ \begin{aligned} &2[\alpha^2 b^2 - (2n+1)^2 \cdot \pi^2] + \\ &\left[e^{-\frac{\alpha b}{2} \cdot (2n+1) \cdot \pi \cdot (-1)^n} \cdot [\alpha^2 b^2 + 4\alpha b + (2n+1)^2 \cdot \pi^2] \right] \end{aligned} \right\}$$

$$+ \left[\frac{8D\beta a}{\alpha^2 b^2 + (2n+1)^2 \cdot \pi^2} \right] \left(x_0 - \frac{a}{3} \right) \cdot \left[\alpha b + e^{-\frac{\alpha b}{2} \cdot (2n+1) \cdot \pi \cdot (-1)^n} \right]$$

.....(32)

$$d_{mn} = \frac{16D\beta a}{m^2 \pi^2 [(2n+1)^2 \pi^2 + \alpha^2 b^2]} \left[(-1)^m (x_0 - a) - x_0 \right]$$

$$\cdot \left[\alpha b + e^{-\frac{\alpha b}{2} \cdot (2n+1) \cdot \pi \cdot (-1)^n} \right]$$

.....(33)

降雨強度之邊界條件亦可寫出如下：

$$q(x, t) = \alpha \cdot D \cdot \left\{ \theta_a - \beta [(x - x_0)^2 - z_0^2] - \theta_r \right\} e^{-\frac{\alpha^2 D t}{4}}$$

$$- 2 \cdot D \cdot \beta \cdot z_0 \cdot e^{-\frac{\alpha^2 D t}{4}}$$

$$+ \frac{\alpha}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{0n}}{2} \left[1 - e^{-\left(\frac{\alpha^2 D t}{4} + D \cdot \lambda_{0n}^2 \cdot t \right)} \right]$$

$$- \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-\frac{\alpha^2 D t}{4}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{0n}}{2} \cdot \left(1 - e^{-D \cdot \lambda_{0n}^2 \cdot t} \right)$$

$$- \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-\frac{\alpha^2 D t}{4}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \left(1 - e^{-D \cdot \lambda_{mn}^2 \cdot t} \right)$$

.....(34)

三、結果與討論

今以壤土 (Silt Loam) 為例，考慮

$f(t) = \gamma \cdot e^{-\frac{\alpha^2 D t}{4}}$ 及 $f(t) = \gamma$ (γ 為常數) 之情形下，說明入滲及蒸發於積水前之結果。起始條件之相關參數如表 1 所示，起始土壤體積含水比分佈如圖 2 所示。此外，應用本文之方法亦可計算 Raats 與 Gardner [1974] 所定義之母體通量位能 (Matric flux potential)。

3.1 函數 $f(t) = \gamma \cdot e^{-\frac{\alpha^2 D t}{4}}$ 之降雨強度隨時間變化之結果

首先，令 $\gamma = 0.0001$ ，壤土之相關參數如表 2 所示 [Van Genuchten, 1980]，將參數帶入 (34) 式中可得降雨強度隨時間及空間變化如圖 3 所示。由圖 2 及圖 3 可判斷最早產生積水之位置為 $x_p = 100$ cm，同時利用試誤法可求得最早積水時間 $t_p = 2291.65$ 秒。將參數帶入 (30) 式中可得積水前之體積含水比變化分佈如圖 4~6 所示。

3.2 函數 $f(t) = \gamma$ 之蒸發速度隨時間變化之結果

其次，令 $\gamma = -0.0001$ ，壤土之相關參數如表 2 所示，將參數帶入 (28) 式中可得蒸發速度隨時間及空間變化如圖 7 所示。將參數帶入 (24) 式中可得積水前之體積含水比變化分佈如圖 8~10 所示。

3.3 函數 $f(t) = \gamma \cdot e^{-\frac{\alpha^2 D t}{4}}$ 之母體通量位能結果

由 Raats and Gardner [1974] 所定義之母體通量位能為：

$$\phi = \int_{-\infty}^{\psi} k(\psi) d\psi \quad \text{.....(35)}$$

將 (2), (3) 兩式代入上式可得：

$$\phi = \frac{k_s (\theta - \theta_r)}{\alpha (\theta_s - \theta_r)} \quad \text{.....(36)}$$

將表 2 之參數帶入上式並利用 (34) 式之結果即可計算 $f(t) = \gamma \cdot e^{-\frac{\alpha^2 D t}{4}}$ 之母體通量位能變化如圖 11~13 所示。

表 1 起始條件之參數

parameter	value	unit
θ_a	0.434	cm^3/cm^3
β	0.0000003	-
x_0	100	cm
z_0	800	cm
a	200	cm
b	200	cm

表 2 壤土之參數

parameter	value	unit
k_s	31.6	cm/day
α	0.02	1/cm
θ_s	0.434	cm^3/cm^3
θ_i	0.218	cm^3/cm^3

資料來源: Van Genuchten, 1980

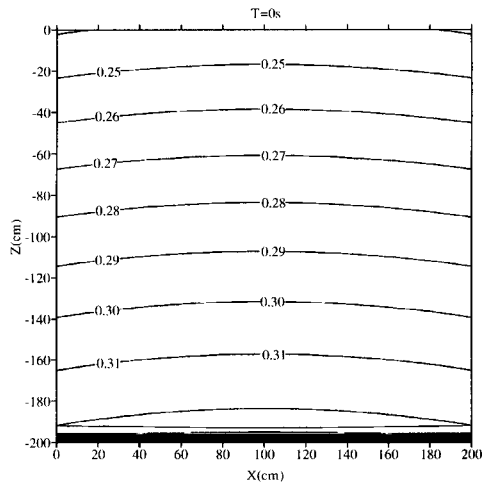


圖 2 起始體積含水比分布圖

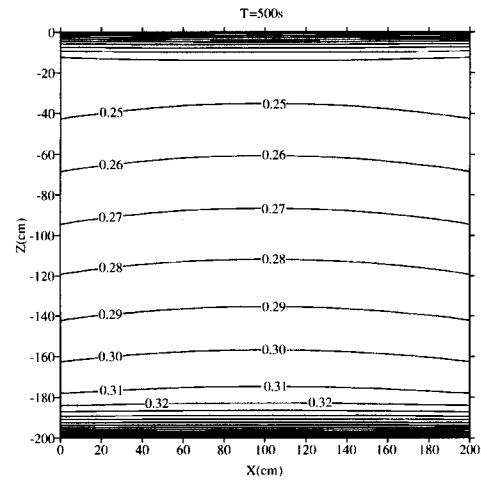


圖 4 $t=500\text{s}$ 之體積含水比分布圖 ($f(t) = \gamma \cdot e^{\frac{\alpha^2 Dt}{4}}$)

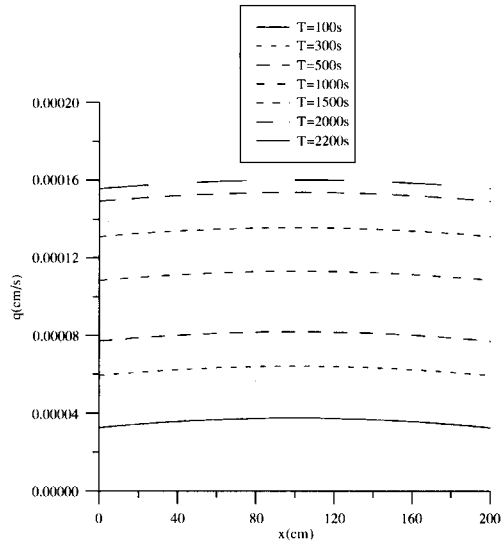


圖 3 降雨強度隨時間及空間變化分布圖

$$f(t) = \gamma \cdot e^{\frac{\alpha^2 Dt}{4}}$$

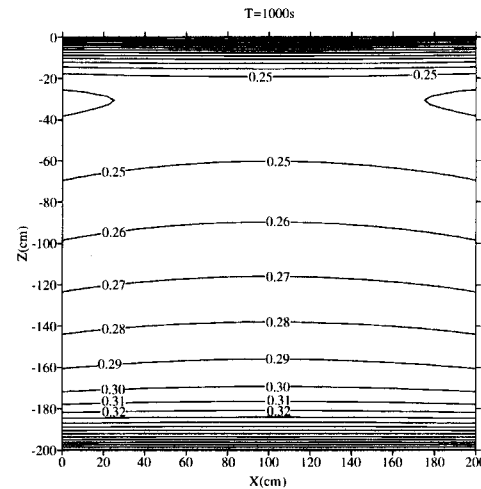


圖 5 $t=1000\text{s}$ 之體積含水比分布圖 ($f(t) = \gamma \cdot e^{\frac{\alpha^2 Dt}{4}}$)

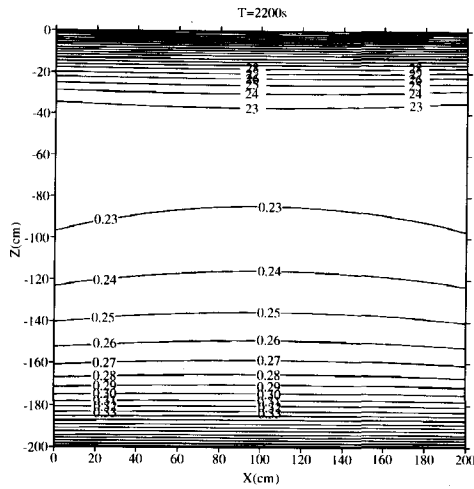


圖 6 $t=2200s$ 之體積含水比分布圖 ($f(t)=\gamma \cdot e^{\frac{\alpha^2 Dt}{4}}$)

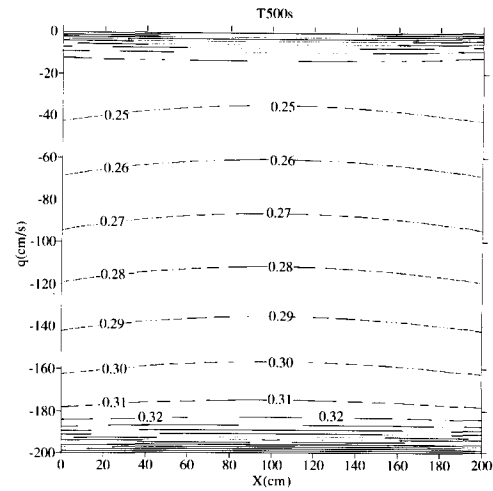


圖 8 $t=500s$ 之體積含水比分布圖 ($f(t)=\gamma$)

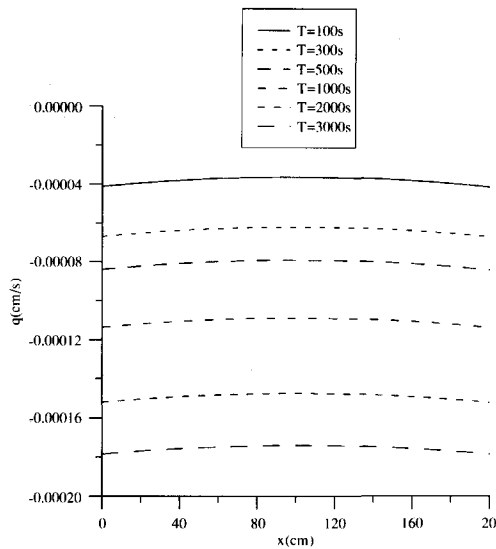


圖 7 蒸發速度隨時間及空間變化分布圖之體積含水比分布圖 ($f(t)=\gamma$)

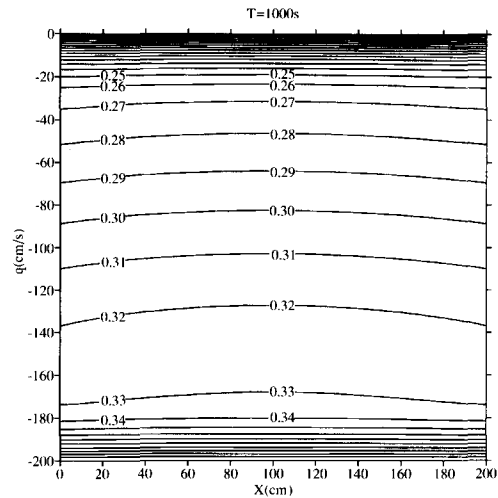


圖 9 $t=1000s$ 之體積含水比分布圖 ($f(t)=\gamma$)

3.4 討論

1. 本文所推導之起始條件(5)式中 $h(x,z)$ 及邊界條件(15)式中 $f(t)$ ，因 $h(x,z)$ 及 $f(t)$ 基本上均可為任意函數，因此本文之求解方法可適用於求解任意變化起始條件及降雨型式邊界條件於有地下水位時之解析解。本解析解適用於

積水產生前或蒸發散之邊界條件，若積水產生後則產生移動邊界，可藉數值方法求解。

2. 本文假設土壤性質為 $\frac{d\psi}{d\theta} = D$ ，並以壤土為例繪出 $\theta-\psi$ 及 $\psi-k$ 之關係曲線如圖 14 及 15 所示，而含水量 θ 與張力水頭 ψ 之關係則與遲滯效應中之加濕過程之曲線近似。
3. 本解析解可應用於模擬二維有地下水位時之鋼板樁基礎開挖前，分析降雨造成之土壤體

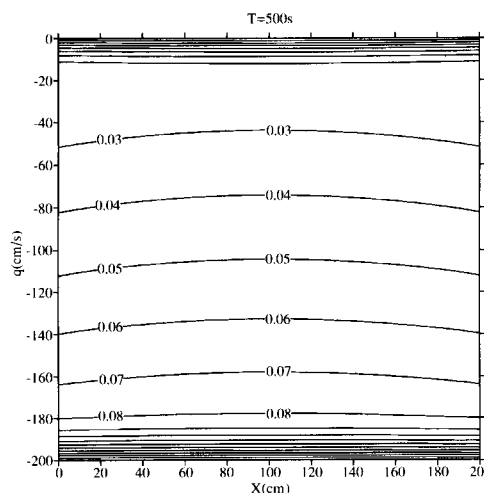


圖 10 $t=2000s$ 之體積含水比分布圖($f(t)=\gamma$)

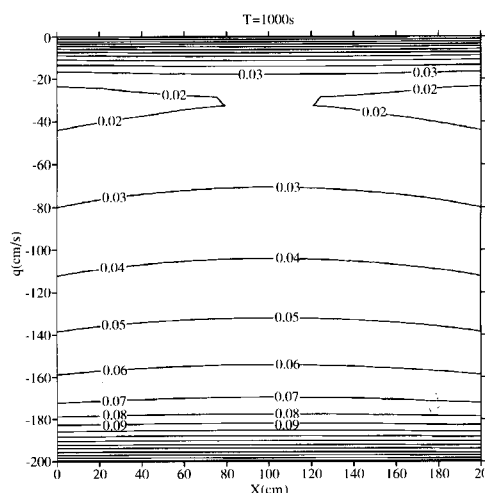


圖 12 $t=1000s$ 之母體通量位能分布圖

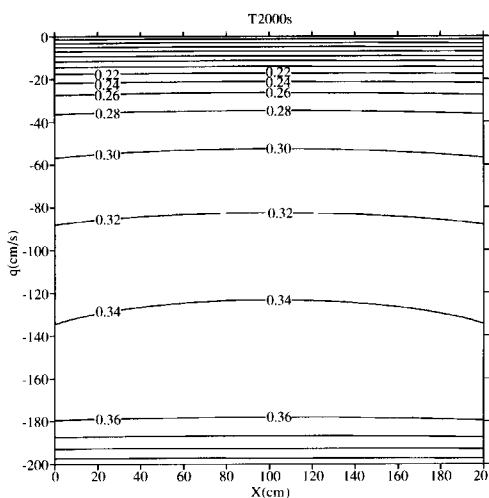


圖 11 $t=500s$ 之母體通量位能分布圖

$$(f(t)=\gamma \cdot e^{-\frac{\alpha^2 D t}{4}})$$

積含水比變化分佈，有助於工程師了解開挖前之土壤含水量，以減少工程災害。

四、結論

1. 本文應用 Kirchoff 積分轉換及 Duhamel's Theorem 可求出二維 Richards Equation 於任意變化起始條件及降雨型式邊界條件，有地下水位時於積水前之體積含水比變化之解析

$$(f(t)=\gamma \cdot e^{-\frac{\alpha^2 D t}{4}})$$

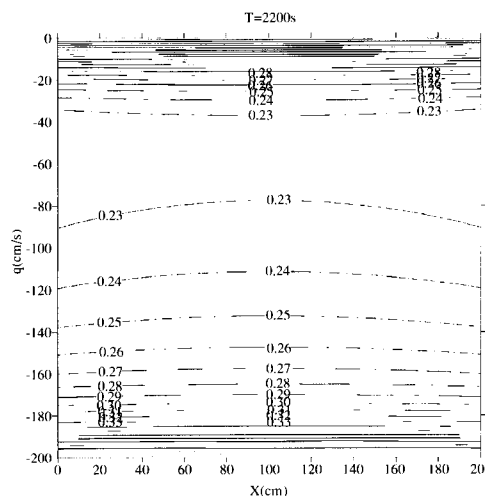


圖 13 $t=2200s$ 之母體通量位能分布圖

$$(f(t)=\gamma \cdot e^{-\frac{\alpha^2 D t}{4}})$$

解，並可求出最早積水時間。同時，本模式亦可應用於任意蒸發散之邊界條件。

2. 本研究推導之解析解具運算簡易之優點，同時可供發展其他較複雜之數值模式驗證之用。

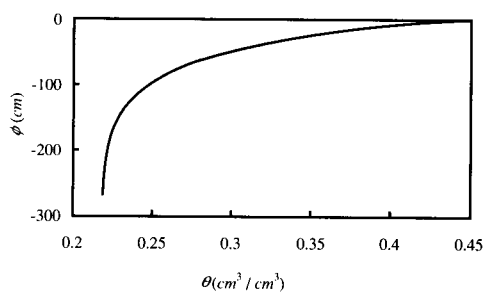


圖 14 壤土之 θ 與 ψ 之關係曲線

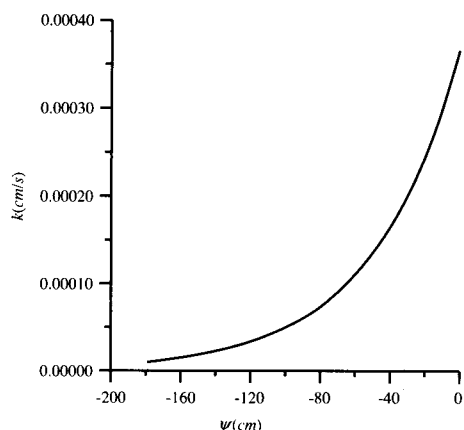


圖 15 壤土之 k 與 ψ 之關係曲線

五、參考文獻

1. Batu V., "Flow net for unsaturated infiltration from periodic strip sources", Water Resource Res., Vol. 16, No.2, p.284-288, 1980.
2. Batu V., "Time-dependent linearized two-dimensional infiltration and evaporation from nonuniform and nonperiodic strip sources", Water Resource Res., Vol. 16, No.2, p.284-288, 1982.
3. Batu V., "Time-dependent linearized two-dimensional infiltration and evaporation from nonuniform and periodic strip sources", Water Resource Res., Vol. 16, No.2, p.284-288, 1983.
4. Green, W. H., and G. A. Ampt, "Studies on soils physics, I, Flow of air and water through soils", J. Agric. Sci., 1-24, 1911.
5. Morel-Seytoux, H. J., "Derivation of equations for variable rainfall infiltration", Water Resources Res. Vol. 14, No.4, pp.561-568, 1978.
6. Morel-Seytoux, H. J., "Analytical results for prediction of variable rainfall infiltration", Journal of Hydrology, Vol. 59, pp. 209-230, 1981.
7. Ozisik M., "Heat Conduction", John Wiley & Sons, Inc. New York, 1993.
8. Raats, P. A. C., and Gardner, W. R., Movement of water in the unsaturated zone near a water-table, In Jan Van Schilfgaarde (ed.) Drainage for Agriculture: Agronomy 17, p.311-405, 1974.
9. Srivastava R., Yeh T.-C. Jim., "Analytical solutions one-dimensional infiltration toward the water table in homogeneous and layered soils", Water Resource Res., Vol. 27, No.5, p.753-762, 1991.
10. Van Genuchten, M. Th. "A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils" Soil Sci. Soc. Am. J-44:892-898, 1980.
11. Warrick A. W., "Analytical Solutions to the one-dimensional linearized moisture flow equation for arbitrary input", Soil Sci. Soc., Vol.120, p.79-84, 1975.
12. 陳建謀, 黃漢誠, 陳主惠, 譚義績, 「線性入滲問題於不飽和有地下水位之解析解」, 中國農業工程學報, Vol. 44, No. 2, p.59-76, 1998。

六、誌謝

本研究承蒙國科會(計畫編號: NSC 89-2625-Z-002-017)補助研究經費, 在此特致謝忱。

收稿日期: 民國 88 年 12 月 20 日

接受日期: 民國 89 年 5 月 26 日