

Kirchoff 積分轉換解析非均勻降雨強度下 有地下水位之一維入滲問題

Analytical Solution of One Dimensional Infiltration Problem Under Condition of Non-uniform Rainfall Intensity and with Groundwater Table Using Kirchoff Integral Transformation

私立中國工商專科學校土木工程科副教授

陳 主 惠

Chu-Hui Chen

摘 要

本文以理查(Richards)方程式為控制方程式，考慮有地下水位之情形下，基於假設母體通量與體積含水比成線性比例及土壤水力傳導係數與張力水頭之關係為指數分佈之前題下，利用函數轉換之方式求解理查(Richards)方程式，可求出變化之降雨強度及任意起始條件下，土壤體積含水比剖面之解析解，同時可預測達積水所需之時間。而前人所探討之解析解均以簡化之均勻降雨強度之邊界條件以及均勻分佈之土壤體積含水比剖面的起始條件考量下求解，與實際狀況較不吻合，本文所推導之解析解可應用於預測積水前後之土壤體積含水比分佈，以砂土為例，可模擬降雨強度與時間之分佈呈類似常態分佈，與實際降雨特性較接近，可提供較複雜數值模式之驗證。

關鍵詞： Kirchoff 積分轉換，張力水頭，母體通量。

ABSTRACT

This paper is based on two assumptions. One is the linear relationship between matric flux potential and soil water content, the other is the exponential relationship between hydraulic conductivity and water head. One-dimensional infiltration problem of unsaturated soil with groundwater level is considered. The technique of function transformation is applied to solve Richards's equation under the condition of varying

distribution of rainfall intensity and arbitrary initial water content. Previous studies of analytical solutions assumed uniform distribution of rainfall intensity might not come close to real rainfall condition. The analytical solution of this paper can predict ponding time and obtain the solution of soil water content distribution before and after ponding. The distribution of rainfall intensity is similar to normal distribution, which close to the real rainfall distribution. Also, solutions of this paper can be used to verify some complicated numerical models.

Keywords: Kirchoff integral transformation, Water head, Matric flux potential.

一、前言

入滲問題解析解之求解大多利用 Richards equation 為控制方程式，但由於控制方程式中存在非線性項，因此考慮簡化之邊界條件及起始條件或將控制方程式線性化求解，如 Philips [1957] 利用 Boltzmann transformation 解 Richards equation，Eagleson [1970] 由 Richards equation 解出與經驗公式 Horton's equation [1940] 相近之入滲公式；Dale [1987] 亦求出 Richards equation 的近似解；Guido [1996] 採用與 Philips 相似之推導方式，利用時間變數作轉換(transform) 求出均佈降雨下級數型式之解析解；Serrano [1998] 亦求出均佈降雨下級數型式之解析解，上列之解均只考慮降雨強度為常數之情形下，但實際降雨狀況降雨強度則是隨時間變化的，因此 Warrick [1975] 將控制方程式線性化，假設 Diffusivity 及水力傳導係數之導數為常數下解得任意降雨輸入之解析解；Morel-Seytoux [1978, 1981] 不以 Richards equation 為控制方程式而以 Green and Ampt [1911] 的入滲方程式為基礎，自行推導控制方程式，雖可求解降雨強度變化為片段連續如降雨組體圖之解析解，但仍需結合數值方法求解。本文所推導之解析解則以 Richards equation 為控制方程式考慮連續變化降雨強度下之邊界條件，使所求之解析解與實際降雨狀況更加吻合。

本文利用理查方程式為控制方程式，利用 Kirchoff 積分轉換(Gardner, 1974)，定義母體通量 $\phi(\psi)$ 將非線性之控制方程式轉換成線性之控制

方程式，假設母體通量 $\phi(\psi)$ 與體積含水比 θ 之變化關係為線性以及土壤水力傳導係數 k 與水頭 ψ 之關係滿足 Genuchten [1980] 所提出之指數分佈之假設，最後可將控制方程式轉換成擴散方程式之型式而使問題容易求解。陳建謀等 [1999] 利用相似之方法已求出無地下水位時之解析解，本文可求出有地下水位時，不均勻分佈之降雨強度及穩態解之臨前水文條件下，積水前後之體積含水比變化剖面並可預測其產生積水所需之時間(ponding time)。

二、入滲問題數學模式

2.1 微分方程式求解方法

本文之求解方式將問題分成兩個時段進行求解，即降雨時未產生積水前 ($t \leq t_p$) 及產生積水後 ($t \geq t_p$) 兩個時段進行求解，同時為了求解非線性之理查方程式，本文利用 Kirchoff 積分轉換(Gardner, 1974)，可將非線性之理查方程式轉換成線性的擴散方程式(Diffusion equation)之型式，亦即透過函數轉換方式，將理查方程式之體積含水比函數 $\theta(z, t)$ 轉換成擴散方程式型式之函數 $W(z, t)$ ，由於擴散方程式較容易求解，因此求得 $W(z, t)$ 之解後，透過函數轉換即可求得函數 $\theta(z, t)$ 之解，今將其一維有限區間入滲問題示意圖如圖 2.1 所示及其求解之流程圖如圖 2.2 及圖 2.3 所示。

圖 2.2 中水頭 θ 表體積含水比(水體積/土體總體積)， θ_r 表殘存體積含水比， t 表時間， z 表向地表下之方向為正， ψ 表張力水頭， k 表

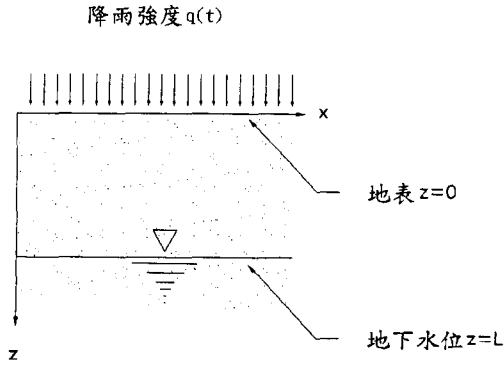


圖 2.1 一維有限區間入滲問題示意圖

水力傳導係數， $q(t)$ 表示降雨強度隨時間變化之函數， \bar{q}, A, B 為常數， α 表土壤孔隙分佈參數。圖 2.3 中 $\bar{t} = t - tp$ ，其詳細之推導過程詳見如下數節。基本上函數 $\theta(z, t)$ 與 $W(z, t)$ 間之關係從數學式來看則僅呈現一函數轉換之關係，但若從物理意義來看則可將 $\theta(z, t)$ 與 $W(z, t)$ 視為兩個不同的物理面，而 $\theta(z, t)$ 與 $W(z, t)$ 之差異則在於 $W(z, t)$ 乃將入滲時重力項之影響忽略不予考慮，此可由理查方程式中若忽略重力之影響後理查方程式可退化為擴散方程式得知。

2.2 控制方程式及假設

一維理查方程式可寫成如下的型式：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial k}{\partial z} \dots \dots \dots (2.1)$$

(2.1)式為非線性之微分方程式，直接求解較為困難，為了將非線性之控制方程式轉換成線性，使問題易於求解，假設土壤為均質，採用 Kirchoff 積分轉換(Gardner,1974)，定義母體通量(matric flux potential) $\phi(\psi)$ 為：

$$\phi(\psi) = \int_{-\infty}^{\psi} k(\psi) d\psi \dots \dots \dots (2.2)$$

土壤水力傳導係數 k 與張力水頭 ψ 之關係採用 Gardner(1958)所提出之指數分佈

$$k(\psi) = k_s e^{\alpha \psi} \dots \dots \dots (2.3)$$

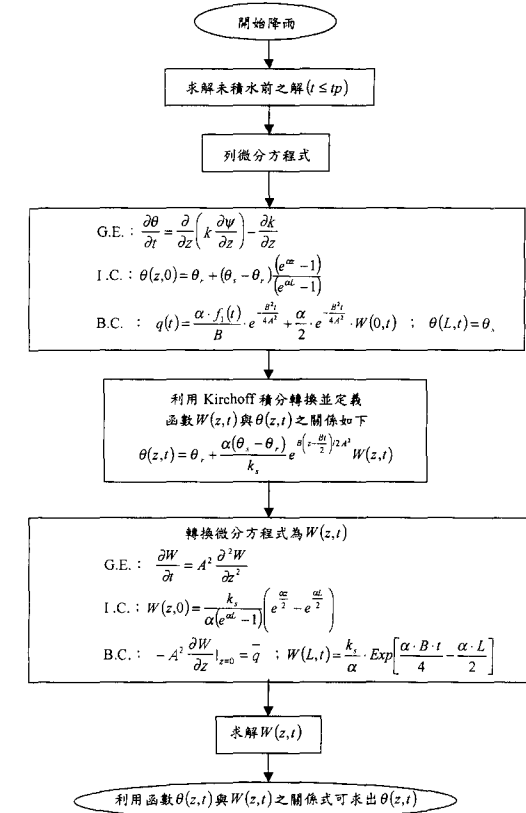


圖 2.2 積水前求解之流程圖

上式中 k_s 表飽和之水力傳導係數， α 表土壤孔隙分佈參數

將(2.3)式代入(2.2)式可得

$$\phi(\psi) = \int_{-\infty}^{\psi} k_s e^{\alpha \psi} d\psi = \frac{k_s e^{\alpha \psi}}{\alpha} = \frac{k(\psi)}{\alpha} \dots \dots \dots (2.4)$$

由上式可得

$$k(\psi) = \alpha \phi(\psi) \dots \dots \dots (2.5)$$

(2.4)式對 z 微分可得

$$\frac{\partial \phi(\psi)}{\partial z} = k(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \dots \dots \dots (2.6)$$

將(2.4)式及(2.6)式代入(2.1)式得

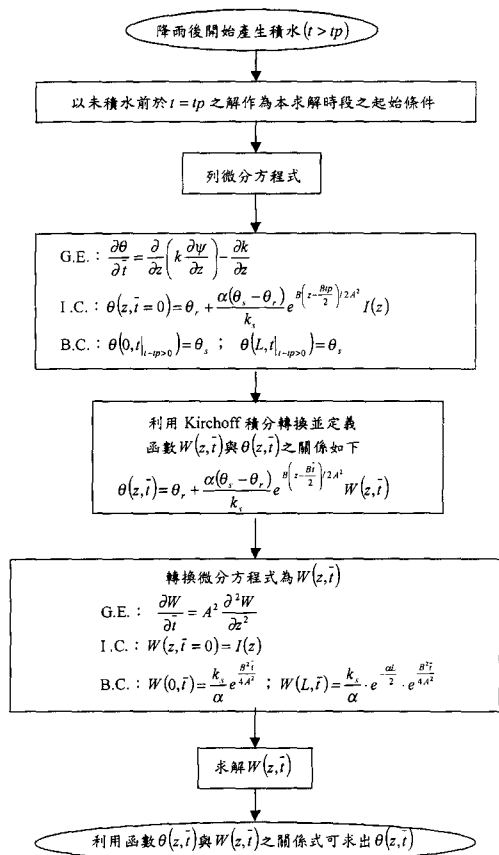


圖 2.3 地表飽和後求解之流程圖

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial z} \dots\dots\dots(2.7)$$

假設 $\frac{\partial \theta}{\partial \phi} = \frac{\alpha}{B} \dots\dots\dots(2.8)$

將(2.8)代入(2.7)得

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{B}{\alpha} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - B \frac{\partial \phi}{\partial z} \dots\dots\dots(2.9)$$

令 $A^2 = \frac{B}{\alpha}$ 則(2.9)可表為

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = A^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - B \frac{\partial \phi}{\partial z} \dots\dots\dots(2.10)$$

再令 $\phi(z, t) = e^{\beta \left(z - \frac{Bt}{2} \right)^2 A^2} W(z, t) \dots\dots\dots(2.11)$

將(2.11)代入(2.10)可得

$$\frac{\partial W}{\partial t} = A^2 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \dots\dots\dots(2.12)$$

上式為擴散方程式，數學上較容易求解，因此若是將實際入滲問題對應之起始條件及邊界條件亦轉換為 $W(z, t)$ 型式下對應之起始條件及邊界條件，則吾人可於求得 $W(z, t)$ 之解後，只須將 $W(z, t)$ 轉換成 $\theta(z, t)$ ，便可輕易地求得 $\theta(z, t)$ 之解析解；由於積水前後之控制方程式並無不同，但積水前後之起始條件及邊界條件則不一樣，因此其轉換則分積水前及積水後與其通解一併推導如下。

2.3 推導 $\theta(z, t)$ 與 $W(z, t)$ 間之轉換關係式

對(2.8)式積分，並由邊界條件：

當 $\psi \rightarrow -\infty$ 時， $\theta = \theta_r$ (θ_r 表殘存體積含水比)，以及
 當 $\psi \rightarrow 0$ 時， $\theta = \theta_s$ (θ_s 表飽和體積含水比)，可得

$$\theta = (\theta_s - \theta_r) e^{\alpha \psi} + \theta_r \dots\dots\dots(2.13)$$

又由(2.4)式及(2.11)式可得

$$\phi(z, t) = e^{\beta \left(z - \frac{Bt}{2} \right)^2 A^2} W(z, t) = \frac{k_s}{\alpha} e^{\alpha \psi} \dots\dots\dots(2.14)$$

將(2.13)式代入(2.14)式可得

$$\theta(z, t) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} e^{\beta \left(z - \frac{Bt}{2} \right)^2 A^2} W(z, t) \dots\dots\dots(2.15)$$

上式為 $\theta(z, t)$ 與 $W(z, t)$ 間之轉換關係式。

2.4 推導積水產生前之解

考慮一維之入滲問題如圖 2.1 所示，求解採用逆轉換方式，先求解(2.12)式之微分方程組，利用 $W(z, t)$ 之解及 $W(z, t)$ 與 $\theta(z, t)$ 之關係式，將 $W(z, t)$ 之解轉換為 $\theta(z, t)$ 之解。若考慮 $W(z, t)$ 之微分方程組如下：

G.E. $\frac{\partial W}{\partial t} = A^2 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, 0 \leq z \leq L$ (2.16)

G.E.: $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial k}{\partial z}$ (2.23)

I.C. $W(z,0) = g(z)$ (2.17)

I.C.: $\theta(z,0) = H(z)$ (2.24)

B.C. $-A^2 \frac{\partial W}{\partial z} |_{z=0} = \bar{q}$ (2.18)

B.C.: $q(t) = \frac{\alpha \cdot f_1(t)}{B} \cdot e^{-\frac{B^2 t}{4A^2}} + \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-\frac{B^2 t}{4A^2}} \cdot W(0,t)$ (2.25)

$W(L,t) = f_1(t)$ (2.19)

$\theta(L,t) = \theta_s$ (2.26)

上式中

$g(z) = \frac{k_s}{\alpha(e^{\alpha L} - 1)} \left(e^{\frac{\alpha}{2} z} - e^{-\frac{\alpha}{2} z} \right)$ (2.20)

$H(z) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \frac{(e^{\alpha z} - 1)}{(e^{\alpha L} - 1)}$ (2.27)

$f_1(t) = \frac{k_s}{\alpha} \cdot \text{Exp} \left[\frac{\alpha \cdot B \cdot t}{4} - \frac{\alpha \cdot L}{2} \right]$ (2.21)

上式中 $H(z) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \frac{(e^{\alpha z} - 1)}{(e^{\alpha L} - 1)}$ 表穩態解之起始條件。

上列(2.16)~(2.19)式利用 Duhamel's Theory [Ozisik,1979]可解得之結果如下：

今將起始條件及邊界條件轉換之過程推導如下：

$$W(z,t) = \frac{k_s \left(e^{\frac{\alpha}{2} z} - e^{-\frac{\alpha}{2} z} \right)}{\alpha(e^{\alpha L} - 1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (a_n - b_n) \cdot e^{-A^2 \beta_n^2 t} - a_n + b_n \cdot e^{\frac{\alpha B t}{4}} \right\} \cdot \text{Cos}(\beta_n z)$$
(2.22)

起始條件之推導：

將 $t = 0$ 代入(2.15)式即可求出轉換後之起始條件如下。

$\theta(z,0) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} e^{B \left(z - \frac{Bt}{2} \right) / 2A^2} W(z,0)$.. (2.28)

上式中：

將(2.17)式代入上式得起始條件：

I.C. : $\theta(z,0) = H(z)$ (2.24)

$a_n = \frac{8k_s \left[(1-2n) \cdot \pi \cdot (-1)^n \cdot \text{Sinh} \left(\frac{\alpha L}{2} \right) - \alpha L \right]}{\alpha(e^{\alpha L} - 1) \left[\alpha^2 L^2 + (1-2n)^2 \pi^2 \right]} - \frac{8qL}{A^2(2n-1)^2 \pi^2}$

邊界條件之推導：

由入滲率之定義，(2.4)式及(2.6)式可列式如下：

$b_n = \frac{A^2 \cdot k_s \cdot (2n-1) \cdot \pi \cdot (-1)^n \cdot e^{\alpha L}}{\alpha \cdot L^2 \left[\left(\frac{2n-1}{2L} \pi A \right)^2 + \frac{\alpha \cdot B}{4} \right]}$

$q(t) = -k \frac{\partial \psi}{\partial z} |_{z=0} + k |_{z=0} = \alpha \phi |_{z=0} - \frac{\partial \phi}{\partial z} |_{z=0}$ (2.29)

將(2.11)式對 Z 微分得

$\beta_n = \frac{2n-1}{2L} \pi$

$\frac{\partial W(z,t)}{\partial z} = e^{-B \left(z - \frac{Bt}{2} \right) / 2A^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{B}{2A^2} \cdot e^{-B \left(z - \frac{Bt}{2} \right) / 2A^2} \cdot \phi$ (2.30)

上列(2.16)~(2.19)式之微分方程組可由(2.15)式轉換成 $\theta(z,t)$ 之微分方程組如下：

當 $z = 0$ ，將(2.11)及(2.18)式代入上式得：

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{\alpha f(t)}{B} \cdot e^{-\frac{B^2 t}{4A^2}} + \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-\frac{B^2 t}{4A^2}} \cdot W(0,t) \dots (2.31)$$

當 $z=0$ ，將(2.11)及(2.31)式代入(2.29)式得：

$$\text{B.C.: } q(t) = \frac{\alpha \cdot f(t)}{B} \cdot e^{-\frac{B^2 t}{4A^2}} + \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-\frac{B^2 t}{4A^2}} \cdot W(0,t) \quad (2.25)$$

將 $z=L$ 代入(2.15)式即可求出轉換後之邊界條件如下。

$$\theta(L,t) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} e^{B\left(z - \frac{Bt}{2}\right)/2A^2} W(L,t) \dots (2.32)$$

將(2.19)式代入上式得邊界條件：

$$\text{B.C.: } \theta(L,t) = \theta_s \dots (2.26)$$

將 $z=0$ 帶入(2.22)式可得：

$$W(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (a_n - b_n) \cdot e^{-A^2 \beta_n^2 t} - a_n + b_n \cdot e^{-\frac{\alpha B t}{4}} \right\} \quad (2.33)$$

將(2.33)式代入(2.25)式及將(2.22)式代入(2.15)式可列出未產生積水前之微分方程式及求出 $\theta(z,t)$ 之解為：

$$\text{G.E.: } \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial k}{\partial z} \dots (2.34)$$

$$\text{I.C.: } \theta(z,0) = H(z) \dots (2.35)$$

B.C.:

$$q(t) = \frac{\alpha \cdot \bar{q}}{B} \cdot e^{-\frac{B^2 t}{4A^2}} + \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-\frac{B^2 t}{4A^2}} \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n - b_n) \cdot e^{-A^2 \beta_n^2 t} - a_n + b_n \cdot e^{-\frac{\alpha B t}{4}} \right] \right\} \dots (2.36)$$

$$\theta(L,t) = \theta_s \dots (2.37)$$

$$\theta(z,t) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} \exp \left[B \left(z - \frac{Bt}{2} \right) / 2A^2 \right] \cdot$$

$$\left\{ \frac{k_s \left(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}} \right)}{\alpha(e^{\alpha L} - 1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (a_n - b_n) \cdot e^{-A^2 \beta_n^2 t} - a_n + b_n \cdot e^{-\frac{\alpha B t}{4}} \right\} \cdot \text{Cos}(\beta_n z) \right\} \dots (2.38)$$

$$\text{上式中 } B = \frac{k_s}{\theta_s - \theta_r}, \quad A = \sqrt{\frac{k_s}{\alpha(\theta_s - \theta_r)}}$$

2.5 推導積水時間

為判別是否會產生積水或是何時產生積水之狀況，將 $z=0$ 代入(2.38)式得地表之體積含水比 $\theta(0,t)$ 如下所示：

$$\theta(0,t) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} \exp \left[-\frac{B^2 t}{4A^2} \right] \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (a_n - b_n) \cdot e^{-A^2 \beta_n^2 t} - a_n + b_n \cdot e^{-\frac{\alpha B t}{4}} \right\} \dots (2.39)$$

將上式繪出後，若地表之體積含水比 $\theta(0,t)$ 均小於 θ_s ，表示降雨完全入滲於土壤中，不產生積水之狀況，但若 $\theta(0,t)$ 於某時間開始大於 θ_s ，表示會產生積水，此時 $\theta(0,t)$ 達 θ_s ，令 tp 為積水時間，則 $\theta(0,tp) = \theta_s$ 代入(2.39)式得

$$\alpha e^{-B^2 tp / 4A^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (a_n - b_n) \cdot e^{-A^2 \beta_n^2 tp} - a_n + b_n \cdot e^{-\frac{\alpha B tp}{4}} \right\} = k_s \dots (2.40)$$

上式利用試誤法疊帶運算可求得 tp 。

2.6 推導積水產生後之解

當降雨經過一段時間地表開始產生漫地流時 ($t \geq tp$)，則部分降雨滲入土壤且地表之含水比維持飽和，此為本求解時段之邊界條件。設 $\bar{t} = t - tp$ ，當 $\bar{t} = 0$ 時，即 $t = tp$ ，由上節之推導結果(2.38)式可得土壤之體積含水比如下所示，此式可視為本求解時段之起始條件。

$$\theta(z,t|_{t=tp}) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} e^{B\left(z - \frac{Btp}{2}\right)/2A^2} I(z) \quad (2.41)$$

上式中 $I(z)$ 為利用 $t = tp$ 代入(2.22)式求得如下所示：

$$I(z) = \frac{k_s \left(\frac{\alpha}{2} - e^{-\frac{\alpha z}{2}} \right)}{\alpha (e^{\alpha L} - 1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (a_n - b_n) \cdot e^{-A^2 \beta_n^2 tp} - a_n + b_n \cdot e^{-\frac{\alpha B tp}{4}} \right\} \cdot \text{Cos}(\beta_n z) \quad \dots\dots\dots(2.42)$$

當 $t \geq tp$ 時，可列出入滲問題之微分方程組如下：

G.E. $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial k}{\partial z}, 0 \leq z \leq L \quad \dots\dots\dots(2.43)$

I.C. $\theta(z, t|_{t=tp=0}) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} e^{\beta \left(z - \frac{B tp}{2} \right) / 2A^2} I(z) \quad (2.44)$

B.C. $\theta(0, t|_{t=tp>0}) = \theta_s \quad \dots\dots\dots(2.45)$

$\theta(L, t|_{t=tp>0}) = \theta_s \quad \dots\dots\dots(2.46)$

令 $\bar{t} = t - tp$ 將(2.43)~(2.46)式中之 $\theta(z, t)$ 利用(2.15)式轉換成 $W(z, \bar{t})$ 之微分方程組如下：

G.E. $\frac{\partial W}{\partial \bar{t}} = A^2 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, 0 \leq z \leq L \quad \dots\dots\dots(2.47)$

I.C. $W(z, \bar{t} = 0) = I(z) \quad \dots\dots\dots(2.48)$

B.C. $W(0, \bar{t}) = \frac{k_s}{\alpha} e^{\frac{B^2 \bar{t}}{4A^2}} \quad \dots\dots\dots(2.49)$

$W(L, \bar{t}) = \frac{k_s}{\alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha L}{2}} \cdot e^{\frac{B^2 \bar{t}}{4A^2}} \quad \dots\dots\dots(2.50)$

上列(2.47)~(2.50)式利用 Duhamel's Theory [Ozisik,1979]可解得之結果如下：

$$w(z, \bar{t}) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-A^2 \beta_m^2 \bar{t}} \cdot \text{Sin}(\beta_m z) \left\{ \frac{16k_s \cdot m \cdot \pi \cdot (-1)^{m+1} \cdot \text{Sinh} \left(\frac{\alpha L}{2} \right)}{\alpha (e^{\alpha L} - 1) (\alpha^2 L^2 + 4m^2 \pi^2)} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n - b_n) \cdot e^{-A^2 \beta_n^2 tp} - a_n + b_n \cdot e^{-\frac{\alpha B tp}{4}} \right] \cdot \frac{8m}{\pi [(2n-1)^2 - 4m^2]} \right\} + \frac{2\pi B K_s}{L^2 \alpha^2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \text{Sin}(\beta_m z) \cdot \frac{m}{\frac{\alpha B}{4} + \alpha} \cdot \left(e^{\frac{\alpha B \bar{t}}{4}} - e^{-\frac{\alpha B_m^2 \bar{t}}{\alpha}} \right) \cdot \left[1 - (-1)^m \cdot e^{-\frac{\alpha L}{2}} \right] \quad \dots\dots\dots(2.51)$$

根據前節之推導， $\theta(z, \bar{t})$ 與 $W(z, \bar{t})$ 之關係如(2.15)

式所示： $\theta(z, \bar{t}) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} e^{\beta \left(z - \frac{B \bar{t}}{2} \right) / 2A^2} W(z, \bar{t})$ ，

因此將(2.51)式 $W(z, \bar{t})$ 之結果代入(2.15)式可求出在產生積水後 $\theta(z, \bar{t})$ 之解為：

$$\theta(z, \bar{t}) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} \exp \left[\beta \left(z - \frac{B \bar{t}}{2} \right) / 2A^2 \right] \cdot \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} e^{-A^2 \beta_m^2 \bar{t}} \cdot \text{Sin}(\beta_m z) \cdot \left[\frac{16k_s \cdot m \cdot \pi \cdot (-1)^{m+1} \cdot \text{Sinh} \left(\frac{\alpha L}{2} \right)}{\alpha (e^{\alpha L} - 1) (\alpha^2 L^2 + 4m^2 \pi^2)} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n - b_n) \cdot e^{-A^2 \beta_n^2 tp} - a_n + b_n \cdot e^{-\frac{\alpha B tp}{4}} \right] \cdot \frac{8m}{\pi [(2n-1)^2 - 4m^2]} \right] \right\} + \frac{2\pi B K_s}{L^2 \alpha^2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \text{Sin}(\beta_m z) \cdot \frac{m}{\frac{\alpha B}{4} + \alpha} \cdot \left(e^{\frac{\alpha B \bar{t}}{4}} - e^{-\frac{\alpha B_m^2 \bar{t}}{\alpha}} \right) \cdot \left[1 - (-1)^m \cdot e^{-\frac{\alpha L}{2}} \right] \quad \dots\dots\dots(2.52)$$

三、結果與討論

3.1 結果與驗證

今以壤土(Silt Loam)為例，考慮均勻分佈起始條件及穩態解起始條件之情形下，說明積水前後之結果並與許瑞昌(1998)所做之數值模擬結果進行比較。

3.1.1 均勻分佈起始條件之結果及與數值模擬結果之比較

若考慮均勻分佈之起始條件，求解方式與前一節方法相同，則其積水前之微分方程式可列出如下：

G.E. : $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial k}{\partial z} \quad \dots\dots\dots(3.1)$

I.C. : $\theta(z,0) = \theta_r$ (3.2)

B.C. $\theta(0,\bar{t}) = \theta_s$ (3.9)

$$q(t) = \frac{\alpha \cdot \bar{q}}{B} \cdot e^{-\frac{B^2 t}{4A^2}} + \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-\frac{B^2 t}{4A^2}}$$

$\theta(L,\bar{t}) = \theta_s$ (3.10)

B.C. :

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n - (c_n + d_n) \cdot e^{-A^2 \beta_n^2 t} + d_n \cdot e^{-\frac{\alpha B t}{4}} \right] \right\}$$

.....(3.3)

上式中 :

$$J(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ c_n - (c_n + d_n) \cdot e^{-A^2 \beta_n^2 t} - d_n \cdot e^{-\frac{\alpha B t}{4}} \right\} \cdot \text{Cos}(\beta_n z)$$

.....(3.11)

$\theta(L,t) = \theta_s$ (3.4)

上列微分方程式可解得 :

上列微分方程式可解得 :

$$\theta(z,t) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} \exp \left[B \left(z - \frac{Bt}{2} \right) / 2A^2 \right] \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n - (c_n + d_n) \cdot e^{-A^2 \beta_n^2 t} - d_n \cdot e^{-\frac{\alpha B t}{4}} \right] \cdot \text{Cos}(\beta_n z) \right\}$$

(3.5)

$$\theta(z,\bar{t}) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} \exp \left[B \left(z - \frac{B\bar{t}}{2} \right) / 2A^2 \right] \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-A^2 \beta_n^2 \bar{t}} \cdot \text{Sin}(\beta_n z) \cdot \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(c_n + d_n \right) \cdot e^{-A^2 \beta_n^2 t} - c_n + d_n \cdot e^{-\frac{\alpha B t}{4}} \right] \frac{8m}{\pi(2n-1)^2 - 4m^2} \right\} + \frac{2\pi B K_s}{L \alpha^2} (\theta_s - \theta_r) e^{-\frac{\alpha}{4}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \text{Sin}(\beta_m z) \cdot \frac{m}{\alpha B + \frac{B \beta_m^2}{\alpha}} \left[1 - (-1)^m \cdot e^{-\frac{\alpha}{4}} \right]$$

.....(3.12)

上式中 :

$$c_n = \frac{8\bar{q}L}{A^2(2n-1)^2 \pi^2}$$

以壤土為例說明積水前後之結果，取 $\bar{q} = 0.0002$ ，壤土之土壤參數列於表 3.1，將表 3.1 之參數值代入 (3.6)式所求得之積水時間為 561.7 秒，而許瑞昌(1998)利用中央差分法求解未飽和層土壤水份垂直入滲之數值解，求得之積水時間為 561 秒，兩者差異不多，將表 3.1 之參數值代入(3.3)式算出降雨歷線如圖 3.1 所示，將表 3.1 之參數值代入(3.5)及(3.12)式算出其土壤水份分佈圖於不同位置及時間下之變化如圖 3.2 所示，同時將許瑞昌(1998)之數值解結果繪於圖 3.2 中進行比較，由圖中發現兩者之變化趨勢完全吻合。

$$d_n = \frac{A^2 \cdot k_s \cdot (2n-1) \cdot \pi \cdot (-1)^{n+1} \cdot e^{-\frac{\alpha L}{2}}}{\alpha \cdot L^2 \left[\left(\frac{2n-1}{2L} \pi A \right)^2 + \frac{\alpha \cdot B}{4} \right]}$$

$$\beta_n = \frac{2n-1}{2L} \pi$$

積水時間可用下式，利用試誤法求解。

$$\frac{k_s}{\alpha} = e^{-\frac{\alpha B t}{4}} \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n - (c_n + d_n) \cdot e^{-A^2 \beta_n^2 t} - d_n \cdot e^{-\frac{\alpha B t}{4}} \right\} \dots(3.6)$$

積水後之微分方程式可列出如下 :

表 3.1

G.E. $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial k}{\partial z}, 0 \leq z \leq L$ (3.7)

參數	壤土參數值	單位
k_s	31.6	cm/day
α	0.02	1/cm
θ_s	0.434	cm ³ /cm ³
θ_i	0.218	cm ³ /cm ³

I.C. $\theta(z,\bar{t}) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} e^{B \left(z - \frac{B\bar{t}}{2} \right) / 2A^2} J(z)$

.....(3.8)

資料來源 : van Genuchten, 1980

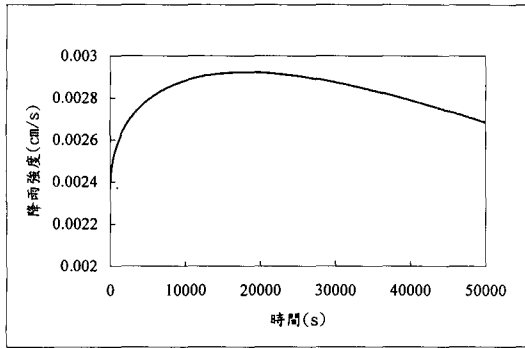


圖 3.1 降雨歷線分佈圖

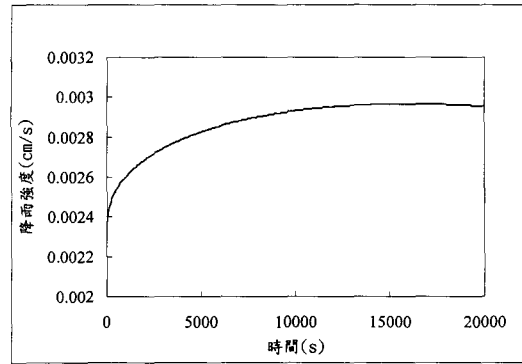


圖 3.3 降雨歷線分佈圖

3.1.2 穩態解起始條件之結果

以壤土為例說明會積水狀況的結果，取 $\bar{q} = 0.0002$ ，壤土之土壤參數列於表 3.1，首先將表 3.1 之參數值代入(2.40)式求得之積水時間為 492.85 秒，將表 3.1 之參數值代入 (2.36)式算出降雨歷線如圖 3.3 所示，將表 3.1 之參數值代入 (2.38)及(2.52)式算出其土壤水份分佈圖於不同位置及時間下之變化如圖 3.4 所示。

3.2 討論

(1)本文所推導之積水時間(2.40)式中，積水時間 tp 與飽和水力傳導係數 k_s 成正相關，今以壤土為例，取 $\bar{q} = 0.0002$ ，繪出 tp 與 k_s 之關係如圖 3.5 所示；積水時間 tp 與所取 \bar{q} 之值成反相關，今以壤土為例，取 $k_s = 31.6\text{cm/s}$ ，繪出 tp 與 \bar{q} 之關係如圖 3.6 所示。

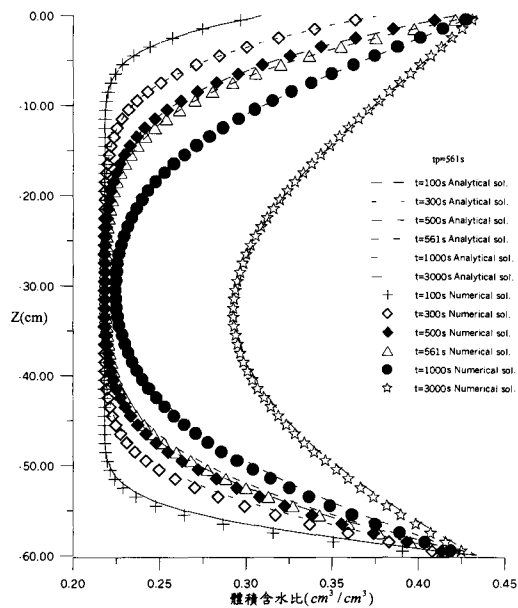


圖 3.2 壤土體積含水比變化分佈圖之解析解及數值解比較

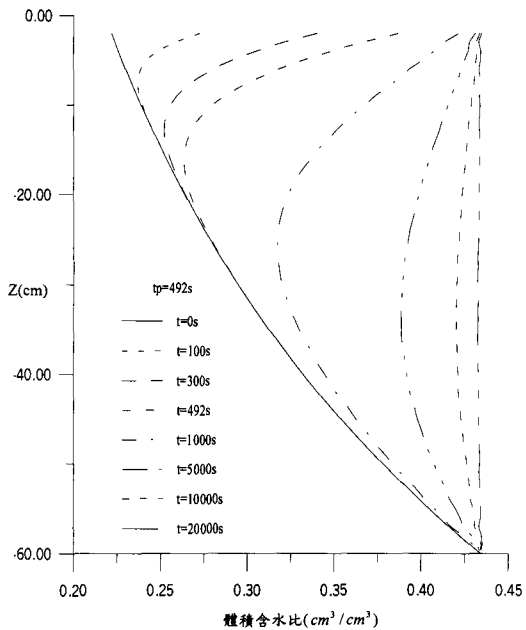


圖 3.4 壤土體積含水比變化分佈圖

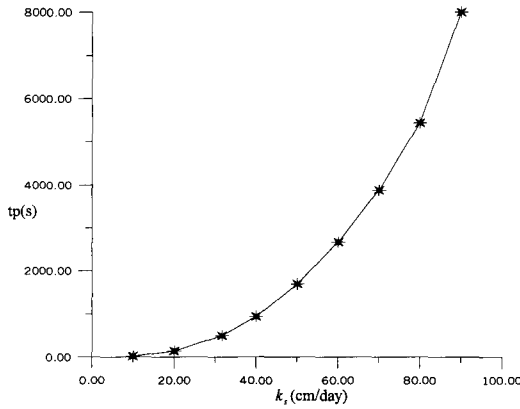


圖 3.5 壤土的積水時間 (tp) 與飽和水力傳導係數 (k_s) 之關係圖

(2) 本文假設土壤性質為 $\frac{\partial \theta}{\partial \psi} = \frac{\alpha}{B}$ ，今將以壤土

為例繪出 $\theta - \psi$ 及 $\psi - k$ 之關係曲線如圖 3.7 ~ 3.8 所示，而含水量 θ 與張力水頭 ψ 之關係則與遲滯效應中之加濕過程之曲線近似。同時本假設可推得 (2.13) 式 $\theta = (\theta_s - \theta_r) e^{\alpha \psi} + \theta_r$ ，使得含水量 θ 與張力水頭 ψ 呈現指數分佈之關係，此為一常見之假設與 Srivastava and Yeh[1991] 一樣，故本假設合於物理現象。

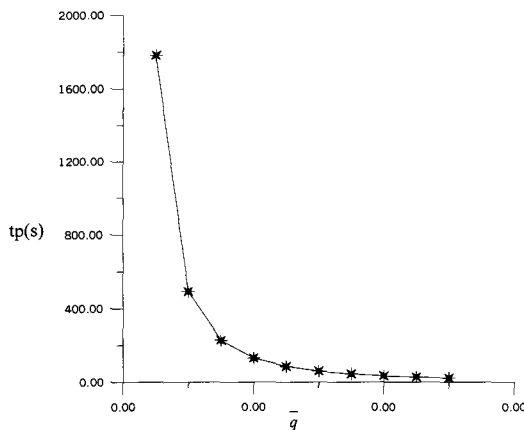


圖 3.6 壤土的積水時間 (tp) 與 \bar{q} 之關係圖

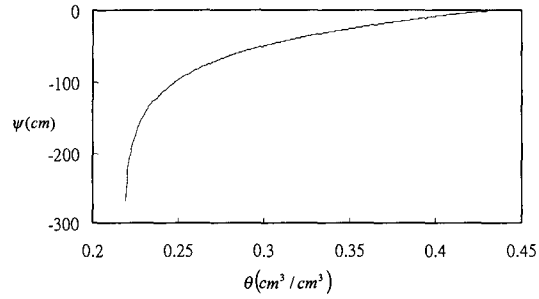


圖 3.7 壤土的體積含水比 (θ) 與張力水頭 (ψ) 之關係圖

四、結論

- (1) 應用 Kirchoff 積分轉換及 Duhamel's Theorem 可求出 Richards Equation 於邊界條件為時間 (t) 的函數及起始條件為位置 (z) 的函數之情形下於有地下水位之解析解。
- (2) 本文推導之結果 (2.38) 及 (2.52) 式適用於有地下水位之情況下，土壤體積含水比之起始條件為穩態解，而降雨歷線隨時間變化之一維有限區間入滲問題於積水前後之體積含水比變化之解析解，同時可利用 (2.40) 式求出積水時間。
- (3) 本文推導之結果與許瑞昌 (1998) 利用中央差分法求解未飽和層土壤水份垂直入滲之數值解結果一致，其變化趨勢完全吻合。

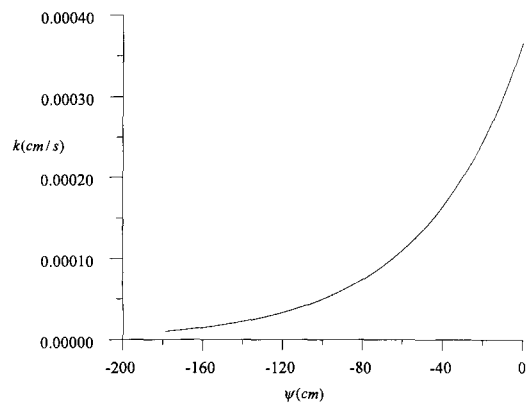


圖 3.8 壤土的水力傳導係數 (k) 與張力水頭 (ψ) 之關係圖

(4)本研究提供降雨強度為時間變化之連續函數下之解析解，具運算簡易之優點同時可供其他較複雜之數值模式驗證變化降雨強度之解。

五、參考文獻

1. Celia , A. M., E. T. Bouloutas and R. L. Zarba, "A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation", *Water Resource Res.*, Vol. 26, No.7, p.1483-1496, 1990.
2. Chow V. T., Maidment , *Applied Hydrology*, Mc Graw-Hill,1970.
3. Clothier B. E., I. White, and G. J. Hamilton, "Constant-rate rainfall infiltration: field experiments", *Soil Sci. Soc. Am. J.*, Vol.45, p.245-249, 1981.
4. Eagleson P.S. , *Dynamic Hydrology*, Mc Graw-Hill, 1970.
5. Green, W. H., and G. A. Ampt, "Studies on soils physics, I, Flow of air and water through soils", *J. Agric. Sci.*, 1-24, 1911.
6. Horton, R. E., "An approach toward a physical interpretation of infiltration-capacity", *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, Vol.5, p.399-417, 1940.
7. Morel-Seytoux, H. J., "Derivation of equations for variable rainfall infiltration", *Water Resources Res.* Vol. 14, No.4, pp.561-568, 1978.
8. Morel-Seytoux, H. J., "Analytical results for prediction of variable rainfall infiltration", *Journal of Hydrology*, Vol. 59, pp.209-230, 1981.
9. Ozisik M., *Heat Conduction*, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1979.
10. Philip, J. R., "The theory of infiltration, 1, The infiltration equation and its solution", *Soil Sci.*, 84, p.345-357, 1957.
11. Parlange, J.-Y., "The theory of water movement in soils, 2, One-dimensional infiltration", *Soil Sci.*, 111(3), p.170-174, 1971.
12. Parlange, J.-Y., "Water transport in soils", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 12, p.77-102, 1980.
13. Raats, P. A. C., and W. R. Gardner, Movement of water in the unsaturated zone near a watertable, In Jan Van Schilfgaarde(ed.) *Drainage for Agriculture : Agronomy* 17, p.311-405, 1974.
14. Rafael L. B., *Hydrology. An introduction to Hydrologic Science*, Massachusetts Institute of Technology, p.351-353, 1990.
15. Richards, L. A., "Capillary conduction of liquids through porous mediums", *Physics*, vol. 1, p.318-313, 1931.
16. Salvucci, G. D. , "Series solution for Richards equation under concentration boundary conditions and uniform initial conditions " *Water Resources Res.* Vol. 32, No.8, pp.2401-2407, 1996.
17. Sander,G., C.,J.-Y. Parlange, V. Kuhnel, W.L. Hogarth, D. Lock-ington, and J. P. J. O'Kane, "Exact nonlinear solution for constant flux infiltration", *J.Hydrol.*,vol. 97, p.341-346,1988.
18. Serrano S. E. "Analytical decomposition of the nonlinear unsaturated flow equation " *Water Resources Res.* Vol. 34, No.3, pp.397-407, 1998.
19. Srivastava R., Yeh T.-C. Jim., "Analytical solutions one-dimensional infiltration toward the water table in homogeneous and layered soils" *Water Resource Res.*, Vol. 27, No.5, pp.753-762, 1991.
20. Swartzendruber Dale, "A quasi-solution for the downward infiltration of water into soil", *Water Resource Res.*, Vol. 23, No.5, p.809-817, 1987.
21. Van Genuchten, M. Th. "A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils" *soil Sci. Soc. Am.* J-44:892-898, 1980.
22. Warrick A. M., "Analytical solutions to the one-dimensional linearized moisture flow

equation for arbitrary input”, Soil Sci. Soc.,
Vol.120, p.79-84, 1975.

23. 許瑞昌，「未飽和層土壤水份垂直入滲之數
值模擬」，國立台灣大學農業工程研究所碩
士論文，民國 87 年。
24. 陳建謀，譚義績，陳主惠，「Kirhoff 積分轉
換解析不積水之一維入滲問題」，台灣水利，
Vol.47, No.1, March, 1999。
25. 陳建謀，陳主惠，譚義績，「連續變化降雨
強度之一維入滲問題之解析解」，中國農業
工程學報，1999。

六、誌謝

本研究承蒙國科會(計畫編號：NSC 88-
2625-Z-002-023)補助研究經費，以及台大農業工
程研究所陳建謀同學協助蒐集資料及數學計
算，在此特致謝忱。

收稿日期：民國 88 年 8 月 18 日

修正日期：民國 88 年 10 月 28 日

接受日期：民國 88 年 11 月 9 日