



自適應卡門濾波及其應用於洪水預報

The Adaptive Kalman Filter and Its Application to the Flood Forecasting

國立台灣大學農業工程學研究所教授
暨水工試驗所研究員

王 如 意

Ru-Yih Wang

國立台灣大學農業工程學研究所
博士班研究生

周 建 明

Chien-Ming Chou

摘 要

卡門濾波為一種即時校正模式，其可用以處理非穩定系統內之資訊，且根據推估誤差為最小之原則以決定最佳之濾波增益。一般濾波之方法係於系統模式中動態噪音及觀測噪音之統計特性為已知之情況下進行演算；惟在實際應用中，系統之動態噪音及觀測噪音之統計特性常不能完全確知。如此，無法得到最佳濾波之結果，並且有可能發生發散之情況。

為有效控制濾波發散及獲得最佳化之推估，本文應用自適應卡門濾波進行颱風期間流域逕流量之預測。首先建立卡門濾波與特殊最小平方迴歸問題之相等關係，再使用 M-穩健推估法求解此迴歸問題。M-穩健性推估子可在推估狀態變數之際，同時自適應地推估事先未知之動態及觀測噪音之統計性質。文中採用具外來投入自迴歸模式 (autoregressive model with exogenous input, 簡稱 ARX 模式) 模擬降雨—逕流之歷程。應用自適應卡門濾波於 ARX 模式，可以即時校正並更新系統之狀態，以從事洪水之模擬、推估及預報。

關鍵詞：自適應卡門濾波，穩健性推估，ARX 模式，洪水預報。

ABSTRACT

The Kalman filter is one of the real-time correction models. It can be used to handle the information in an unstable system, and to determine the optimal filtering gain based upon the criterion that minimum estimation error is presented in the recursive process. The conventional Kalman filter algorithm would be carried out when the statistical information of the system dynamic and measurement noise was known. In practice, there

is little or no prior knowledge of the system dynamic and measurement noise. In this case, the estimate results are not optimal and may lead to the divergence.

To control the divergence of the filter efficaciously and obtain the estimate optimally, an adaptive Kalman filter is applied for predicting the flow of rivers during flooding. The equivalence between the Kalman filter and a particular least squares regression problem is established and the regression problem is solved robustly using a statistical M-estimation approach. M-robust estimators are derived for adaptive estimation of the unknown a priori state and observation noise statistics simultaneously with the system state. The adopted rainfall-runoff model is the autoregressive model with exogenous input (ARX) model. The adaptive Kalman filter is added to the ARX model for real-time modifying and updating the system state so as to be applied in flood simulation, estimation and forecasting.

Keywords: Adaptive Kalman filter, Robust estimation, ARX model, Flood forecasting.

一、前言

水文系統可視為連結輸入與輸出之黑盒，如對其施加某種激動時，黑盒內部之狀態即發生變化，並在輸出端產生隨時間變化之水文量。為了掌握系統之特性，不僅要瞭解輸入與輸出之關係，並且要掌握系統內部狀態之變化，通常可採用狀態空間方法加以解析。在狀態空間方法中，代表系統內部隨時間變化之各種變數稱為系統之狀態變數。

符合狀態空間型式之系統，可採用線性卡門濾波理論以進行預測、校正及更新之遞迴演算。一般濾波之方法係於系統模式中動態噪音及觀測噪音之統計特性為已知之情況下進行演算；惟在實際應用中，系統之動態噪音及觀測噪音之統計特性常不能完全確知，而各自之協變異數矩陣亦不可能準確地求出，且模式在演算過程中，系統參數時常發生變化。如此，無法得到最佳化濾波之結果，並且有可能發生發散之情況。因此，必須根據系統新觀測之數據，對系統之模式及噪音統計特性進行修正，在重新推估之基礎上，保持最佳濾波或次佳濾波，此種抑制濾波發散之方法稱為自適應濾波(adaptive filter)。自適應系統最大之特點乃時變性與自行調整功能，即利用觀測數據進行遞推濾波之同時，能不斷地推估及修正

模式中之不精確或未知參數及噪音協變異數矩陣，從而降低模式之誤差，避免濾波發散，以提高濾波推估之精度。

本文嘗試以自適應卡門濾波套配 ARX 降雨—逕流模式，使其能不斷反應現階段狀態，隨時預測、校正並更新系統狀態，並抑制濾波發散，以求能穩定地從事洪水之模擬及預測。

二、M-穩健推估及自適應卡門濾波

(一) 一般情形下之線性離散卡門濾波理論

即時校正方法之重點，在於能即時地處理系統最新出現之預報誤差，以作為修正預報模式參數(或狀態)或預報輸出值之依據，從而使預報系統精確地接近實際觀測之狀況。卡門濾波理論乃根據誤差協變異矩陣為最小之原則，給予即時預報誤差一定之權重，並據以校正系統之狀態變數，進行即時校正預報。卡門濾波理論具有可以進行模式參數之即時最佳推估、可以同時評估系統狀態及預報精度、可分開處理系統動態噪音與觀測噪音及其可以處理非穩定系統等之優點。

線性離散系統之卡門濾波遞推方程式可表示如下^[3,6]：

系統動態方程式：

$$x_k = \Phi_{k,k-1} x_{k-1} + \Gamma_{k-1} w_{k-1}, \quad w_k \sim N(0, Q_k) \quad (1)$$

觀測方程式：

$$z_k = H_k x_k + v_k, \quad v_k \sim N(0, R_k) \quad \dots\dots\dots(2)$$

初始條件：

$$E[x_0] = \hat{x}_0, \quad E[\tilde{x}_0 \tilde{x}_0^T] = P_0$$

獨立性假設：

$$E[w_k v_j^T] = 0, \quad k \neq j$$

狀態推估值之預測：

$$\hat{x}_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1} \quad \dots\dots\dots(3)$$

誤差協變異數矩陣之預測：

$$P_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1} P_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T + \Gamma_{k-1} Q_{k-1} \Gamma_{k-1}^T \quad \dots\dots(4)$$

卡門增益矩陣：

$$K_k = P_{k/k-1} H_k^T [H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k]^{-1} \quad \dots\dots\dots(5)$$

狀態推估值之更新：

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k (z_k - H_k \hat{x}_{k/k-1}) \quad \dots\dots\dots(6)$$

誤差協變異數矩陣之更新：

$$P_k = [I - K_k H_k] P_{k/k-1} \quad \dots\dots\dots(7)$$

其中， x_k 及 z_k 分別表示 k 時刻之狀態變數及觀測變數； $\Phi_{k,k-1}$ 表示從 $k-1$ 至 k 時刻之轉移矩陣； H_k 表示 k 時刻之係數矩陣； w_k 及 v_k 分別表示 k 時刻系統動態方程式及觀測方程式之噪音。卡門濾波遞迴演算之示意圖，如圖 1 所示。

若令

$$\tilde{z}_{k/k-1} = z_k - H_k \hat{x}_{k/k-1} \quad \dots\dots\dots(8)$$

則由第(8)式給出之新序列 $\{\tilde{z}_{k/k-1}\}$ 為一高斯白色序列，其均值為零，變異數為：

$$P_{k/k-1} z = E[\tilde{z}_{k,k-1} \tilde{z}_{k,k-1}^T] H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k \quad (9)$$

第(3)~(9)式係在 Q_k 及 R_k 可確知之情況下所得到者。如 Q_k 及 R_k 不精確，則由第(6)式給出之 $\hat{x}_k$ 將不是 x_k 之最佳推估，且此時之濾波有可能發散。為補救上述情形，本研究茲提出自適

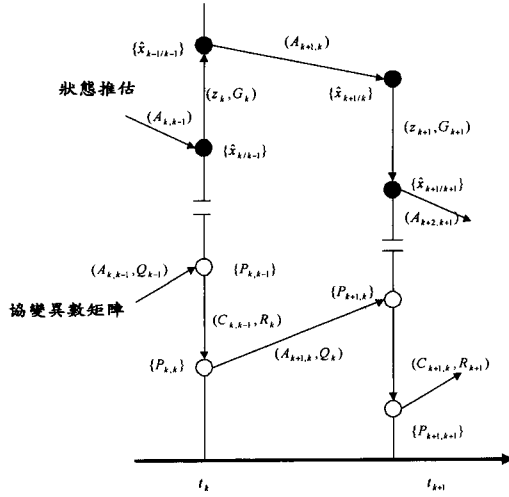


圖 1 卡門濾波遞迴演算示意圖

應濾波方式以從事水文預報。所謂自適應濾波，即利用觀測數據進行遞推濾波時，不斷地推估與修正模式中不精確或未知之參數及噪音變異數矩陣，進而降低模式誤差，抑制濾波發散，以提高濾波推估之精度。

(二) 卡門濾波及特殊線性最小平方迴歸問題之相等關係^[5]

卡門濾波可視為一種特殊權重最小平方問題之解，重寫第(1)~(2)式，可得：

$$\begin{bmatrix} I \\ H_k \end{bmatrix} x_k = \begin{bmatrix} \Phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1/k-1} \\ z_k \end{bmatrix} + E_k \quad \dots\dots\dots(10)$$

式中， I 為單位矩陣， E_k 為：

$$E_k = \begin{bmatrix} \Phi_{k,k-1} (x_{k-1} - \hat{x}_{k-1/k-1}) + \Gamma_{k-1} w_{k-1} \\ -v_k \end{bmatrix} \quad \dots\dots(11)$$

$$E\{E_k E_k^T\} = \begin{bmatrix} P_{k,k-1} & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix} = S_k S_k^T \quad \dots\dots\dots(12)$$

式中， $P_{k/k-1}$ 係由第(4)式求得，在第(12)式中 S_k 之解，可藉由 UD 分解或 Cholesky 分解方法求解之^[5]。將第(10)式乘上 S_k^{-1} ，可得：

$$Y_k = X_k \beta_k + \xi_k \quad \dots\dots\dots(13)$$

式中，

$$X_k = S_k^{-1} \begin{bmatrix} I \\ H_k \end{bmatrix}, \quad \xi_k = -S_k^{-1} E_k, \quad \beta_k = x_k,$$

$$Y_k = S_k^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_{k,k-1} \\ z_k \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(14)$$

第(13)式為標準線性最小平方遞迴問題之型式，其中 $E \begin{bmatrix} \xi_k \\ \xi_k^T \end{bmatrix} = I$ ，第(13)式之解為：

$$\hat{\beta}_k = (X_k^T X_k)^{-1} X_k^T Y_k \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$E \left\{ (\beta_k - \hat{\beta}_k)(\beta_k - \hat{\beta}_k)^T \right\} = (X_k^T X_k)^{-1} \quad \dots\dots\dots(16)$$

卡門濾波之遞迴演算過程第(3)~(7)式，實為第(13)及(14)式之解，即第(15)及(16)式，亦即：

$$\hat{\beta}_k = \hat{x}_{k/k} \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$P_{k/k} = \text{cov} \{ \hat{\beta}_k \} \quad \dots\dots\dots(18)$$

(三) 穩健化卡門濾波之 M-穩健性推估

穩健化 (robust) 如純粹以資料處理之說法為強壯、健康、堅韌的及能經受逆境之考驗。一般應用統計方法解決實際問題時，需先收集相關數據，此數據在統計上稱為觀測值或樣本。按照某種特定之統計方法，由所收集之數據計算各統計量之相關數值，並進行統計檢驗或推估等，因此，數據資料實為進行統計分析之憑藉。

然而，在獲得數據之過程中，時常會出現一些未被注意之意外情況。例如，試驗或生產條件之突然變化、測試儀表之某種故障、觀測人員之疏忽及記錄或抄寫中之筆誤，都會使數據中不可避免地包含有或多或少之反常數值，此即所謂之離群值 (outlier)。這些離群值，自然會不同程度地影響到統計量及統計推估之結果。有些統計方法對離群值相當敏感，個別離群值就會使統計量及統計推估之結果發生較大之變化，導致不合理甚至完全錯誤之結果。此統計方法，即屬於非

穩健化 (nonrobust)，無法適應複雜變化之實際情況^[4]。常用之卡門濾波即為一種非穩健化之統計方法^[5]。

從統計理論上而言，常用之統計方法，特別是參數方法，許多是在一定之假設模式下，按照某種原則（如無偏估與變異數最小原則及最大似似原則等等）為最佳，通常是假設觀測值為獨立分布之隨機樣本，已知其整體服從某個函數形式，但含有未知參數之分布函數（例如常態分布）。但任何隨機現象，都很難用一個簡單之數學模式準確地描述，因此，這類模式只能是實際問題之一種近似解答，只不過近似程度有好有壞而已。許多在假設模式正確時為最佳之方法，當實際情況與假設模式有出入時，即不再為最佳，甚至變得欠理想，此類方法當然也屬於非穩健性^[4]。

考慮上述穩健性觀念及卡門濾波遞迴演算第(3)~(7)式與線性迴歸解第(15)~(16)式之相等關係，卡門濾波問題可視為第(13)式之線性迴歸問題，並用有效穩健性之方式求解之，即用 M-推估加以處理。

任意之推估 T_n ，若可定義為以下最小化問題之型式^[7]：

$$\sum \rho(x_i - T_n) = \min \quad \dots\dots\dots(19)$$

或隱性方程式：

$$\sum \psi(x_i - T_n) = 0 \quad \dots\dots\dots(20)$$

則稱為 M-推估 (M-estimate)。其中， $\rho(\cdot)$ 為穩健分數函數 (robust score function)，其功用係用以切除離群值。 $\psi(\cdot) = \rho'(\cdot)$ 稱為影響函數 (influence function)。第(20)式可改寫成以下之方程式：

$$\sum w_i \cdot (x_i - T_n) = 0 \quad \dots\dots\dots(21)$$

其中， $w_i = \frac{\psi(x_i - T_n)}{x_i - T_n}$ ，此即將 T_n 表示成如下之權重平均：

$$T_n = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} \quad \dots\dots\dots(22)$$

而此權重係由樣本所決定。

定義下列之最小化問題^[5]：

$$\hat{\beta}_k = \arg \min_{\beta} J_n(\beta) \quad ,$$

$$J_n(\beta) = \sum_{i=1}^n \rho(y_{i_k} - x_{i_k}^T \beta) \quad \dots\dots\dots(23)$$

式中， y_{i_k} 為第(14)式 Y_k 中第 i 個元素， $x_{i_k}^T$ 為第(14)式 X_k 中第 i 列元素， n 為第(13)式中 Y_k 之維數。若選擇 $\rho(\cdot)$ 為二次函數 (quadratic function)，第(23)式之推估即為最小平方或卡門濾波遞迴解第(15)式。當噪音之機率密度函數 $p(\varepsilon)$ 為高斯分布時，此演算法為最佳。然而，由於某些離群值之存在，實際之噪音機率密度函數對大樣本而言不再是高斯分布，必須另行選擇 $\rho(\cdot)$ 。為達到穩健化之要求，選擇以下之 Huber's 分數函數^[7]：

$$\rho(x) = \begin{cases} c_0|x| - (c_0^2/2), & |x| \geq c_0 \\ x^2/2, & |x| < c_0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(24)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} c_0 \operatorname{sign}(x), & |x| \geq c_0 \\ x & |x| < c_0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(25)$$

其中， c_0 值之選擇必須在高斯模式中給予所需之效率。對 $\hat{\beta}_k$ 中各元素 ($\hat{\beta}_{j_k}$ ， $j=1, \dots, p$) 取一階偏導數並令其為 0，此相當於求解如下 p 個方程式：

$$\sum_{i=1}^n x_{ij_k} \psi(y_{i_k} - x_{i_k}^T \hat{\beta}) = 0, \quad j=1, \dots, p \quad \dots\dots(26)$$

式中， x_{ij_k} 為 X_k 中第 i 列第 j 行之元素，因為 $\psi(\cdot)$ 為非線性之函數，因此上式之求解將變成頗為繁複。然而，其可以表示成如下權重最小平方之近似：

$$\sum_{i=1}^n x_{ij_k} \omega_{i_{k-1}} (y_{i_k} - x_{i_k}^T \hat{\beta}) \approx 0 \quad \dots\dots\dots(27)$$

式中，權重 $\omega_{i_{k-1}}$ 為：

$$\omega_{i_{k-1}} = \begin{cases} \Psi(y_{i_k} - x_{i_k}^T \hat{\beta}_{k-1}) \cdot (y_{i_k} - x_{i_k}^T \hat{\beta}_{k-1})^{-1}, & y_{i_k} \neq x_{i_k}^T \hat{\beta}_{k-1} \\ 1, & y_{i_k} = x_{i_k}^T \hat{\beta}_{k-1} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(28)$$

上式之解為：

$$\hat{\beta}_k = (X_k^T \Omega_{k-1} X_k)^{-1} X_k^T \Omega_{k-1} Y_k \quad \dots\dots\dots(29)$$

式中， $\Omega_{k-1} = \operatorname{diag}\{\omega_{1_{k-1}}, \dots, \omega_{n_{k-1}}\}$ ， $\operatorname{diag}(\cdot)$ 為對角矩陣。

基於第(24)式之 Huber's 穩健損失函數，卡門濾波遞迴演算中第(6)式可用第(29)式之隱性更新函數取代之。

(四) 自適應卡門濾波之噪音統計推估^[5]

應用卡門濾波時，需事先知瞭動態及觀測噪音之第一及二階動差(moments)，然而，由於模式模擬誤差及觀測序列存在離群值之緣故，狀態及觀測過程之序率擾動特性並無法預先獲知其統計特性。因此，進行狀態推估之際，需自適應地推估動態及觀測噪音之統計特性。

對於觀測噪音之統計性質而言，考慮第(2)式之觀測方程式。因為真實之狀態未知，所以無法從第(2)式決定 $v(\cdot)$ ，但可以直覺地以下列之 r_i 來近似 v_i ：

$$r_i = z_i - H_{i,i-1} \hat{x}_{i/i-1}, \quad i = k - N + 1, \dots, k \quad \dots\dots(30)$$

式中， r_i 定義為觀測噪音樣本。若對於 $i = k - N + 1, \dots, k$ 而言， r_i 假設為獨立及相同分布 (independent and identically distributed，簡稱 i.i.d.) 條件，則可建構簡單之參數推估問題。從資料 r_i ($i = k - N + 1, \dots, k$) 所構成之樣本空間 Ω_r 中定義一隨機變數 R ，基於經驗之觀測值， R 未知分布之平均值 $\bar{r}_k$ 及變異數 C_{r_k} 可推估之。但不巧地，對於離群值而言，卡門濾波演算法中樣本平均值及樣本變異數缺乏穩健性。所以，可以採用未知分布參數位置之 M-推估，以替代樣本平均值。類似第(26)式， $\bar{r}_k$ 之 M-穩健推估 $\hat{r}_k$ 可定義為：

$$\sum_{i=k-N+1}^k \psi\left(\frac{r_i - \hat{r}_k}{\hat{d}_k}\right) = 0 \quad \dots\dots\dots(31)$$

式中， $\psi(\cdot) = \rho'(\cdot)$ 對應於第(24)式中 Huber 之非線性。 $\hat{d}_k$ 為資料 $\{r_i\}$ 尺度之推估。合適之穩健性統計 $\hat{d}$ 可用下式表示：

$$\hat{d}_k = \text{median} \left[\frac{|r_i - \text{median} r_i|}{0.6745} \right], \quad i = k - N + 1, \dots, k \quad (32)$$

若 N 足夠大且樣本真正由常態分布產生，則 $\hat{d} \approx C_r^{1/2}$ ，所以分母取 0.6745。選擇 $\hat{d}$ 之特別機制可建議調節常數(tuning constant) c_0 之合適值，因為 $\hat{d}$ 接近標準偏差，所以 c_0 通常近似地取為 1.5。當 $c_0 = 1.5$ ，此程序可參照(1.5)-Huber M-推估子。推估方程式第(31)式為非線性，可用類似第(29)式之迭代程序或某型式權重最小平方求解之。

觀測噪音變異數 C_r 之穩健性推估至少有兩個可能之方法。其一為選擇 $\hat{C}_r = \hat{d}^2$ ，然而，有兩點需加以注意，第一點是雖然第(32)式中 $\hat{d}$ 為穩健性，但其證明比其他變異數之穩健性推估更無效^[5]；第二點為 $\hat{d}$ 在計算 $\bar{r}$ 之過程中為妨礙之參數，且在本文中有效地出現並不像資料變異數推估般之重要，計算卡門濾波增益矩陣時，需用到後者。更有效之資料變異數推估子必須建立在第(31)式位置 M-推估之通用變異數公式之上。當 $\hat{d} = C_r^{1/2}$ 時，此公式變成：

$$V = \lim_{N \rightarrow \infty} E\{N(\hat{r} - \bar{r})^2\} = \frac{C_r E \left\{ \psi^2 \left[\frac{r_i - \bar{r}}{C_r^{1/2}} \right] \right\}}{E^2 \left\{ \psi' \left[\frac{r_i - \bar{r}}{C_r^{1/2}} \right] \right\}} \quad (33)$$

第(33)式中 V 之推估為：

$$\hat{V}_k = \frac{\hat{d}_k^2 \left\{ (1/N) \sum_{i=k-N+1}^k \psi^2[(r_i - \hat{r}_k)/\hat{d}_k] \right\}}{\left\{ (1/N) \sum_{i=k-N+1}^k \psi'[(r_i - \hat{r}_k)/\hat{d}_k] \right\}^2} \quad (34)$$

$\hat{V}_k$ 可視為 C_{r_k} 之合理推估。所以，給定推估值 $\hat{r}_k$ 及 $\hat{C}_{r_k}$ ，從第(2)式及第(30)式，可以推估

觀測噪音之第一階及第二階動差 $\bar{v}_k$ 及 R_k 為：

$$\hat{\bar{v}}_k = \hat{r}_k \quad (35)$$

$$\hat{R}_k = \hat{C}_{r_k} - H_{k,k-1} P_{k,k} H_{k,k-1}^T \quad (36)$$

同樣地，對於動態噪音之統計性質，考慮在時刻 $t_k = kT$ 之動態狀態關係第(1)式，真實之狀態 x_k 及 x_{k-1} 未知，無法決定 w_{k-1} ，但 w_{k-1} 可近似為：

$$q_k = [C_{k,k-1}^T C_{k,k-1}]^{-1} C_{k,k-1}^T (\hat{x}_{k,k} - A_{k,k-1} \hat{x}_{k-1,k-1}) \quad (37)$$

式中， q_k 定義為在時刻 t_k 之動態噪音樣本。若 q_k 假設為 w_k 之代表，可考慮其為 i.i.d.。再次定義簡單之參數推估問題，從資料 $\{q_i\}$ ($i = k - N + 1, \dots, k$) 所構成之樣本空間 Ω_q 中定義一隨機變數 Q 。基於這些觀測值， Q 未知分布之平均值 $\bar{q}_k$ 及變異數 C_{q_k} 可推估之。遵循推估觀測噪音中所採用之步驟， $\bar{q}_k$ 之無偏穩健推估 $\hat{q}_k$ 可由類似第(31)式求解之，其中 r_i 及 $\hat{r}_k$ 分別由 q_i 及 $\hat{q}_k$ 取代之。此外，當 r_i 及 $\hat{r}_k$ 分別由 q_i 及 $\hat{q}_k$ 取代時，第(34)式表示 C_{q_k} 之合理穩健推估 $\hat{C}_{q_k}$ 。再者，經由第(1)式及第(37)式，可得到動態噪音之第一階及第二階動差 $\bar{w}_k$ 及 Q_k 之推估值：

$$\hat{\bar{w}}_k = \hat{q}_k \quad (38)$$

$$\hat{Q}_k = \hat{C}_{q_k} - [C_{k,k-1}^T C_{k,k-1}]^{-1} C_{k,k-1}^T [A_{k,k-1} P_{k-1,k-1} H_{k,k-1}^T] \quad (39)$$

總而言之，噪音過程之第一階及第二階動差推估子，係建立在時刻 t_k 由第(29)式 M-穩健濾波所產生之最後 N 個狀態及觀測噪音樣本。此程序需要某些正確地儲存及噪音樣本之位序運算。很明顯地，噪音變異數推估子在數值應用上可能變成負值，特別是在剛開始之步驟，因此，上述數值總是設定為推估值之絕對值。自適應卡門濾波之演算流程圖，如圖 2 所示。

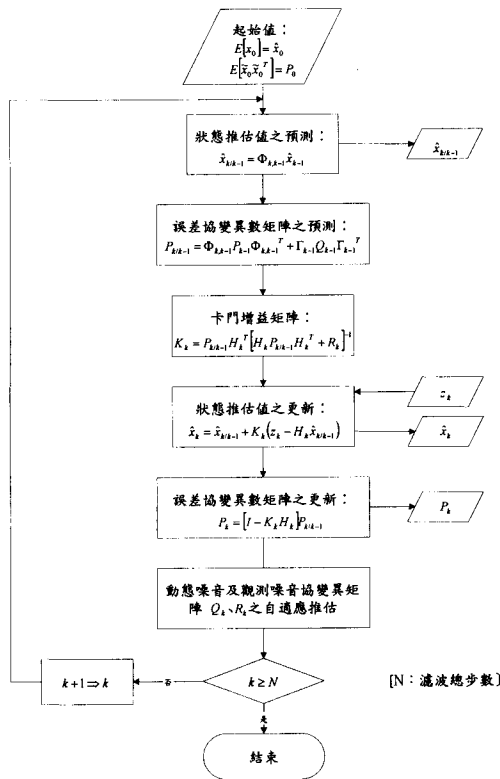


圖 2 自適應卡門濾波之演算流程圖

三、自適應卡門濾波理論之應用

應用卡門濾波理論最大困難在於系統模式之建立。探討有關降雨—逕流關係之模式頗多，但並非所有之模式皆可轉換為適當之型式以應用卡門濾波理論。本文係將自適應卡門濾波應用於 ARX 模式，使得相關參數具有時變性，以期系統模式更能符合降雨與逕流間關係之推估。

流域之洪水預報模式，可用 ARX 模式表示之^[11]。利用 Akaike 氏資訊標準 (Akaike information criterion, 簡稱 AIC)，可檢定模式之最佳階次，即取檢定中 AIC 值最小者，為模式最適合之階次。經 SAS/ETS 軟體分析基隆河流域五堵上游集水區民國 63 年至 80 年間 13 場颱風洪資料，得到最佳階次如第(40)式所示，其係數 (a_1, a_2, a_3, a_4) 為 (1.3303, -0.6132, 0.2396, -0.0554)，(b_1, b_2, b_3, b_4) 為 (0.0279, 0.0322,

0.0293, 0.0136)。逕流量以 ARX 模式表示如下：

$$q_t = a_1 q_{t-1} + a_2 q_{t-2} + a_3 q_{t-3} + a_4 q_{t-4} + b_1 p_{t-1} + b_2 p_{t-2} + b_3 p_{t-3} + b_4 p_{t-4} + w_{1,t} \quad (40)$$

式中， q_t 為第 t 時刻之逕流量， p_t 為第 t 時刻之降雨量， a_i 及 b_i ($i=1, \dots, 4$) 分別為逕流量及降雨量所對應之係數。

應用自適應卡門濾波於 ARX 模式，係選取狀態向量為：

$$X_t = [q_t \ q_{t-1} \ q_{t-2} \ q_{t-3} \ p_t \ p_{t-1} \ p_{t-2} \ p_{t-3}]^T \quad (41)$$

狀態方程式與觀測方程式分別如第(42)式及第(43)式所示：

$$X_t = \begin{bmatrix} q_t \\ q_{t-1} \\ q_{t-2} \\ q_{t-3} \\ p_t \\ p_{t-1} \\ p_{t-2} \\ p_{t-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_t \\ q_{t-1} \\ q_{t-2} \\ q_{t-3} \\ p_t \\ p_{t-1} \\ p_{t-2} \\ p_{t-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w_t \quad (42)$$

$$Z_t = [q_t] = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} q_t \\ q_{t-1} \\ q_{t-2} \\ q_{t-3} \\ p_t \\ p_{t-1} \\ p_{t-2} \\ p_{t-3} \end{bmatrix} + [v_t] \quad (43)$$

應用自適應濾波進行洪水預報之演算流程中，狀態推估之更新值 $\hat{x}_{k/k}$ 係利用第(29)式之穩健推估值 $\hat{\beta}_k$ 取代之，致使自適應卡門濾波具有穩健化之性質。基於此更新後之狀態推估值，可進行下一時刻之狀態預測，即可預報下一時刻之逕流量。另外，於推估狀態變數之際，同時利用

表 1 颱洪事件之模式驗證結果

時間	颱洪事件中文名稱	颱洪事件英文名稱	降雨延時	逕流延時	體積誤差百分比 VER (%)	效率係數 CE	相關係數 COR	洪峰流量誤差百分比 EQP(%)	洪峰流量到達時刻誤差 ETP(hr)
801029	露絲	Ruth	11	24	-5.950	0.907	0.956	-5.550	-1
810922	泰德	Ted	18	36	20.010	0.745	0.951	-39.440	-1
830807	道格	Doug	27	48	11.770	0.681	0.840	-15.960	-1
830820	弗雷特	Fread	24	48	3.380	0.802	0.911	14.220	-1
830901	葛拉絲	Gladys	16	38	0.120	0.877	0.954	9.160	-1
831009	席斯	Seth	45	72	0.130	0.947	0.974	2.480	-1
850731	賀伯	Herb	15	45	-3.420	0.973	0.989	-5.260	-1
850927	薩恩	Zane	24	48	5.730	0.810	0.924	15.230	-1
860817	溫妮	Winner	24	48	-4.660	0.966	0.987	-7.000	0
860829	安珀	Amber	24	48	4.010	0.947	0.977	5.820	0

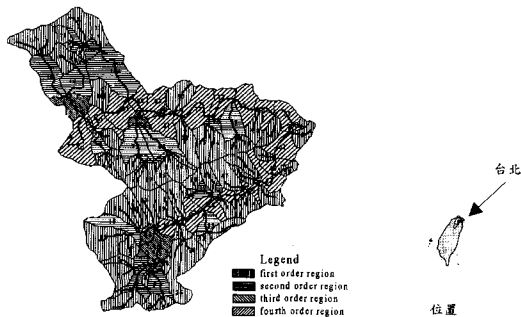


圖 3 基隆河流域五堵上游集水區流域概況圖

第(36)式及(39)式推估觀測噪音及動態噪音之協變異矩陣 R_k 及 Q_k ，以解決一般假設觀測噪音及動態噪音之協變異矩陣為固定常數值之缺點，達到利用降雨及逕流之觀測資料即可自適應地進行即時洪水預報之要求。

為確定自適應卡門濾波理論套配 ARX 模式應用於研析地區之合適性，本文選擇如圖 3 所示之基隆河流域五堵上游集水區，自民國 80 年至民國 86 年間 10 場颱洪事件進行驗證分析。各研析颱洪事件逐時平均雨量之最佳估計值，係經基流分離及採用 Φ 入滲指數扣除降雨損失等程序後，並採用徐昇氏多邊形法推求流域內之平均降雨量，而得有效平均降雨量與直接逕流量為模式之單輸入—單輸出量。基隆河流域五堵上游集水區面積為 192.83 平方公里，計算流域平均降雨量

採用五堵及坪林兩個雨量站，其所佔控制面積權重分別為 0.9027 及 0.0973^[2]。為探討模式之適用性，本文分別以體積誤差百分比(volume error ratio, VER)、效率係數(coefficient of efficiency, CE)、洪峰流量誤差(error of peak discharge, EQP)及洪峰到達時刻(error of time to peak, ETP)等為校驗標準，以校驗模式之精確性。

四、結果與討論

自適應卡門濾波應用於 ARX 模式，其研析颱洪事件之分析結果，如表 1 所示，並選其代表示如圖 4 及圖 5。由分析結果顯示，其體積誤差百分比除泰德及道格颱洪不盡理想外，其餘均在正負 6%之內；效率係數除泰德及道格颱洪外，其餘均在 0.8 以上；洪峰流量誤差百分比除泰德颱洪外，均在 16%以內；洪峰流量到達時刻則均不超過 1 小時。

以自適應卡門濾波套配 ARX 模式，其結果顯示自適應卡門濾波較假設固定噪音統計性質之傳統卡門濾波，較無震盪之情形產生，亦即能較穩定地進行推估。尤其在逕流量較大之情況，如圖 4 溫妮颱洪及圖 5 安珀颱洪，預測流量歷線圖之震盪差異更為明顯。

卡門濾波之演算乃在即時校正系統狀態變數，以期系統狀態推估為最小，從事水文演算時

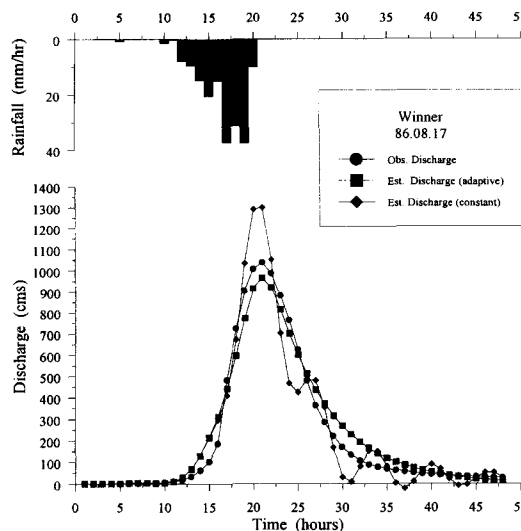


圖 4 溫妮颱風之預測流量歷線圖

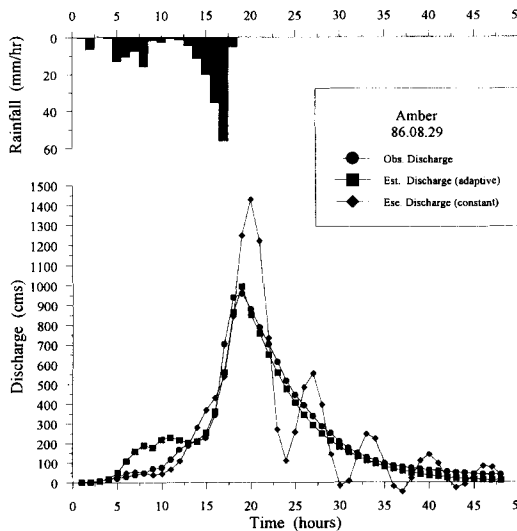


圖 5 安珀颱風之預測流量歷線圖

必須注意動態及觀測噪音變異數之選擇。如其值過大，即系統之變異數大，如此則演算結果震盪幅度大；選擇過小之數值，則其演算與定率模式相似而失去序率特性。應用自適應卡門濾波，進行狀態推估之際，可自適應地推估動態及觀測噪音之統計特性，以解決上述之問題。

以 ARX 線性模式來描述高度非線性之降雨—逕流過程，有其本質上之限制，因此仍需進一步之修正以獲得更佳之預測性能。另外，由於本模式未考慮暴雨移動之影響及所使用資料之時間與空間尺度，如能考量以上二個因素，將可改善預測之結果。

一般所採用之觀測流量資料為水位而非水深或流量，水位資料經由率定曲線(rating curve)始可換算成流量資料；但由於河道每年之沖淤情形不同，對於率定曲線會產生差異，使得換算而得之觀測流量存在較大誤差，因此即時校正模式無法正確地發揮其功效。

洪峰流量有存在某一時刻稽延(one time lag)之情況，一般洪水預測亦有往後若干時刻稽延之特性。卡門濾波係利用即時之觀測流量資料，據以校正、更新並預測下一時刻之推估流量，因此亦容易產生往後遲延某一時距之情形。解決上述方法，可採用較小時距之觀測資料，而採用較大

時距之預測推估資料，如此可以減少上述情形所產生之誤差。

一般應用統計方法解決實際問題時，需先收集相關數據，然而，在獲得數據之過程中，時常會出現所謂之離群值。在實際應用中，一般是按照一定之規則剔除離群值，再採用傳統方法處理剩下之數據。但除少數簡單之情況外，離群值不易判斷，更難予剔除；再者，剔除離群值不能單純靠統計方法，還應該有更可靠之實際根據；況且即使在離群值被剔除之後，亦難保證假設模式之準確性。卡門濾波對離群值相當敏感，個別離群值就會使統計量及統計推估之結果發生較大之變化，導致濾波發散不合理甚至完全錯誤之結果。為抑制離群值對統計量及統計推估結果之影響，可於濾波演算過程中加入穩健推估之觀念。穩健推估在實際數據資料與假設模式差別較小時，其性能變化也較小；在實際情況偏離假設模式太大時，也不會變成很差，而造成較大之推估誤差。

五、結 論

將水文系統視為一隨機系統，並同時於模式推估狀態變數時自適應地推估動態及觀測噪音統計性質之研析流程，可提供作為研析水文系統

中降雨—逕流歷程之另一可行途徑。

比較自適應卡門濾波及一般卡門濾波套配 ARX 之結果可知，自適應卡門濾波套配 ARX 模式應用於研析地區之結果，較假設噪音統計特性為固定常數之一般卡門濾波為穩定。此可說明由於進行濾波演算之前並無法獲知噪音之統計性質，加入自適應濾波之考量，可利用觀測數據進行遞推濾波時，不斷地推估與修正模式中不精確或未知之噪音變異數矩陣，不僅可降低模式誤差，並可抑制濾波發散，以提高濾波推估之精度。

本文採用自適應卡門濾波套配 ARX 模式以進行降雨—逕流之模擬演算，藉由預測、校正及更新之迭代流程，可使其能不斷反應出現階段之狀態，配合雨量及流量觀測值隨時修正系統參數，據以進行短延時流量之預測，以提供即時洪水預測之應用。

任何隨機現象，常不易採用一個簡單之數學模式準確地描述其中之奧妙，因此，這類模式常是實際問題之一種近似解答。許多在假設模式正確時為最佳之方法，當實際情況與假設模式有出入時，即不再為最佳化，甚至變得效果相當低拙，此類方法當然也屬於不穩健性。應用穩健性自適應卡門濾波於 ARX 降雨—逕流模式，可以抑制離群值對統計量及統計推估之結果產生劇

烈之變化，避免導致不合理甚至完全錯誤之結果，較易於適應複雜變化之實際情況。

參考文獻

1. 文康、金管生、李蝶娟、李琪：地表逕流過程的數學模擬，大陸水利電力出版社，1990。
2. 王如意、許銘熙等：「台北防洪整體檢討計畫(三)」，經濟部水資源局委託研究計畫報告，國立台灣大學農業工程學研究所，1998。
3. 宋文堯、張牙：卡爾曼濾波，大陸科學出版社，1991。
4. 劉國歲：隨機信號理論與應用，大陸兵器工業出版社，1992。
5. Durovic, Z. M. and Kovacevic, B. D., "Robust Estimation with Unknown Noise Statistics," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 44, pp. 1292-1296, 1999.
6. Grewal, M. S. and Andrews, A. P., Kalman Filter - Theory and Practice, Prentice Hall, New Jersey, 1993.
7. Huber, P. J., Robust Statistics, John Wiley, New York, 1973.

收稿日期：民國 89 年 8 月 10 日

接受日期：民國 89 年 9 月 8 日