

# 綜合農場系統殘磷管理之線性系統分析

## Linear System Analysis of Residual Phosphorus Management in an Integrated Farming System

國立台灣大學農業工程系博士班研究生

國立台灣大學農業工程系教授

林文澤  
Wen-Zer Lin

廖中明  
Chung-Min Liao

### 摘要

本文以線性系統理論發展一系統控制模式，探討綜合經營農場系統中殘磷管理之策略。以線性非時變系統的二次調節器加輸出回授控制合成一最佳控制系統。應用特殊積分二次目標函數，可將該系統中物流之變異極小化，並達成最佳控制策略。整體控制系統設計，脈衝及步級式干擾兩者皆納入考慮，並有效合成最佳回授比例(P)及比例加積分(PI)控制器。文中選擇台灣雲林縣一家豬/玉米綜合經營農場，針對豬隻所排放的殘磷濃度，設計一最佳回授控制系統，以免因過量殘磷而造成環境污染。整體模式模擬使用 MATLAB 軟體操作。模擬結果顯示，選擇最佳權重參數所產生的成本，隨著欲求值而改變；當適切地調變所設計的最佳回授控制器，對農場中殘磷濃度，能達滿意的控制效果。

**關鍵詞：**綜合農場系統，回授控制系統，控制器，線性分析。

### ABSTRACT

A linear system control model is developed to manage the residual phosphorus in an integrated farm system. Linear quadratic regulators (LQRs) with output feedback of a linear-invariant system are chosen for this study. The optimization and suboptimization are defined to determine an output control loop such that the integral quadratic cost function meets its minimum value. Both impulse and step disturbances are taken into account and optimal proportional (P) and proportional plus integral (PI) feedback controllers are synthesized. To illustrate this procedure, the design is applied to control residual phosphorus concentration in pig/corn farm located at Yun-Lin, Taiwan. The simulations were done in an integrated compiled PC-MATLAB. Numerical results from the model implementation show that the optimal choice of weighting parameters and the

resulting costs vary with desired equilibrium state. The designed optimal feedback controllers, when suitable tuned, give satisfactory control of residual phosphorus concentrations in the pig/corn farm.

**Keywords:** Integrated farm system, Feedback control system, Controller, Linear analysis.

## 一、前言

近年來，由於農業工業化及過量使用農藥及化肥，造成農田惡化，勞資高漲也使許多農田棄耕，加上農地大量變更用途，坡地濫砍，產生水土流失，地力下降。這些現象嚴重違反永續農業(sustainable agriculture)所強調「生態、經濟」的要求。也違反了「農業生態」所重視「環境是相互作用的系統，人類依賴著有機體，失去了它會降低我們對環境改變的適應能力」(Straskraba, 1993)。農業生態學為運用生態學和系統論等方法，把農業生物與其自然和社會環境當作是一個整體，研究其間的相互演變、調節控制及平衡發展的學科(Mitsch 及 Jorgenser, 1989; Lowrance 等, 1984; Bunce 等, 1993)。Olsen(1961)曾使用類比計算機在生態系統中，做核素流動的模式追蹤。Lowe 及 Blackwell(1975)和 Boling 及 Van Sickle(1975)分別敘述了一般工程控制理論在生態系統上的應用。Mulholland 及 Sims(1976)使用穩定的團塊模式來論述一般控制理論能使用線性和非線性模式來獲致欲求的流動層。Briand 及 McCauley(1978)設計 6 個團塊模式包括，可食的(edible)藍綠藻、不可食的(inedible)藍綠藻，草食動物，食肉動物，營養池，浮游生物的捕食者，來量測清淨水系統中營養結構的養份循環影響。此模式使用預測有關優養化衝擊清淨水的生態系統，研究結果亦指出任何添加營養物到湖中，將嚴重地使浮游植物產生不能食用的情況。Kercker(1983)應用控制理論中，穩定、動態及線性模式找尋其頻率反應以獲得諧調的輸入。到了 Hannon(1986)，在砂洲牡蠣生態系統中探討流動的計算法，並發展線性動態系統來描述一般用來穩定真實生態系統的計畫，包括可預期的控制過

程，如延長日照，以增加花卉成長，另一種為在未能預期的反應式(或回授式)控制，如流動速率控制等。陳(1989)，曾針對德基水庫周緣地區因不重視水土保育施用肥料、農藥，使雨季時大量的磷、鉀、鈣等營養鹽流入水庫，造成優養化現象，若在水庫與各上流間設置森林緩衝帶的營養鹽動態研究指出，此策施可有效降低營養鹽濃度，以維持較優良水源。而金及薛(1992)也針對台灣中部蓮華池天然闊葉林中的穿落水、溪流水等分析化學特性，試驗結果顯示磷可能為此集水區植物生長的限制因素。周(1991)主持「全球環境變遷中台灣福山森林生態系長期研究」，期盼能匯整而導出生態系的各環節間的能量與質量流過程的運作與受干擾的變動情形。Straskraba(1993)亦指出，在評估環境策略時，開放和分散的系統均潛在複雜的動態是不容忽視的。應用動態的思考和評估，來研究生態系統模式，是明顯可決定有關生態經營的適當工具。

在農業環境控制系統研究方面，侯及廖(1984)曾提出設計資源利用率高的農業經營系統中，所產生的廢棄物，可以「肥料」或「飼料」之形式，成為另一農業經營之能量來源。馬(1989)以台灣主要耕地為素材，建立土壤不安定磷，有機磷及磷肥有效性指標迴歸方程式來校正及測試磷模式。黃(1991)研發以禽畜糞、豆粉、米糠、骨粉等天然有機質經充份腐熟，發酵三個月以上，製成有機肥，並配以能活化土壤的活性菌及酵素，來促進分解土壤的肥份，以利作物吸收。盧及朱(1993)研究指出，多數民眾平日最擔心的事件，包括青菜殘餘農藥，飲用水不乾淨，環境污染等問題均與農業環境有關，而本省密集式的現行農耕制度下也產生(1)農產品之農藥污染(2)水源污染及(3)土壤生產力降低及土壤流失等問

題，故永續性農業制度中，取自天然綠肥、作物殘體、家禽排泄物、污泥等有機肥，在配合良好輪作制度下可完全滿足作物生長需求。廖(1991)以工程控制學的觀點，分析農業生態系統的動態行為，提出當該系統具有可控制性時，則所有資源會受到系統的影響。廖等(1992)，以乾空氣、水份及空氣中烩與二氧化碳濃度之聯立物質平衡式中推導出線性控制模式，用以描述菇舍中溫度、濕度與二氧化碳濃度之動態行為，而脈衝及階梯式干擾，兩者皆納入考慮；最佳回授比例(P)，比例加積分(PD)控制器被有效地合成。Liao及 Feddes(1993)針對畜舍中氣懸粉塵，以團塊模式來描述其動態行為，使用現代控制理論的觀點，以回授比例及回授比例加積分控制器，做為畜舍粉塵濃度的控制策略。Liao(1995)研究養殖池之熱分層現象，以最佳控制理論合成一熱去分層之最佳回授 PI 控制系統。

農業行為乃相互影響，農業生態系統也相互作用，並具間接及直接傳輸路徑或回授現象。當許多物種共存並能同時生產的封閉型農業生態系統中，藉著控制系統理論中的動態系統，才能適切地處理一些與動態回授迴路有關聯的現象。例如，藉著檢測動態系統的可控制性和可觀測性，此時就能決定需要什麼種類的工具或訊息以穩定此系統行為。

因此，由系統控制的觀點來探測農業生態系統的設計方案，可控制廢棄物處置，以再循環使用。當出現不確定性時，也可從工程控制的觀點來使用動態、最佳化的回授控制器來解決這些問題。特殊的農業生態系統的設計，需考慮細部，以顯示建立在工程控制技術的應用。從理論觀點，它提出巨觀能量及物質變化的動態行為，並使用數學工具來解釋整個農業生態系統的物理特性。

在台灣彰化及二林等地區，對於未滿 200 頭的養豬戶，因裝設廢水處理成本相較經營所得偏高，都將豬糞經池塘發酵、堆肥或廐肥(沈，1991；林，1993)等方式處理(稱為有機肥料)後排放，但仍發現有許多湖泊優養化的現象。若能應用自動控制理論，將排放的豬糞，以感測器偵測，並將

超過標準的濃度，以生物法或化學法來使濃度減至標準以下(Mackawa 等，1995)。如以農戶養 200 頭豬為例(考慮經營成本，只能做為農戶的副業)，豬糞尿經過池塘發酵後所形成的有機肥再當成肥料，排放入玉米田，因輸出的物質會回授到原有的系統內，此時能量對外界並無輸出，即為封閉型系統(enclosed system) (Odum, 1984)。該農場即為講求能源有效利用，將使用後的廢棄物保留再循環利用(Coleman 等，1984；侯與廖，1984)的「封閉型」農業生態系統。這種將「控制」應用在「農業生態」以使豬糞的濃度能達成有效控制的想法，或由於其間的困難與複雜，或因人們對此尚未有清晰的概念，使得這方面的研究尚未起步；加上近年來社會變遷過速，關貿總協 GATT(General Agreement of Tariffs & Trade)的影響，使傳統農業面臨斷絕危機。該系統中，如溫室、人工氣候站或未來建立在太空的農業生產站，此時生產面積、種類、數量均受嚴格限制，原有設施將面臨極大考驗。生產環境中，欲克服這些干擾外力，需不斷施測及調節各環境因子，此時控制系統的使用，就成為達成生產效率的最佳設備。本文的目的則有下列兩點：

1. 以線性系統理論，描述農業生態系統中物流之動態行為並以現代控制理論發展一最佳回授控制系統以有效控制農業生態中之物流。
2. 以南台灣一綜合經營農場系統模式為例，應用發展出之系統控制模式模擬及合成一殘磷流最佳回授比例與比例加積分控制策略。

## 二、模式結構

### 1. 模式發展

#### (1) 功能元素(functional element)矩陣

一功能元素系統意味著先設(a priori)知識，植物和動物種類、自然及人造事物等，以限制農業生態系統中所有物質和能量的交換。第  $i$  個功能元素的定性量測是其能力度容量( $M_i$ )，此能力度具有該元素消耗和生產資源能量的特性，假設  $C_{ik}$  是第  $i$  個元素消耗第  $k$  個資源的量，而  $P_{ij}$  是

每個單元時間第  $i$  個元素產生第  $j$  個資源。此功能元素可以向量的形式  $\{E_i\}$  來表示： $\{E_i\}=\{E_i(M_{ij}, C_{ik}, \dots, C_{il}, P_{im}, \dots, P_{in})\}$ (Belyaev 及 khudoshina, 1992)。

農業生態系統的功能元素在時間  $t$  時，可藉一對非負矩陣， $[A(t)]$ 和 $[B(t)]$ 來描述(Miller 及 Blair, 1985)。其中 $[A(t)]$ =總輸入係數之不可分解矩陣，而 $[B(t)]$ =淨輸出係數的部分可分解矩陣。根據模式假設， $[A(t)]$ 和 $[B(t)]$ 二矩陣為  $n$  次矩陣： $[A(t)]=(a_{ij}(t))$ ，而 $[B(t)]=(b_{ij}(t))$ ；其中  $a_{ij}(t)$ =每單位可用於系統中之第  $j$  個資源質量下，在第  $j$  個過程中之第  $i$  個資源之總輸入係數。而  $b_{ij}(t)$ =每單位可用於系統中之第  $j$  個資源質量下，第  $j$  個過程中之第  $i$  個資源之淨輸出係數。

在此定義二個矩陣 $[m(t)]=(m_{ij}(t))$ 及 $[O(t)]=(O_{ij}(t))$ 可表成在時間  $t$ ，第  $j$  個過程中，第  $i$  個資源各別的總輸入和淨輸出，即被  $i$  所使用的  $j$  量，如海藻生質量每天的數量( $j$ )被特殊的草食動物( $i$ )所消耗。於是一個非負的隨時變  $n$  階向量 $\{q_j(t)\}$ 此時可定義為 $\{q_j(t)\}=\{q_1(t), q_2(t), \dots, q_j(t)\}^T$ ；其中  $q_j(t)$ =時間  $t$  時在  $j$  過程中可利用於系統第  $j$  個資源的數量(即總量為  $j$  的農產品可視為此系統中之存量)。而 $\{q(t)\}$ 則可表為全部過程中可利用於系統的總資源量向量。

因此， $[A(t)]$ 和 $[B(t)]$ 兩矩陣，便可定義為：

$$[A(t)] = [m(t)] \{q^{-1}(t)\}, [B(t)] = [O(t)] \{q^{-1}(t)\} \dots (1)$$

在一非時變的系統中， $[A(t)]=[A]$ ，及 $[B(t)]=[B]$ ，若考慮系統波動所產生之改變則可再改寫為：

$$[A(t)] = [A_s] + [\Delta A], [B(t)] = [B_s] + [\Delta B] \dots (2)$$

其中 $[\Delta A]$ 和 $[\Delta B]$ 分別表示當此系統產生波動時在穩定狀態 $([A_s]$ 和 $[B_s])$ 或啟始點係數的個別改變量。 $\Delta a_{ij}$ 和 $\Delta b_{ij}$ 可大於、等於或小於 0，乃依  $j$  過程中第  $i$  個資源的輸入或輸出係數是否增減而定。

在時間  $t$  的第  $j$  個過程中，可利用於農業生態系統的第  $j$  個資源質量 $(q_j(t))$ 可大於、等於或小於  $q_j(t+h)$ ，其中  $h$  為一時間增量。此說明  $j$  資源

輸出，由一段時期到另一段時期可能變小，不變或變大。質量守恒狀況(模式假設(1)及(2))，意味所有  $q_j(t)$  的總質量，若以一單位向量 $\{e\}$ 來表示，如 $\{q(t)\}^T \{e\}$ ，對所有時間均為常數，即

$$\{q(t)\}^T \{e\} = \{q(t+h)\}^T \{e\} \dots (3)$$

對  $n$  個資源而言，在一給定時段上的任何過程之輸出質量必須與輸入質量相等，即

$$\{a_{ij}(t)\}^T q_j(t) \{e\} = \{b_{ij}(t)\}^T q_j(t) \{e\}, i \in \{1, \dots, n\} (4)$$

由所有資源被充分用於所有時間和所有資源產生正數量的功能元素，來定義農業生態系統的時間行為上考慮，可更充分瞭解方程式(3)及(4)。

農業生態系統中，在時間  $t$  的輸出可藉由第一階向量—矩陣微分方程式表達：

$$\dot{\{q(t)\}} = [B(t)] \{q(t)\} \dots (5)$$

方程式(5)清楚地說明 $\{q(t)\}$ 的時間路徑與輸入的 $[A(t)]$ 矩陣無關。在線性非時變系統的特殊情況，方程式(5)的一般解可表示如下(Chen, 1984)：

$$\{q(t)\} = \exp([B(t)]) \{q(0)\} \dots (6)$$

此處 $\{q(0)\}$ 表資源質量在  $t=0$  時的啟始值向量。此方程式的時間路徑 $\{q(t)\}$ 是依 $\{q(0)\}$ 成份的數量及 $[B]$ 矩陣的結構而定。

### (2) 穩定性

穩定性的觀念很重要，因每個能運作的系統，必須被設計成是穩定性的。首先 $\{q(t)\}$ 的數量可用歐基里德的範數(Euclidean norm)來量度(Chen, 1984)：

$$\| \{q(t)\} \| = \left( \sum_{i=1}^n q_i^2 \right)^{1/2} \dots (7)$$

且定義一個平方矩陣 $[G]$ 的範數(Chen, 1984)，可表為

$$\| [G] \| = \max_{\|\xi\|=1} | [G] \{ \xi \} | \dots (8)$$

考慮下列數學表示式：

$$\{q(t)\} = \exp([B(t)]\{q(0)\}, \{\xi\} = \{q(0)\} \|\{q(0)\}^{-1} \quad (9)$$

結果可為：

$$\begin{aligned} \|\{q(t)\} &= \|\exp([B(t)]\{q(0)\} \|\{q(0)\} / \|\{q(0)\} \\ &= \|\exp([B(t)]\{\xi\} \|\{q(0)\} = \|\exp([B(t)]\|\{q(0)\} \end{aligned} \quad (10)$$

因，系統(5)的一般解可表為：

$$\|\{q(t)\} \leq \|\exp([B(t)]\|\{q(0)\} \dots\dots\dots (11)$$

方程式(6)的解可較清楚的表為：

$$\{q(t)\} = \exp([B](t))\{q(0)\} = \sum_{k=1}^j C_k \exp(\lambda_k t) \{Y^{(k)}\} \quad (12)$$

其中， $C_k$  = 啟始狀態常數， $\lambda_k = [B]$  的固有值， $\{Y^{(k)}\}$  = 相應於  $\lambda_k$  之  $[B]$  的固有向量。應用三角不等式關係 ( $|x+y| \leq |x| + |y|$ ) 和 Schwarz 不等式 ( $xy \leq |x| |y|$ )，方程式(12)可改寫為：

$$\begin{aligned} \|\exp([B(t)]\{q(0)\} &= \left\| \sum_{k=1}^j C_k \exp(\lambda_k t) \{Y^{(k)}\} \right\| \\ &\leq \left( \sum_{k=1}^j C_k \exp(\lambda_k t)^2 \sum_{k=1}^j \{Y^{(k)}\}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \exp(\mu t) \|\{C\}\| \|\{Y\}\| \end{aligned}$$

其中， $\mu \leq \text{Min}_k R_e(-\lambda_k)$ ，經數學運算可得下式：

$$\begin{aligned} \|\exp([B(t)]\{q(0)\} / \|\{q(0)\} &\leq \exp(\mu t) \|\{C\}\| \|\{Y\}\| / \|\{q(0)\} \\ &\leq \exp(\mu t) \|\{Y\}^{-1}\| \|\{Y\}\| \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (13)$$

對  $\|\{\xi\}\| = 1$ ，因  $[I] = [Y]^{-1} [Y]$  及  $\|[I]\{\xi\}\| = 1$ ，可得下式： $1 = \|[I]\| \leq \|[Y]\|$ ，並存在一常數  $k \geq 1$ ，使得  $\|\exp[B](t)\| \leq k \cdot \exp(\mu t)$ 。

當  $\mu < 0$  時可確保線性系統方程式(5)最後將趨近於 0。因此， $\{q(t)\}$  在  $R_e(\lambda_k) < 0$  才能維持穩定。假如固有值為零或正實數，此時線性系統為物理上不穩定，會造成確定啟始條件不可控制的振盪或成長。

## 2. 回授控制系統

### (1) 線性動態系統

受控功能元素的改變 (Controlled functional

element change) 能力，可藉加於農業生態系統的環境而影響。因此農業行為能經由處置環境來延續固定供應的資源壽命，並使浪費處理的傷害影響極小化，此即為可控功能元素改變的角色。受控功能元素的改變可視為是以一種新的結合或新的形式深思熟慮地應用剩餘數量 (Georgescu-Roegen, 1971)，因此，功能元素改變是廢棄物量的函數。

廢棄物應用到農業生態系統以獲得特定目的是一種具回授控制的特性：農業生態系統中資源或狀態變數之線性結合之應用，可使一啟始狀態改變到某個其它狀態。換言之，在未來可藉改變現在資源的結合來控制功能元素，以改變利用於農業生態系統的資源結合。

將功能元素改變的描述當成一種控制過程，可直接以方程式(2)代入方程式(5)，而得，

$$\dot{\{q(t)\}} = [B_s]\{q(t)\} + [\Delta B]\{q(t)\} \dots\dots\dots (14)$$

控制變數向量即為時間  $t$ ，此系統在先前時間得到的功能元素下所產生廢棄物量或殘量向量。根據定義，殘量向量 ( $\{q_R(t)\}$ ) 則有下式關係：

$$\{q_R(t)\} = [I] - [A] \|\{q(t)\} \dots\dots\dots (15)$$

因此，控制變數向量 ( $\{U(t)\}$ ) 可定義為：

$$\{U(t)\} = \{q_R(t)\} = [I] - [A] \|\{q(t)\} = [H] \|\{q(t)\} \quad (16)$$

假如  $[H]$  為非奇異，則  $\{q(t)\} = [H]^{-1} \{U(t)\}$ ，此時方程式(14)可以一狀態空間形式寫成一線性動態系統方程式：

$$\begin{aligned} \dot{\{q(t)\}} &= [B_s]\{q(t)\} + [\Delta B][H]^{-1}\{U(t)\} \dots\dots\dots (17) \\ &= [B_s]\{q(t)\} + [M]\{U(t)\} \end{aligned}$$

其中， $\{U(t)\}$  = 開始時間  $t$  之  $n$  階控制變數向量； $[M] = [B_s]$  元素改變之  $n$  階控制輸入方陣  $= [\Delta B][H]^{-1}$ 。

當系統的控制輸出定義為此系統的剩餘物，一封閉型農業生態系統將可被完全描述成如下的線性動態系統方程式：

$$\begin{aligned} \dot{\{q(t)\}} &= [B_s]\{q(t)\} + [M]\{U(t)\} \\ \{U(t)\} &= [H]\{q(t)\}, \\ \{y(t)\} &= [C]\{q(t)\}. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (18)$$

其中{y(t)}=輸出向量，而[C]則為輸出常數矩陣。

(2)廢棄物停留時間模式

方程式(18)的一般解是：

$$\begin{aligned} \{q(t)\} &= \exp([B_s]t)\{q(0)\} \\ &+ \int_0^t \exp([B_s](t-\tau))[M]\{U(\tau)\}d\tau \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (19)$$

此狀態變數在時間(t+h)，即{q(t+h)}能經由時變轉換機率(P(h))以非奇異形式轉換而成，並能表成(Liao 及 Feddes, 1990)：

$$\{q(t+h)\} = [P(h)]\{q(t)\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

從方程式(19)可得{q(t+h)}的解為：

$$\begin{aligned} \{q(t+h)\} &= \exp([B_s]t)\exp([B_s]h)\{q(0)\} \\ &+ \int_0^t \exp([B_s](t-\tau))[M]\{U(\tau)\}d\tau \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (21)$$

其中， $\tau' = \tau - h$ ，假如 h 非常小，經由方程式(19)及(21)，可得：

$$\{q(t+h)\} = \exp([B_s]h)\{q(t)\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

以方程式(20)及(21)的觀點，在系統矩陣[B<sub>s</sub>]和轉移機率矩陣([P(h)])間的重要關係可表成下式：

$$[P(h)] = \exp([B_s]h) \quad \dots\dots\dots (23)$$

若 P<sub>ij</sub>(t)表[P(t)]的元素，極微時間(t, t+dt)內，在進入系統前已在次系統 j 開始的次系統 i，在此過程的平均時間為 P<sub>ij</sub>(t)dt，而第(i, j)個元素的整個平均時間，此時可表為： $[T] = \int_0^{\infty} [P(t)]dt$ 。

利用一矩陣表示函數(function of a matrix representation)(Zadeh 及 Desoer, 1963)，上式積分可得下式：

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [P(t)]dt &= \int_0^{\infty} \exp([B_s]t)dt \\ &= \int_0^{\infty} (1/(2\pi i)\phi_c \exp([\lambda]t)([\lambda][I] - [B_s])^{-1}d\lambda)dt \\ &= 1/(2\pi i)\phi_c (\int_0^{\infty} \exp([\lambda]t)dt)([\lambda][I] - [B_s])^{-1}d\lambda \\ &= 1/(2\pi i)\phi_c -[\lambda]^{-1}([\lambda][I] - [B_s])^{-1}d\lambda \\ &= -[B_s]^{-1} \end{aligned} \quad (24)$$

其中， $[\lambda] = [B_s]$ 之固有向量，C=由一個有限數量的封閉可調整的 Jordan 曲線所組成，包含[B<sub>s</sub>]的固有值[λ]的值域邊界。最後選擇左平面之等高線(Contour)C，以致當 t 趨近於無窮大，exp([λ]t)趨近於 0。

因此，[T]的列總數，就以第 i 列來說，相等於狀態變數在次系統 i 的平均停留時間：

$$\{\bar{t}\} = [T]\{1\} = -[B_s]^{-1}\{1\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

其中{ $\bar{t}$ } = 狀態變數在次系統平均停留時間向量。

(3)最佳回授控制器設計

a. 最佳比例控制器設計

推導一最佳回授控制策略，可考慮使用具有狀態回授的線性二次調節器(LQR)來設計。此 LQR 已發展了近二十年。在整個過程中，量測所有可利用資源並非經濟可行。甚至最簡單的模式中也具有非線性和不確定性。因此，一線性非時變系統若引用次佳輸出回授控制最為適切。實際上，不可能所有的狀態變數均可利用於回授。因而可藉帶入可利用的輸出變數的線性組合來產生控制變數，此方式比經由 Kalman 濾波器(Kalman 及 Bucy, 1961)，或某些型式的狀態推估器(Gelb et al., 1974)，來建構此狀態變數為佳。對方程式(18)所提出的線性控制系統在求得一最佳的控制向量{ $\hat{U}_p(t)$ }後，即可極小化下列的二次式性能指標(Performance index)：

$$J = 1/2 \int_0^t (\{q - q_d\}^T [S]\{q - q_d\} + \{\hat{U}_p\}^T [R]\{\hat{U}_p\})dt \quad \dots\dots\dots (26)$$

此處， $q_d$  為經營者欲求資源量，[S]=[H]<sup>T</sup>[Q][H]，而 [Q] 是正半定(Positive semidefinite)加權矩陣，[R] 是正定(Positive definite)控制加權矩陣。而控制器能獲指定時間內的系統，此系統必須為可控制的。另一方面，控制此系統，具有回授的性能必須被偵測出來，因而此系統必須可被觀測。假如，在方程式(18)的線性機構(Plant)是可觀測的，當[Q]是正半定此時[S]=[H]<sup>T</sup>[Q][H]是正半定輸出加權矩陣機構，當滿足下列矩陣：

$$[V(t)] = [[H]^T [B]^T [H]^T \dots] ([B]^{n-1})^T [H]^T$$

及  $[Z(t)] = [[M] [B] [M] \dots] [M]^{n-1} [M]$  的秩(rank)均為  $n$  (即,  $[V][V]^T \neq 0$  及  $[Z][Z]^T \neq 0$ ) 時, 分別具可觀測性和可控制性(Palm, 1983)。

而使方程式(26)極小化的最佳控制向量  $\{\hat{U}_p\}$  的解, 可表成下式(Palm, 1983),

$$\begin{aligned} \{\hat{U}_p\} &= -[R]^{-1} [M]^T [P] \{\hat{q}\} \\ &= -[R]^{-1} [M]^T [P] [H]^{-1} \{U_p\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(27)$$

此處  $[P] = [P]^T$  是下式 Riccati 方程式的正定解,

$$\begin{aligned} \dot{[P]} &= -[P][B_s] - [B_s]^T [P] + [P][M][R]^{-1} [M]^T [P] \\ &\quad - [S]. [P(t_f)] = 0 \end{aligned}$$

假如時間  $(t_f)$  趨近於無窮大, 方程式(18)以卡門(kalman)觀點言, 在具可控制及可觀測性下, 此最佳控制即形成一個次佳控制器設計問題(Gelb 等, 1974)。其次佳控制向量可表成下式:

$$\begin{aligned} \{\hat{U}_p\} &= -[R]^{-1} [M]^T [P^*] \{q\} \\ &= -[R]^{-1} [M]^T [P^*] [H]^{-1} \{U_p\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(28a)$$

此處  $[P]^* = [P]^* T$  是唯一下式代數 Riccati 方程式的正定解

$$\begin{aligned} -[P]^* [B_s] - [B_s]^T [P]^* \\ + [P]^* [M][R]^{-1} [M]^T [P]^* - [S] = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(28b)$$

方程式(28)中, 控制系統被控制於半定期間, 因此, 不須選擇一個非零的啟始值在無窮時間積分二次成本方程。在啟始值狀況, 其輸出 LQR 的最佳回授控制器,  $\{\hat{U}_p\}$  正比例於  $\{q\}$ , 因而, 此過程可視為以現代控制理論所設計的比例回授控制器(P-Controller)。其最佳控制系統方塊圖, 如圖 1(a)所示。

### b. 最佳比例加積分控制器設計

具常數增益(constant gain)的比例控制, 在考慮干擾輸入時, 並不能消除系統的穩態誤差(steady-state error)。通常在農業生態中對農場的控制需要輸入許多能源(如肥料、飼料、種子等), 同時對於不要的雜訊(noise)或干擾(disturbance), 如蟲害, 溫度過低或污染源侵入等, 必須將之抑制或消除掉, 此時積分控制結合具常數增益的狀態回授可用來解決此問題。

方程式(18)中, 若加入  $\{W\} = m \times 1$ , 常數向量的干擾輸入及輸出可表成,

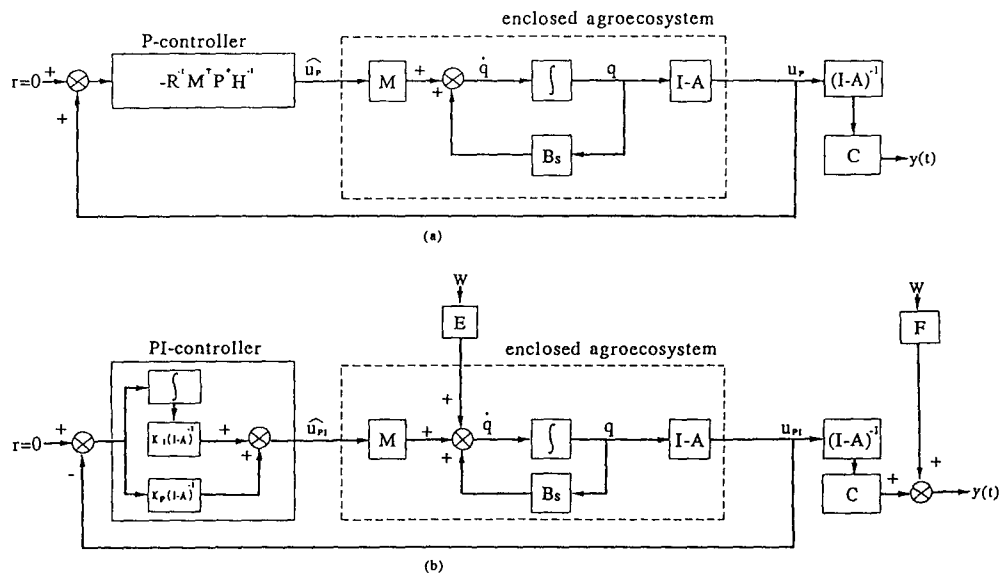


圖 1 最佳控制系統方塊圖, (a)最佳比例控制器, (b)最佳比例加積分控制器

$$\begin{aligned} \dot{\{q(t)\}} &= [B_s]\{q(t)\} + [M]\{U(t)\} + [E]\{W(t)\} \\ \{U(t)\} &= ([I] - [A])\{q(t)\} = [H]\{q(t)\} \quad \dots (29) \\ \{y(t)\} &= [C]\{q(t)\} + [F]\{w(t)\} \end{aligned}$$

此處，[E]及[F]為半正定矩陣，而{W(t)}為常數干擾向量。

當時間趨近無窮大{q(t)}會趨近 0，{y(t)}趨近欲求輸出，即穩態誤差為零。其控制向量{\hat{U}\_{PI}}可表成(D'azzo 及 Houppis, 1988)：

$$\begin{aligned} \{\hat{U}_{PI}\} &= -[K_p]\{q(t)\} - [K_I] \int_0^t \{q(\tau)\} d\tau \\ &= -[K_p][H]^{-1}\{U\} - [K_I][H]^{-1} \int_0^t \{U(\tau)\} d\tau \quad \dots (30) \end{aligned}$$

此處 [K<sub>p</sub>] = p×n 矩陣，[K<sub>I</sub>] = p×m 矩陣，包含比例的狀態回授及輸出誤差的積分控制回授方塊圖，示於圖 1(b)。方程式(30)中，令{I} = ∫<sub>0</sub><sup>t</sup>{U(τ)}dτ，其中{I}為 m×1 的向量方程式。將(30)代入(29)，可表成：

$$\begin{aligned} \dot{\{q\}} &= [B_s]\{q\} - [M][K_p][H]^{-1}\{q\} \\ &\quad - [M][K_I][H]^{-1}\{I\} + [E]\{W\} \\ \dot{\{I\}} &= \{U(t)\} = ([I] - [A])\{q\} = [H]\{q\} \end{aligned}$$

上式可整理成：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\{q\}} \\ \dot{\{I\}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [B_s] & [0] \\ [H] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{q\} \\ \{I\} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [M] \\ [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [K_p][K_I] \\ [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [H]^{-1}\{q\} \\ \{I\} \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} [E] & [0] \\ [F] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{W\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

上式可再重新表成：

$$\{\dot{\{\tilde{q}\}}\} = [\tilde{B}_s]\{\tilde{q}\} - [\tilde{M}][K_{PI}][H]^{-1}\{\tilde{q}\} + [\tilde{E}]\{\tilde{W}\} \quad (31)$$

此處，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\{q\}} \\ \dot{\{I\}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\{\tilde{q}\}} \\ \dot{\{\tilde{I}\}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} [B_s] & [0] \\ [H] & [0] \end{bmatrix} = [\tilde{B}_s], \begin{bmatrix} [H]^{-1}\{q\} \\ \{I\} \end{bmatrix} = \{\tilde{q}\} \\ \begin{bmatrix} [M] \\ [0] \end{bmatrix} &= [\tilde{M}], \begin{bmatrix} [K_p][K_I] \\ [I] \end{bmatrix} = [K_{PI}], \\ \begin{bmatrix} [E] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} &= [\tilde{E}], \begin{bmatrix} \{W\} \\ \{0\} \end{bmatrix} = \{\tilde{W}\} \end{aligned}$$

由方程式(30)及(31)可整理成，

$$\begin{aligned} \dot{\{\tilde{q}\}} &= ([\tilde{B}_s] - [\tilde{M}][K_{PI}][H]^{-1})\{\tilde{q}\} + [\tilde{E}]\{\tilde{W}\} \\ \{\hat{U}_{PI}\} &= -[K_{PI}] \begin{bmatrix} \{q\} \\ \{I\} \end{bmatrix} = -[K_{PI}]\{\tilde{q}\} = -[K_{PI}][H]^{-1}\{U_{PI}\} \quad (32) \\ \{U_{PI}(t)\} &= [H]\{\tilde{q}(t)\} \end{aligned}$$

因此，方程式(26)可重新以新變數表成：

$$J = 1/2 \int_0^t (\{\tilde{q} - \tilde{q}_d\}^T [S_a] \{\tilde{q} - \tilde{q}_d\} + \{\hat{U}_{PI}\}^T [R_a] \{\hat{U}_{PI}\}) dt \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \text{此處，} [S_a] &= \text{diag} [S, [0]] = \begin{bmatrix} [H]^T [Q] [H], [0] \\ [0], [0] \end{bmatrix} \\ [R_a] &= \text{diag} [R, [0]] \end{aligned}$$

最佳控制向量{\hat{U}\_{PI}(t)}，可極小化方程式(32)。此最佳控制向量的解，明顯可得(Kuo, 1977)：

$$\begin{aligned} \{\hat{U}_{PI}(t)\} &= -[R_a]^{-1} [\tilde{M}]^T [P] \{\tilde{q}(t)\} \\ &= -[K_{PI}][H]^{-1} \{U_{PI}(t)\} \quad \dots (34) \end{aligned}$$

其中，[P]=[P]<sup>T</sup>是下列 Riccati 方程式的正定解：

$$\begin{aligned} \dot{[P]} &= -[P][\tilde{B}_s] - [\tilde{B}_s]^T [P] \\ &\quad + [P][\tilde{M}]^T [R_a]^{-1} [\tilde{M}]^T [P] - [S_a] = 0, [P(t_f)] = 0 \end{aligned}$$

假如系統(32)具可觀測性及可控制性，此時方程式(32)中，當 t<sub>f</sub> 趨近於無窮大，此 LQR 變成一次佳控制器設計，而方程式(34)變成次佳控制向量：

$$\begin{aligned} \{\hat{U}_{PI}(t)\} &= -[R_a]^{-1} [M_a]^T [P^*] \{\tilde{q}(t)\} \\ &= -[K_{PI}^*] \{\tilde{q}(t)\} = -[K_{PI}^*][H]^{-1} \{U_{PI}(t)\} \quad \dots (35) \end{aligned}$$

其中，[P]<sup>\*</sup>=[P]<sup>\*</sup>T 是唯一下式代數 Riccati 方程式的正定解：

$$\begin{aligned} -[P^*][\tilde{B}_s] - [\tilde{B}_s]^T [P^*] + [P^*][M][R_a]^{-1}[M]^T [P^*] \\ - [S_a] = 0 \quad , \text{因此，} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\hat{U}_{PI}(t)\} &= -[K_{PI}]\{\tilde{q}\} \\ &= -\begin{bmatrix} [K_p][K_I][H]^{-1} \\ [H] \int \{q(\tau)\} d\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{q(t)\} \\ \int \{q(\tau)\} d\tau \end{bmatrix} \quad \dots (36) \\ &= -[K_p]\{q(t)\} - [K_I] \int \{q(\tau)\} d\tau \end{aligned}$$



由上式可知， $[K_p]$ 及 $[K_i]$ 為 $[K_{PI}]$ 之次矩陣，這如同定義在方程式(18)及(26)中所欲求最佳回授啟始 LQR 的控制器，此最佳控制能被表成一種狀態向量的線性方程式和某個其它狀態向量的線性方程式的結合。若與古典控制理論相較，此過程可視為以現代控制理論所設計的比例加積分 (PI)回授控制器。

### 三、模式模擬

#### 1. 農場系統模式

雲林縣養豬產值佔全省第 2 位，雖然大多數養豬戶均設置廢水處理廠，但仍有少數未滿 200 頭的養豬戶並未實施。本模式選擇位於該縣麥寮鄉由陳氏六位兄弟所共有的一家農場，佔地約 18 公頃，養 200 頭豬及玉米耕地為模擬之農場。經由 83 年 1 月 6 日起，約計一年時間的農場調查得知，農戶為維持農場每月得購入 2.5 噸的飼料，提供給豬舍做為豬隻食物；另購入 1.79 噸肥料來施肥玉米田，平均每月有 1.71 噸的成熟玉米可做為豬隻的主食，由豬的排糞尿每月也可提供給玉米田。在農田收成方面，每月可生產肉食 0.85 噸，糧食 0.9 噸。現定義該農場中，由豬舍、豬隻及飼料等所組成稱為“豬庫”，由玉米田、肥料、玉米植物等所組成，稱為“玉米庫”，此二庫則形成一農場系統模式(圖 2)。一年內在未購入幼豬時期，由多數成豬所組成的豬庫重 2.56 噸，成熟玉米庫重 1.71 噸。上述之資料可整理成農場磷流量調查表(表 1)。成熟玉米當成豬之主食，玉米田由豬糞沉澱初步發酵後，供給當成養份。玉米中的磷素經由豬食後，由豬糞還回玉米田，形成磷素流動(圖 2)。整體農場系統模式磷流控制系統示於圖 3。豬庫及玉米庫中磷流濃度控制流程則示於圖 4。

豬糞中因含高濃度磷量，減少養豬頭數或降低豬隻體重，雖可減少磷量，但對於以提高產值為標的的農戶卻是衝突；因而如何提高養豬產量，並達成排放磷量對環境衝擊減至最少，成為所面臨的課題。取捨經營所得與造成環境污染(實質或道德良心)受罰，是一種困難的權衡。在此情況下應用最佳化原理，來達成解決此問題為一有

效策略。

農場系統模式假設包括：(1)豬糞尿供給玉米田均在農戶耕地範圍內，無“放流口”放流於鄰地，(2)豬糞中所含磷素，經發酵過程無磷素流失(即無殘量)，並為玉米所吸收。玉米庫除本身磷含量外依比例調配外加的磷素，(3)玉米庫提供給豬之食物中，玉米成份實際只佔 65%~70%，本模式假設為 100%，及(4) 磷肥及磷飼料，兩者均以總磷濃度表示。

#### 2. 農場系統動態方程式

圖 2 所示為一農場系統模式，其中定義豬庫為第 1 資源庫，穩定時庫存量為  $q_1$ ，“玉米庫”為第 2 資源庫，其穩定時庫存量為  $q_2$ ， $O_{12}$  表由玉米庫流到豬庫的量； $O_{21}$  表由豬庫流到玉米庫的量；則， $b_{11}$  為輸出每單位豬庫的量= $-(U_1+O_{12})/\text{單位數}$ ]= $-(2.50+2)/2.56=-1.76$ ； $b_{12}$  為每單位玉米庫流到豬庫的量  $O_{12}/q_2=2/1.71=1.17$ ； $b_{21}$  為輸出每單位豬庫流到玉米庫的量= $O_{21}/q_1=0.74/2.56=0.29$ ； $b_{22}$  為輸出每單位玉米庫流到玉米庫的量= $-(U_2+O_{21})/\text{單位數}$  = $-(1.79+0.74)/1.71=-1.48$ 。

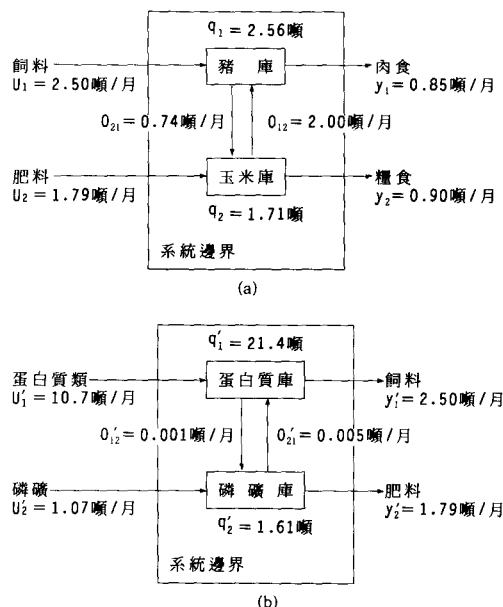


圖 2 農場系統模式中之磷流傳輸路徑：(a) 系統輸出係數，及(b)系統輸入係數

表 1 麥寮鄉陳氏農場磷流量現況調查表

農 地 現 況 調 查	農場名稱	麥寮鄉陳氏農場			
	地點	雲林縣麥寮鄉			
	面積	豬舍及玉米田，共十八公頃			
	調查時間	83年1月6日起約一年不定期訪調			
	現狀輸出系統 [B <sub>s</sub> ]	豬 庫	飼料量 (U <sub>1</sub> )	2.50 噸/月	
			肉食量 (y <sub>1</sub> )	0.85 噸/月	
			豬糞尿產量 (O <sub>21</sub> )	0.74 噸/月	
			穩定庫存量 (q <sub>1</sub> )	2.56 噸	
	現狀輸出系統 [B <sub>s</sub> ]	玉 米 庫	肥料量 (U <sub>2</sub> )	1.79 噸/月	
			糧食量 (y <sub>2</sub> )	0.90 噸/月	
			成熟玉米量 (O <sub>12</sub> )	2.00 噸/月	
			穩定庫存量 (q <sub>2</sub> )	1.71 噸	
	啟始輸入系統 [A]	蛋白質庫	蛋白質量 (U' <sub>1</sub> )	10.7 噸/月	
			飼料量 (U <sub>1</sub> )	2.50 噸/月	
			提供磷礦量 (O' <sub>21</sub> )	0.005 噸/月	
穩定庫存量 (q' <sub>1</sub> )			21.4 噸		
磷礦庫		原磷礦量 (U' <sub>2</sub> )	1.075 噸/月		
		肥料量 (U <sub>2</sub> )	1.79 噸/月		
		提供蛋白質庫 (O' <sub>12</sub> )	0.0015 噸		
		穩定庫存量 (q' <sub>2</sub> )	1.61 噸		
備 註	穩定時個別改變量中豬庫較玉米庫變動小，因玉米受氣候影響較大。				

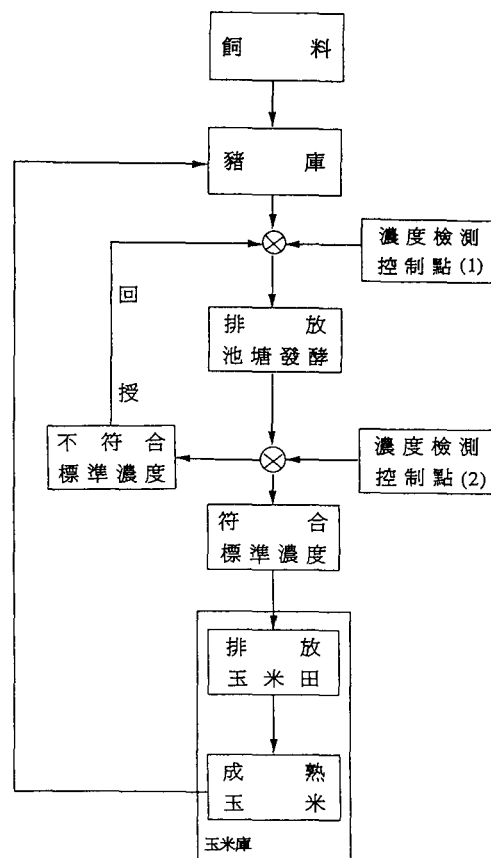


圖 4 豬庫、玉米庫磷流濃度流程控制示意圖

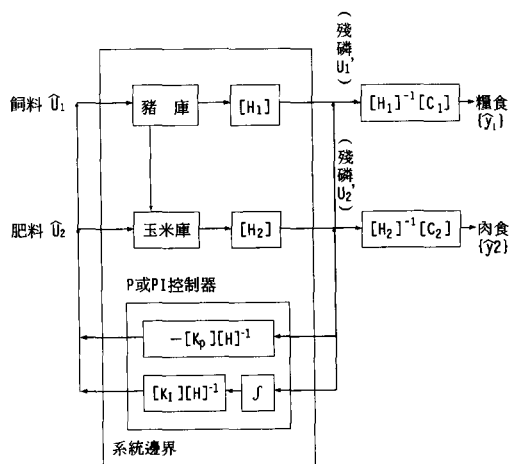


圖 3 農場系統模式磷流控制系統示意圖

[B<sub>s</sub>]矩陣可表成：

$$[B_s] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.76 & 1.17 \\ 0.29 & -1.48 \end{bmatrix}.$$

同理可得輸入 [A] 矩陣係數： $a_{11} = U'_1 + O'_{12} / \text{單位數} = (10.7 + 3.2) / 21.4 = 0.5$ ； $a_{12} = O'_{12} / q_2 = 0.0015 / 1.61 \approx 0$ ； $a_{21} = O_{21} / q_2 = 0.005 / 21.4 \approx 0$ ； $a_{22} = (U_2 + O_{21}) / \text{單位數} = (1.075 + 0.005) / 1.61 = 0.67$ 。

因此，輸入[A]矩陣可表為：

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.67 \end{bmatrix}.$$

由方程式(2)可知，在農場中 $\Delta B$  由於豬庫中飼料量  $U_1$  為經農戶請營養師調配，並為室內飼養豬隻可穩定吸收；但輸入玉米庫的肥料量  $U_2$  在戶外卻易受土壤肥瘠、污染入侵、雨量、日照量等不確定因素，而影響玉米田吸收，產生的波動較高，現假設兩倍於豬庫，即肥料真正被玉米田吸收可能只達半量。設豬庫波動係數  $\Delta b_{11}=0.5$ ，則玉米庫波動係數  $\Delta b_{22}=1.0 \circ O_{12}, O_{21}$  為系統穩定狀態的定值無波動，因此， $\Delta b_{21}$  及  $\Delta b_{12}$  均為零，故 $[\Delta B]$ 可表為：

$$[\Delta B] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

又由方程式(16)可知，

$$[H] = [I - A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.33 \end{bmatrix}$$

又由方程式(17)可求得 $[M]$ 矩陣，

$$[M] = [I - A]^{-1} \Delta B = [H]^{-1} \Delta B \\ = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.33 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.33 \end{bmatrix}$$

將上述數值代入方程式可得農場磷流之線性動態系統方程式為

$$\begin{cases} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} -1.76 & 1.17 \\ 0.29 & -1.48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.33 \end{bmatrix} \begin{cases} U_1 \\ U_2 \end{cases} \dots (37)$$

$$\begin{cases} U_1 \\ U_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

### 3. 線性動態探討

#### (1) 穩定性分析

由方程式(18)可知，對於非時變線性系統其平衡點穩定的條件是矩陣 $[B]$ 的特徵值實數部分均小於零。對於此農場的磷流模式而言，矩陣 $[B_s]$ 其特徵值為 $\lambda_1=-2.22$  及  $\lambda_2 = -1.02$ ，因此，當  $t \rightarrow \infty$ ，系統可恢復到平衡狀態，因此農場磷流動態模式是穩定的。

#### (2) 可控制觀測性分析

可控制性應滿足  $|[Z][Z]^T| \neq 0$ ，即， $[Z] = [[M] | [B_s][M] | \dots | [B_s]^{n-1}[M]]$ ，為  $n$  秩：

$$[B_s][M] = \begin{bmatrix} -1.76 & 1.17 \\ 0.29 & -1.48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.76 & 37.44 \\ 0.29 & -47.36 \end{bmatrix}$$

因， $|Z| = \begin{vmatrix} -1.76 & 37.44 \\ 0.29 & -1.48 \end{vmatrix} \neq 0$ ，故該系統具可控制性。

而可觀測性應滿足  $|[V][V]^T| \neq 0$ ，即， $[V] = [[H]^T | [B_s]^T[H]^T | \dots | ([B_s]^{n-1})^T[H]^T]$ ，為  $n$  秩：

$$[B_s]^T[H]^T = \begin{bmatrix} -1.76 & 1.17 \\ 0.29 & -1.48 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.33 \end{bmatrix}^T \\ = \begin{bmatrix} -0.88 & 0.1 \\ -0.59 & -0.49 \end{bmatrix}$$

因， $|V| = \begin{vmatrix} 0.5 & 0 & -0.88 & 0.1 \\ 0 & 0.33 & 0.59 & -0.49 \end{vmatrix} \neq 0$ ，故該系統具可觀測性。

### 4. 廢棄物停留時間探討

由方程式(25)可求得殘磷量在農場系統中之平均時間為：

$$[T] = \int_0^{\infty} [P(t)] dt = -([B_s])^{-1}，而[B_s]其反矩陣為：$$

$$[B_s]^{-1} = \begin{bmatrix} -0.65 & -0.52 \\ -0.13 & -0.78 \end{bmatrix}，$$

因此，

$$\begin{cases} \bar{t} \\ \bar{t} \end{cases} = -[B_s]^{-1} \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases} = \begin{bmatrix} -0.65 & -0.52 \\ -0.13 & -0.78 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.17 \\ 0.91 \end{bmatrix}，$$

即殘磷量在豬庫停留時間為 1.17 年，而在玉米庫停留時間則為 0.91 年。

## 5. 最佳回授控制器設計

### (1) P 控制策略

由方程式(26)選擇權重矩陣[R]及[S]，因方程式(26)之J為一數，而非向量，故[S]及[R]必為對角矩陣： $[S] = \text{diag} [s_{11}, s_{22}]$ 及 $[R] = \text{diag} [r_{11}, r_{22}]$  (Palm, 1984)。現令  $s_{22} = r_{11} = r_{22} = 1$ ， $s_{11}$  分別以 1, 5, 10, 100 為權重係數，代入方程式(28b)，由軟體 Matlab 可求得：

$$[K_{p1}] = \begin{bmatrix} 0.0280 & 0.0010 \\ 0.0390 & 0.9560 \end{bmatrix} \quad (s_{11} = 1),$$

$$[K_{p2}] = \begin{bmatrix} 0.1636 & 0.0200 \\ 0.6396 & 0.1956 \end{bmatrix} \quad (s_{11} = 5),$$

$$[K_{p3}] = \begin{bmatrix} 1.0116 & 0.0730 \\ 2.3362 & 0.3752 \end{bmatrix} \quad (s_{11} = 10),$$

$$[K_{p4}] = \begin{bmatrix} 5.5494 & 0.2205 \\ 7.0568 & 0.6462 \end{bmatrix} \quad (s_{11} = 100),$$

農場系統之最佳比例回授控制系統設計流程示於圖 5。

### (2) PI 控制策略

以方程式(33)中先求出 $[S_d]$ 及 $[R_d]$ ，並令  $\tilde{e}$  表實際的狀態值與設計(即欲求的值)的差，即  $\tilde{e} = \tilde{q}_p - \tilde{q}_d$ ，方程式(33)可重新寫成：

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{ \tilde{e}^T [S_d] \tilde{e} + \{U_{PI}\}^T [R] \{U_{PI}\} \} dt \quad (38)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{ \tilde{q}_p - \tilde{q}_d \}^T [S_d] \{ \tilde{q}_p - \tilde{q}_d \} + \{U_{PI}\}^T [R] \{U_{PI}\} \} dt$$

輸入控制變數  $\{U_{PI}\}$ ，即肥料、飼料等若能以最少的成本，並達成磷流排放標準，即為最佳經營策略，此為使用最佳化原理的意義。 $[S_d]$ 及 $[R_d]$ 可分別表為 $[S_d] = \text{diag} [s_{11}, s_{22}, s_{33}, s_{44}]$ 及 $[R_d] = \text{diag} [r_{11}, r_{22}, r_{33}, r_{44}]$ 。令  $s_{22} = s_{33} = s_{44} = r_{11} = r_{22} = 1$ ， $s_{11}$  分別以 1, 5, 10, 100 為權重係數，代入方程式(34)及(35)後，可由 Matlab 軟體求得：

$$[K_{pi1}] = \begin{bmatrix} 0.3189 & 0.0126 & 0.9964 & -0.0844 \\ 0.2340 & 0.9442 & 0.0844 & 0.9964 \end{bmatrix} \quad (s_{11} = 1),$$

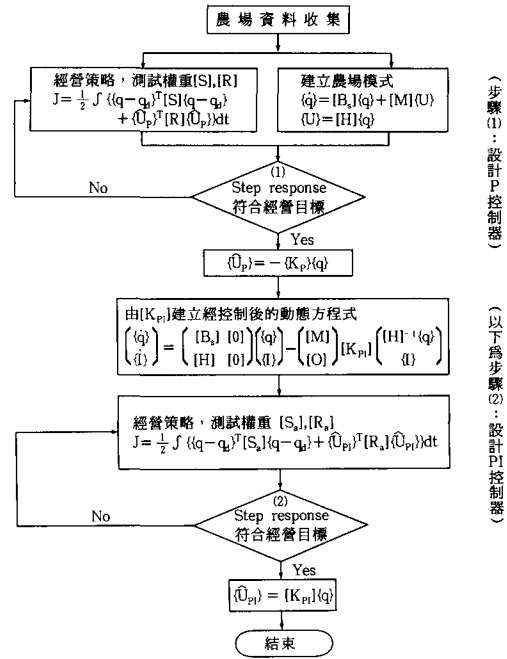


圖 5 農場系統最佳回授 P 及 PI 控制系統設計流程圖

$$[K_{pi2}] = \begin{bmatrix} 0.6774 & 0.0440 & 0.9986 & -0.0535 \\ 1.2996 & 0.3914 & 0.0535 & 0.9986 \end{bmatrix} \quad (s_{11} = 5),$$

$$[K_{pi3}] = \begin{bmatrix} 0.9997 & 0.0669 & 0.9999 & -0.0135 \\ 2.1129 & 0.3546 & 0.0135 & 0.9999 \end{bmatrix} \quad (s_{11} = 10),$$

$$[K_{pi4}] = \begin{bmatrix} 0.6774 & 0.0440 & 0.9986 & -0.0535 \\ 1.2996 & 0.3914 & 0.0535 & 0.9986 \end{bmatrix} \quad (s_{11} = 100),$$

其控制系統設計流程，如圖 5 所示。現再將方程式(37)代入方程式(31)可得加入 PI 控制器後的動態方程式為，

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.76 & 1.17 & 0.0 & 0 \\ 0.27 & -1.48 & 0.0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.0 & 0 \\ 0 & 0.33 & 0.0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.32 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{PI} \\ K_{PI} \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 & 0 \\ 2.5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1.76 & 1.17 & 0.0 & 0 \\ 0.29 & -1.48 & 0.0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.0 & 0 \\ 0 & 0.33 & 0.0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.32 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [K_{PI}] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 & 0 \\ 2.5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

#### 四、結果與討論

在未加入控制的動態方程式與加入比例控制器後繪出之農場豬庫中，磷流穩態誤差時間響應示於圖 6。圖 6 指出，農場中未加入控制器時，磷流濃度的暫態反應由零開始，約經 2 個月後與欲求值的誤差可達 0.33ppm，並維持此標準。當加入比例控制器後，隨著權重的增加，磷流濃度漸漸接近穩態誤差，如權重  $s_{11}=1$  時，濃度誤差為 0.275ppm；權重  $s_{11}=5$  時，為 0.101ppm；權重  $s_{11}=10$  時，為 0.058ppm；但權重增至  $s_{11}=100$  時，卻仍有 0.03ppm 的穩態誤差，此說明比例控制有無法完全消除穩態誤差的缺點。

當有害蟲（設為  $W_{1,1}=3.5$ ）、地下水污染（設為  $W_2=5.5$ ），等已知農場干擾時，豬庫、玉米庫的磷存量，可經 PI 控制器來消除此常數干擾（圖 7）。圖 7 中  $W_{1,2}=7.5$  時暫態響應達到 0.93 個月後被控制下來；同理可知  $W_{1,1}=3.5$ ， $W_2=5.5$ ， $W_{1,2}=7.5$ ，約在四個月後，干擾即被完全消除。

圖 8 指出，農場在未加入控制器時（圖 7），當經 2 個月後，磷流穩態誤差為 0.33ppm，並維持此標準。當加入比例加積分控制器後，權重  $s_{11}=1$  時，磷流濃度由零開始，在半個月後到達最高值 0.27 ppm 後，濃度就開始漸漸降低到零值；權重  $s_{11}=10$  時，磷流濃度到距穩態誤差的 0.165ppm 時，即被控制下來；在經一年後，可達成穩態誤差為 0 的標準；權重  $s_{11}=100$  時，濃度在達成距穩態的 0.13ppm 時，即可控制下來，並於一年後達成穩態誤差為 0。整體而言，隨著權重的增加，比例加積分控制器可縮短漂移 (overshoot) 值，最後並完全消除穩態誤差。

未加入控制的動態方程式與加入 PI 控制器後繪出的農場豬庫中磷流穩態誤差時間響應示於圖 9，其中設定欲求磷流濃度為 80 ppm。圖 9 指出，豬庫磷存量，在加入比例加積分控制器後，隨著控制器權重的增加，而達成所欲求的 80ppm 時的時間響應。在未控制時豬庫磷流濃度為 145ppm，此不符合環保標準；當權重  $q_{11}=1$

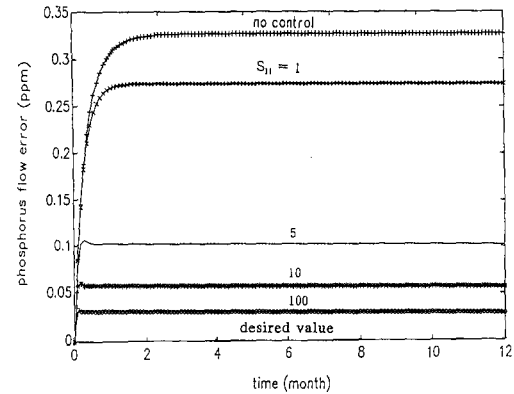


圖 6 豬庫( $q_1$ )之磷存量在未控制及加入 P 控制後（權重  $S_{11}=1, 5, 10$  及 100），磷量穩態誤差時間響應

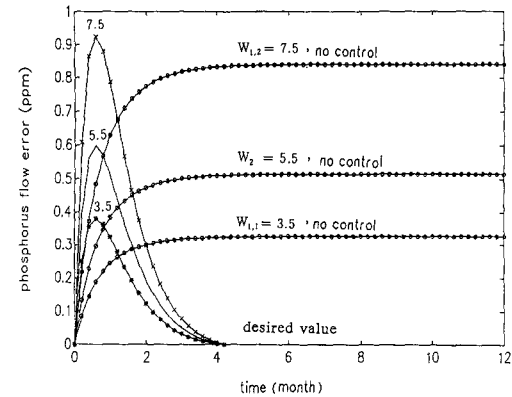


圖 7 加入 PI 控制器後，當常數干擾  $W_{1,1}=3.5$ ， $W_2=5.5$ ， $W_{1,2}=7.5$  時，豬庫磷存量穩態誤差之時間響應

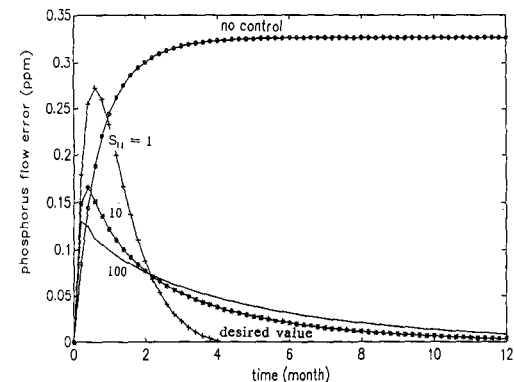


圖 8 豬庫磷存量( $q_1$ )在未控制及加入 PI 控制器後（權重  $S_{11}=1, 10$  及 100），磷量穩態誤差之時間響應

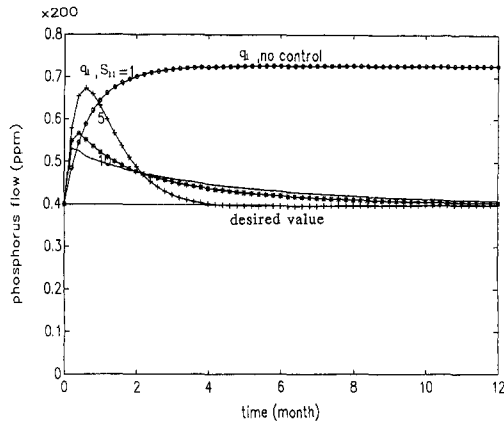


圖 9 豬庫磷存量( $q_1$ )，加入 PI 控制器( 權重  $S_{11}=1$ ，5 及 10 )，達成欲求值之時間響應

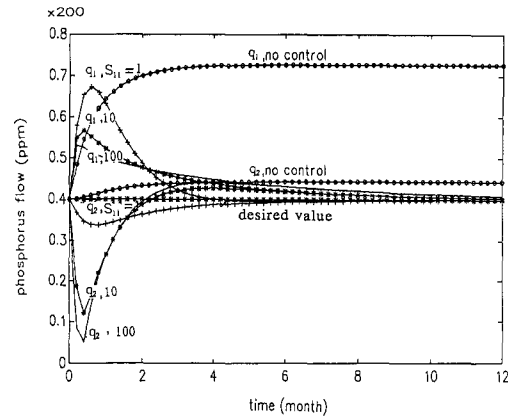


圖 10 豬庫( $q_1$ )及玉米庫( $q_2$ )之磷存量，在未控制與加入 PI 控制器後( 權重  $S_{11}=1$ ，10 及 100 )之時間響應比較

時，濃度的暫態值升至 132ppm 時，被控制下來； $q_{11}=10$  時，濃度在升至 106ppm 時，即被控制下來，此說明隨著控制器調整參數而降低上升時間 (rise time) 並縮短漂移量。

圖 10 豬庫玉米庫之磷流存量，在未控制及加入控制器權重改變後，達成欲求值之時間響應比較。圖 10 指出，豬庫( $q_1$ )，玉米庫( $q_2$ )，在未控制及加入控制器後，因權重增加所產生二庫存磷量互為消長的時間響應。豬庫與玉米庫在權重加重後，上升時間及漂移量方面，豬庫逐漸減少，玉米庫卻相反增加，此即互為“消長”的動態關係。此原因乃因權重加重後，豬庫的暫態濃度在較低值即可被“壓抑”下來，豬庫濃度減少，玉米庫即須提供較多的濃度給豬庫而造成。整體而言，豬庫停留時間為 1.17 年，玉米庫停留時間為 0.91 年，即約一年後農場濃度可維持平衡。

未加入控制器時：此時豬庫由於添加飼料，使豬糞的排出濃度，在池塘發酵後達到 148ppm；而玉米庫在未加入磷肥時，磷流濃度因只有豬糞發酵後的排水水當成養料，因此濃度只有 86ppm。加入比例加積分控制器時：(i) 權重  $s_{11}=1$ ：此時豬庫濃度，由標準值逐漸增高至 136ppm 後開始下降，此時玉米庫濃度由於將玉米當成豬的主食，而使玉米庫濃度降至標準值以

下，並在一個月後，降至最低值 70ppm。(ii) 權重  $s_{11}=10$ ：此時豬庫達到最高值的 136ppm (消長關係)。至此玉米庫也獲得豬庫提供的磷糞而逐漸增高濃度，兩者在 6 個月後可達成 80ppm，至此維持此標準值。豬庫的濃度在半個月後，由於玉米庫提供玉米使豬庫的磷濃度達到 114ppm，玉米庫卻降至 26ppm，此後豬庫磷濃度漸降，玉米庫磷濃度漸增，二者約在一年後達到的標準值。(iii) 權重  $s_{11}=100$ ：此時豬庫在 1/3 個月後，達成 106 ppm，玉米庫則在 4/5 個月降至最低的 50ppm，此後豬庫濃度漸減，玉米庫濃度漸增，在一年後可達成 80ppm 的標準值，至此以後並維持此值。

當系統具可控制、可觀測性時，系統才能達成以廢棄物的量測來對受控系統具影響效力。此時廢棄物的輸出，成為對玉米的輸入 (回授)；此與線性系統的模式一致，因此可應用線性系統分析此封閉型農業生態行為。

剩餘資源向量  $\{q_R(t)\}$  與  $[H]$  矩陣：(a) 具自律性：此時農場的磷量可“完全”由池塘發酵及玉米田吸收，最後再回到豬隻身上，因而  $\{q(t)\} = \{0\}$ ，此處  $[H]$  可能為零矩陣。(b) 實際農場：此時農場中的豬糞磷量，並“不能完全”為玉米田所吸收。其影響因子，除包括微生物只部分分解成無機質，地下水污染、有害化肥、害蟲等干擾均

會”輸入”資源造成影響。此可表為具有“輸入”意涵的[A]矩陣。當資源量減去輸入[A]矩陣的影響後，可表成[H]{q(t)}，本文為豬糞磷濃度經[H]作用後的剩餘物，即殘磷濃度。(c) 模式假設中，熱力學第一定律所述的能量不滅定律為涉及“量”的平衡，第二定律所述的能量傳遞方向和轉換效率的規律，為“質”的轉換。以農場為例，豬庫排放磷量給玉米庫為物質流動，玉米庫提供玉米給豬食為能量流動；而農業為求最佳產值，即為應用第二定律中有關的轉換效率及最佳法求出最佳輸入值（磷肥、磷飼料），以求得轉換最高效率的玉米與豬肉量。而磷流傳輸能達成控制目的，其間包括豬隻排放的豬糞、玉米、控制器三者，能藉著熱力學定律而相互轉換。換言之，外加控制器為“能量”的調節器。

本模式模擬乃使用 Matlab control system toolbox 軟體，在比例加積分控制下響應雖慢，對農場並不受影響，卻可消除比例控制器所無法消除的“偏位”(overshoot)，當加入控制器後隨著權重增加，系統會迅速達成欲求值。此穩態誤差的消除是以生物法或化學法等來完成。但權重增加也相對提高經營成本。本文未採用比例加積分加微分控制器 (PID) 來設計，是因微分作用會將農業生態的雜訊放大，並且依 P, PI, PID 每增加一等級，約增加二成的製作成本。不同的控制器各有其優缺點，可依控制要求程度來決定種類。

封閉型控制系統的回授性能，當加入 PI 控制後，只要系統仍保持穩定，即  $\{\tilde{B}_s\} - [\tilde{M}][K_{PI}]$  的特性根都具負實部，則在穩態下， $\{q\} = 0, \{j\} = (\{y\} - \{r\}) = 0$  即誤差為零。所以只要系統保持穩定，即使受控系統中參數有所變動，經此控制的結果仍為正確。這種現象可稱為具有“強韌”性 (robustness)。在控制系統中受控系統如同“工廠”，一般由積體電路及機械來構成。而本文則由豬隻、玉米田的“生物”所構成，會受到生長、遺傳機制等複雜多變的環境影響，與一般非生物只受溫度、濕度等干擾情況有所不同。

## 五、結論與建議

1. 本文以農業廢棄物的再利用來實踐有機農業，並以外加控制器的設計達成提高產量的「經濟」要求。該二者可說兼顧了「生態與經濟」，此即永續農業之精神。
2. 控制系統模擬結果顯示，當加入最佳比例加積分控制器後，隨著權重增加，此控制系統除能更迅速消除比例控制器所無法消除的穩態誤差，對於害蟲，污染源侵入等常數干擾亦能抑除，使磷流的排放濃度達到有效控制，因而控制理論能實際有效地做為農業生態控制的有力工具。
3. 本文的 P 或 PI 控制器的參數，若能引入適應控制器(adaptive controller)當更理想，因大部分農場系統是非固定的(nonstationary)，如農委會政策改變，養豬戶飼養種豬或肉豬頭數及飼料、肥料等改變都會使線性模式失效。欲解決上述問題，可藉助適應控制器以達最適化操作狀況。
4. 封閉型農業生態的整體環境實際上較複雜，本文以豬庫及玉米庫描述農場，只為簡化問題。此種環境控制可用豬庫及玉米庫做一初始指標，然而其它環境變數，如二氧化碳濃度、有毒氣體、地下水污染，畜舍中氣懸顆粒及通風系統等；特別是因應外銷政策、農委會政策、GATT 的加入，而如能應用卡門濾波監測生物系統，使早期能監測到生物或環境的不正常趨勢，及農戶經營農場的經驗與效率均應納入監測或控制決策中，方能更有效掌握生態之多變與多樣性。
5. 農場生態環境須有長期的觀察、記錄與分析，方有足夠資料做為研究判斷。例如施放給玉米田的豬糞中：(1)有多少尚存留土壤中，在短期無法為玉米田所吸收，在多少時間會滲透到鄰地造成優養污染?(2)有多少土壤微生物所利用?及(3)有多少隨雨水經由土壤進入溪流河川?這些問題的解

答，均關係外流豬糞或肥料養分可能造成的污染及其它生態方面的影響。未來的研究期盼能將這些問題列入研究或量測的範圍，並將長期調查列為重要的工作。

### 誌 謝

本研究承已故本所王鼎盛教授，中央研究院統計所傅博士承德，台灣省林業試驗所金博士恒鏞及逢甲大學自動控制研究所黃建立副教授所提供寶貴卓見，使本文更臻完善，謹此致謝。

### 參考文獻

- 沈韶儀。1991。豬糞堆肥穩定性之探討。國立台灣大學農業化學研究所博士論文。
- 周昌弘。1993。全球變遷：福山森林生態系長期研究年度報告摘要集。台灣省林業試驗所森林集水區經營系編輯。
- 侯文祥、廖中明。1984。農漁牧綜合經營系統之模擬與規劃。科學農業，32(1-2)，51-64。
- 陳連興。1989。德基水庫邊坡果園區及周緣林帶中營養之動態研究。國立台灣大學農業化學研究所碩士論文。
- 馬清華。1989。台灣土壤磷模式基礎資料之建立。國立台灣大學農業化學研究所碩士論文。
- 黃佳珊。1971。澎湖縣農牧綜合經營計劃之經濟評價。國立台灣大學農業經濟研究所碩士論文。
- 黃德桂。1991。豬糞尿處理與堆肥製造「糞土變黃金」。中華生質能源協會。
- 廖中明。1991。由工程控制學觀點分析農業生態系統之動態行為。中國農工學報，37(2)，14-24。
- 廖中明。1992。封閉型農業環境最佳溫濕度控制系統設計。中國農工學報，38(1)，43-53。
- 廖中明，王鼎盛，吳振甫。1992。洋菇舍溫濕度及二氧化碳濃度聯控系統設計。中國農工學報，38(2)，40-61。
- 盧虎生，朱鈞。1993。保育生根：接續大地生機的永續農業。中華生質能源學會。
- Berry, W. 1977. (2<sup>nd</sup> ed.) The unsettling of America culture and agriculture. Abon Books, New York.
- Boling, R. and Van Sickle, J. 1975. Control theory in ecosystem management. PP. 219-229. In Levin, S. ed. Ecological analysis and prediction SIAM, Philadelphia.
- Bunce, R.G.H., L. Ryszkowski and M.G. Paoletti. 1993. Landscape ecology and agroecosystem. Lewis Publishers, Ann Arbor, MI.
- Chen, C.T. 1970. Linear system control theory and design. Harcourt Brace Jovanouich, Inc. Saunders College Publishing. New York, N.Y.
- Coleman, D. C., Cole C.V. and Elliott, E.T. 1984. Decomposition, organic matter turnover, and nutrient dynamics in agroecosystems. In Lowance, R. and Stinner, B.R. Eds. Agricultural ecosystems, A Wiley-Interscience Publication, New York, N.Y.
- D'azzo, J.J. & Houpis, T.H. 1988. (3<sup>rd</sup> Ed.) Linear control system analysis and design. McGraw-Hill, Singapore.
- Gelb, A., Kasper, J.F., Jr., Nash, R.A., Price, C.F. and Sather-land, A.A. 1974. Applied optimal estimation, MIT Press, Cambridge, Mass.
- Georgescu-Roegen, N. 1971. The entropy law and the economic process. Harvard University Press, Cambridge, MA.
- Kalman, R.E. and Bucy, R.S. 1961. New results in linear filtering and prediction theory. ASME Journal of Basic Engineering, Series D, 83, 95-108.
- Kercker, J. 1983. Closed-form solutions to sensitivity equations in the frequency and time domains for linear models of ecosystems. Ecol. Modelling. 18, 209-212.
- Kuo, B.C. 1977. Digital control system. Prentice-Hall, Englewood cliffs, New Jersey.
- Liao, C.M. and Feddes, J.J.R. 1990. Mathematical analysis of a lumped-parameter model for



- describing the behavior of airborne dust in animal housing. *Appl. Math. Modelling* 14(5), 248-257.
- Liao, C.M. and Feddes, J.J.R. 1993. Design of an airborne dust control system in ventilated animal housing. *Appl. Math. Modelling* 17(3), 133-140.
- Liao, C.M. 1995. An optimal thermal destratification control system synthesis in aquaculture ponds. *Appl. Math. Modelling* 19(5), 278-286.
- Lowes, A. and Blackwell, C. 1975. Applications of modern control theory to ecological systems. Pp.299-305. In Levin, S. Ed. *Ecosystems analysis and prediction*. SIAM, Philadelphia.
- Lowrance, R. 1986. A hierarchical approach to sustainable agriculture. *America Journal of Alternative Agriculture* 1(4), 169-173.
- Maekawa, T., Liao, C.M. and Feng, X.D. 1995. Nitrogen and phosphorus removal for swine wastewater using intermittent aeration batch reactor followed ammonium crystallization process. *Water Research*.
- Miller, R.E. and Blair, P.D. 1985. *Input-output analysis: Foundations and extensions*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Mitsch, W.J. 1989. *Ecological engineering: An introduction to ecotechnology*. John Wiley & Sons, New York, 472pp.
- Odum, E.P. 1983. *Basic ecology*. CBS College Publishing, New York, N.Y.
- Olsen, J. 1961. Analog computer models for movement of nuclides through ecosystems. Pp.121-125, In *Radioecology. Proc. First National Symp.*, Colo. State University. Rheinhold Publishing, New York.
- Palm, W.J. 1983. *Modelling, analysis, and control of dynamic systems*. John Wiley and Sons, New York, N. Y.
- Straskraba, M. 1993. Ecotechnology as a new means for environmental management. *Ecological Engineering* 2, 311-311.
- Zadeh, L.A. and Desoer, C.A. 1963. *Linear system theory*. McGraw-Hill, New York, N.Y.

附錄：符號說明

[A(t)]	總輸入係數之不可分解矩陣
[B(t)]	淨輸出係數的部分可分解矩陣
[ $\Delta A(t)$ ]	系統波動時穩定狀態的輸入係數個別改變量
[ $\Delta B(t)$ ]	系統波動時穩定狀態的輸入係數個別改變量
[B <sub>s</sub> ]	n階穩定狀態輸出矩陣
a <sub>ij</sub> (t)	第j個過程中之第i個資源之總輸入係數
b <sub>ij</sub> (t)	第j個過程中之第i個資源之淨輸出係數
C <sub>ik</sub>	第i個元素消耗第k個資源的量
C	包含[B <sub>s</sub> ]的固有值[λ]的值域邊界
[E]	輸入常數干擾向量矩陣
[H]	輸出向量矩陣
[F]	系統輸出常數干擾向量矩陣
((I <sub>ij</sub> (t)))	第j個過程中第i個資源各別的總輸入
((O <sub>ij</sub> (t)))	第j個過程中第i個資源的總輸出，等於((O <sub>ij</sub> (t)))
[k(t)]	控制輸入矩陣
[k <sub>p</sub> ]	比例控制常數矩陣
[k <sub>pi</sub> ]	比例加積分控制常數矩陣
P <sub>ij</sub>	每單元時間第i個元素產生第j個資源的量
[Q]	比例控制的正半定加權矩陣
[R]	比例控制的正定加權矩陣
[R <sub>a</sub> ]	比例加積分控制的正定加權矩陣

收稿日期：民國 88 年 4 月 26 日

修正日期：民國 88 年 6 月 22 日

接受日期：民國 88 年 6 月 30 日