

連續變化降雨強度之一維入滲問題之解析解

Analytical Solution on One Dimensional Infiltration Problem Under Condition of Continuous Changing Rainfall Intensity

國立台灣大學農業工程研究所
博士生

陳建謀
Jiann-Mou Chen

私立中國工商專科學校
土木工程科副教授

陳主惠
Chu-Hui Chen

國立台灣大學農業工程研究所教授
暨國立台灣大學水工試驗所研究員

譚義績
Yih-Chi Tan

摘 要

降雨強度變化對影響入滲過程中之體積含水比變化及入滲率之影響頗大，因此本文基於假設母體通量與體積含水比成線性比例及土壤水力傳導係數與張力水頭之關係為指數分佈之前題下，利用 Kirchoff 積分轉換之方式求解理查(Richards)方程式，可求出連續變化降雨強度下，積水前後土壤體積含水比剖面之解析解，同時可預測達積水所需之時間並可求解停止降雨後之土壤體積含水比剖面。而前人所探討之解析解均以簡化之均勻降雨強度之邊界條件以及均勻分佈之土壤體積含水比剖面的起始條件考量下求解，與實際狀況較不吻合，本文所推導之解析解可應用於預測積水前後之土壤體積含水分佈，以砂土及壤土為例，可模擬降雨強度與時間之分佈呈類似常態分佈，降雨強度變化由小而大，再由大而小，與實際降雨特性較接近，此外所推導之結果具容易運算之優點且可提供考慮連續變化降雨強度之複雜數值模式驗證。

關鍵詞： Kirchoff 積分轉換，張力水頭，母體通量。

ABSTRACT

Variation of rainfall intensity has much influence on the water content and infiltration rate. In this paper, two assumptions are presented, one is the linear relationship between matric flux potential and soil water content, the other is the exponential relationship between hydraulic conductivity and water head. By applying the Kirchoff integral transformation, a one-dimensional Richards's equation is solved under the condition of non-uniform distribution of rainfall intensity and uniform initial volumetric

water content. Previous studies of analytical solutions which assumed uniform distribution of rainfall intensity may not come close to real rainfall condition. The derived analytical solution of this paper can predict ponding time and obtain the solution of soil water content distribution before and after ponding. If it is stop raining suddenly, we are also able to get analytical solution of volumetric water content distribution after stop raining. For example of sand soil and loam soil, it can simulate variation of rainfall intensity looks like normal distribution, which makes the simulation comes close to the real rainfall distribution. Also solutions of this study have the advantage of simple calculation, and can be used to verify more complicated numerical models, which consider continuous changing rainfall intensity.

Keywords: Kirchoff integral transformation , Water head, Matric flux.

一、前言

入滲問題解析解之求解大多利用 Richards equation 為控制方程式，但由於控制方程式中存在非線性項，因此考慮簡化之邊界條件及起始條件或將控制方程式線性化求解，如 Philips [1957] 利用 Boltzmann transformation 解 Richards equation，Eagleson [1970] 由 Richards equation 解出與經驗公式 Horton's equation [1940] 相近之入滲公式；Swartzendruber [1987] 亦求出 Richards equation 的近似解；Salvucci [1996] 採用與 Philips 相似之推導方式，利用時間變數作轉換 (transform) 求出均佈降雨下級數型式之解析解；Serrano [1998] 亦求出均佈降雨下級數型式之解析解，上列之解均只考慮降雨強度為常數之情形下，但實際降雨狀況降雨強度則是隨時間變化的，因此 Warrick [1975] 將控制方程式線性化，假設 Diffusivity 及水力傳導係數之導數為常數下解得任意降雨輸入之解析解；Morel-Seytoux [1978, 1981] 不以 Richards equation 為控制方程式而以 Green and Ampt [1911] 的入滲方程式為基礎，自行推導控制方程式，雖可求解降雨強度變化為片段連續如降雨組體圖之解析解，但仍需結合數值方法求解。本文所推導之解析解則以 Richards equation 為控制方程式考慮連續變化降雨強度下之邊界條件，使所求之解析解與實際降雨狀況更加吻合。

本文利用理查方程式為控制方程式，利用 Kirchoff 積分轉換 (Gardner, 1974)，定義母體通量 $\phi(\psi)$ 將非線性之控制方程式轉換成線性之控制方程式，假設母體通量 $\phi(\psi)$ 與體積含水比 θ 之變化關係為線性以及土壤水力傳導係數 k 與水頭 ψ 之關係滿足 Van Genuchten [1980] 所提出之指數分佈之假設，最後可將控制方程式轉換成擴散方程式之型式而使問題容易求解。可求出不均勻分佈降雨強度及均勻分佈臨前水文條件下，積水前後之體積含水比變化剖面並可預測其產生積水所需之時間 (ponding time)，同時亦可求出停止降雨後之體積含水比變化剖面。

二、入滲問題數學模式

2.1 推導微分方程式之通解

本文之求解方式將問題分成兩個時段進行求解，即降雨時未產生積水前 ($t \leq tp$) 及產生積水後 ($t > tp$) 兩個時段進行求解，假設產生積水後地面積水瞬間排除，僅地表維持飽和，因此積水前後之邊界條件不同，故分成兩個時段進行求解。同時為了求解非線性之理查方程式，本文利用 Kirchoff 積分轉換 (Gardner, 1974)，可將非線性之理查方程式轉換成線性的擴散方程式 (Diffusion equation) 之型式，亦即透過函數轉換方式，將理查方程式之體積含水比函數 $\theta(z, t)$ 轉換成擴散方程式型式之函數 $W(z, t)$ ，由於擴散方程式較容易求解，因此求得 $W(z, t)$ 之解後，透過函數轉換即

可求得函數 $\theta(z,t)$ 之解，今將其求解過程推導如下，首先推導控制方程式之轉換如下。

2.1.1 控制方程式及假設

一維理查方程式可寫成如下的型式：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial k(\theta)}{\partial z} \dots\dots\dots(2.1)$$

(2.1)式為非線性之微分方程式，直接求解較為困難，為了將非線性之控制方程式轉換成線性，使問題易於求解，假設土壤為均質，採用 Kirchoff 積分轉換(Gardner,1974)，定義母體通量(matric flux potential) $\phi(\psi)$ 為：

$$\phi(\psi) = \int_{-\infty}^{\psi} k(\psi) d\psi \dots\dots\dots(2.2)$$

土壤水力傳導係數 k 與張力水頭 ψ 之關係採用 Van Genuchten[1980]所提出之指數分佈

$$k(\psi) = k_s e^{\alpha \psi} \dots\dots\dots(2.3)$$

上式中 k_s 表飽和之水力傳導係數， α 表土壤孔隙分佈參數

將(2.2)式代入(2.3)式可得

$$\phi(\psi) = \int_{-\infty}^{\psi} k_s e^{\alpha \psi} d\psi = \frac{k_s e^{\alpha \psi}}{\alpha} = \frac{k(\psi)}{\alpha} \dots\dots\dots(2.4)$$

由上式可得 $k(\psi) = \alpha \phi(\psi) \dots\dots\dots(2.5)$

(2.4)式對 z 微分可得

$$\frac{\partial \phi(\psi)}{\partial z} = k(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \dots\dots\dots(2.6)$$

將(2.4)式及(2.6)式代入(2.1)式得

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial z} \dots\dots\dots(2.7)$$

假設

$$\frac{\partial \theta}{\partial \phi} = \frac{\alpha}{B} \dots\dots\dots(2.8)$$

上式中 B 為常數。

將(2.8)代入(2.7)得

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{B}{\alpha} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - B \frac{\partial \phi}{\partial z} \dots\dots\dots(2.9)$$

令 $A^2 = \frac{B}{\alpha}$ 則(2.9)可表為

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = A^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - B \frac{\partial \phi}{\partial z} \dots\dots\dots(2.10)$$

$$\text{再令 } \phi(z,t) = e^{B\left(\frac{z-Bt}{2}\right)/2A^2} W(z,t) \dots\dots\dots(2.11)$$

將(2.11)代入(2.10)可得

$$\frac{\partial W}{\partial t} = A^2 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \dots\dots\dots(2.12)$$

上式為擴散方程式，數學上較容易求解，因此若是將實際入滲問題對應之起始條件及邊界條件亦轉換為 $W(z,t)$ 型式下對應之起始條件及邊界條件，則吾人可於求得 $W(z,t)$ 之解後，只須將 $W(z,t)$ 轉換成 $\theta(z,t)$ ，便可輕易地求得 $\theta(z,t)$ 之解析解；由於積水前後之控制方程式並無不同，但積水前後之起始條件及邊界條件則不一樣，因此其轉換則分積水前及積水後與其通解一併推導如下。

2.1.2 推導 $\theta(z,t)$ 與 $W(z,t)$ 間之轉換關係式

對(2.8)式積分，並由邊界條件：

當 $\psi \rightarrow -\infty$ 時， $\theta = \theta_r$ (θ_r 表殘存體積含水比)，以及

當 $\psi \rightarrow 0$ 時， $\theta = \theta_s$ (θ_s 表飽和體積含水比)，可得

$$B = \frac{k_s}{\theta_s - \theta_r} \text{ 及}$$

$$\theta = (\theta_s - \theta_r) e^{\alpha \psi} + \theta_r \dots\dots\dots(2.13)$$

又由(2.4)式及(2.11)式可得

$$\phi(z,t) = e^{B\left(\frac{z-Bt}{2}\right)/2A^2} W(z,t) = \frac{k_s}{\alpha} e^{\alpha \psi} \dots\dots\dots(2.14)$$

將(2.13)式代入(2.14)式可得

$$\theta(z,t) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} e^{B\left(\frac{z-Bt}{2}\right)/2A^2} W(z,t) \dots\dots\dots(2.15)$$

上式為 $\theta(z,t)$ 與 $W(z,t)$ 間之轉換關係式。

2.1.3 推導積水產生前之解

考慮一維半無窮區域之入滲問題如圖 2.1 所示,求解採用逆轉換方式,先求解(2.12)式之微分方程式,利用 $W(z,t)$ 之解及 $W(z,t)$ 與 $\theta(z,t)$ 之關係式,將 $W(z,t)$ 之解轉換為 $\theta(z,t)$ 之解。若考慮 $W(z,t)$ 之微分方程式如下:

$$\text{G.E. : } \frac{\partial W}{\partial t} = A^2 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \dots\dots\dots(2.16)$$

$$\text{I.C. : } W(z,0) = 0 \dots\dots\dots(2.17)$$

$$\text{B.C. : } -A^2 \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=0} = f(t) \dots\dots\dots(2.18)$$

上式中函數 $f(t)$ 為任意函數。
上列 (2.16) ~ (2.18) 式利用 Duhamel's Theorem [Ozisik, 1979] 可解得之結果如下:

$$W(z,t) = \int_{\tau=0}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{2f(\tau)}{A^2} \left[\left(\frac{A^2(t-\tau)}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{4A^2(t-\tau)}\right) - \frac{z}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2A\sqrt{(t-\tau)}}\right) \right] \right\} d\tau \dots\dots\dots(2.19)$$

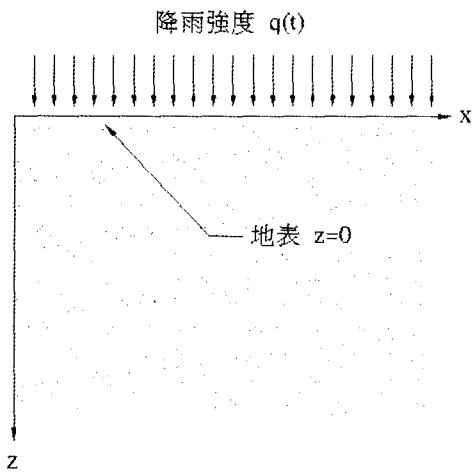


圖 2.1 一維半無窮區域入滲問題示意圖

上列(2.16)~(2.18)式之微分方程式可由(2.15)式轉換成 $\theta(z,t)$ 之微分方程式如下,並將(2.19)式代入(2.15)式可得: $\theta(z,t)$ 與 $W(z,t)$ 之關係如(2.15)

$$\text{式所示: } \theta(z,t) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} e^{B\left(z - \frac{Bt}{2}\right)/2A^2} W(z,t),$$

因此將(2.19)式 $W(z,t)$ 之結果代入(2.15)式可列出未產生積水前之 $\theta(z,t)$ 之解為如下,其起始條件及邊界條件轉換之過程推導詳見附錄。

$$\text{G.E. : } \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial k}{\partial z} \dots\dots\dots(2.20)$$

$$\text{I.C. : } \theta(z,0) = \theta_r \dots\dots\dots(2.21)$$

$$\text{B.C. : } q(t) = \frac{\alpha \cdot f(t)}{B} \cdot e^{-\frac{B^2 t}{4A^2}} + \frac{\alpha}{2A\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{B^2 t}{4A^2}} \cdot \int_{\tau=0}^t \frac{f(\tau)}{t-\tau} d\tau \dots\dots\dots(2.22)$$

$$\theta(z,t) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} e^{B\left(z - \frac{Bt}{2}\right)/2A^2} \int_{\tau=0}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{2f(\tau)}{A^2} \left[\left(\frac{A^2(t-\tau)}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{4A^2(t-\tau)}\right) - \frac{z}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2A\sqrt{(t-\tau)}}\right) \right] \right\} d\tau \dots\dots\dots(2.23)$$

上列(2.22)式中因函數 $f(t)$ 為時間之任意函數,因此降雨強度 $q(t)$ 可隨函數 $f(t)$ 之調整而成為任意隨時間變化之降雨型式,應用上較為廣泛。

2.1.4 推導積水產生後之解

當 $t \geq t_p$ 時,可列出入滲問題之微分方程式如下:

$$\text{G.E. } \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial k}{\partial z}, 0 \leq z < \infty \dots\dots\dots(2.24)$$

$$\text{I.C. } \theta(z,t|_{t=t_p=0}) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} e^{B\left(z - \frac{Bt_p}{2}\right)/2A^2} g(z) \dots\dots\dots(2.25)$$

$$\text{B.C. } \theta(0, t |_{t-tp > 0}) = \theta_s \quad \dots\dots\dots(2.26)$$

上式中 $g(z)$ 為(2.19)式將 t 用 tp 代入可表為：

$$g(z) = \int_{\tau=0}^{\bar{t}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{2f(\tau)}{A^2} \left[\frac{A^2(t-\tau)}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{4A^2(t-\tau)}\right) \right] - \frac{z}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2A\sqrt{(t-\tau)}}\right) \Bigg|_{t=tp} \quad \dots\dots\dots(2.27)$$

令 $\bar{t} = t - tp$ 將(2.24)~(2.26)式中之 $\theta(z, t)$ 利用(2.15)式轉換成 $W(z, \bar{t})$ 之微分方程式如下：

$$\text{G.E. } \frac{\partial W}{\partial \bar{t}} = A^2 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, 0 \leq z < \infty \quad \dots\dots\dots(2.28)$$

$$\text{I.C. } W(z, \bar{t} = 0) = g(z) \quad \dots\dots\dots(2.29)$$

$$\text{B.C. } W(0, \bar{t}) = E(\bar{t}) \quad \dots\dots\dots(2.30)$$

$$\text{上式中: } E(\bar{t}) = \frac{k_s}{\alpha} e^{\frac{B^2(\bar{t}+tp)}{4A^2}} \quad \dots\dots\dots(2.31)$$

上列(2.28)~(2.30)式利用 Duhamel's Theorem [Ozisk, 1979] 可解得之結果如下：

$$W(z, \bar{t}) = g(z) + \int_{\tau=0}^{\bar{t}} \frac{\partial}{\partial t} [\Psi(z, \bar{t}, \tau)] d\tau \quad \dots\dots\dots(2.32)$$

$$\Psi(z, \bar{t}, \tau) = \frac{1}{2A\sqrt{\pi(\bar{t}-\tau)}} \int_0^{\infty} [g(u) - E(\tau)] \left\{ \exp\left[-\frac{(z-u)^2}{4A^2(\bar{t}-\tau)}\right] - \exp\left[-\frac{(z+u)^2}{4A^2(\bar{t}-\tau)}\right] \right\} du + E(\tau) \quad \dots\dots\dots(2.33)$$

$\theta(z, t)$ 與 $W(z, t)$ 之關係如(2.15)式所示：

$$\theta(z, t) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} e^{B\left(\frac{z-Bt}{2}\right)/2A^2} W(z, t), \text{ 因此將}$$

(2.32)式 $W(z, t)$ 之結果代入(2.15)式可求出產生積水後 $\theta(z, t)$ 之解為：

$$\theta(z, t) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} e^{B\left(\frac{z-Bt}{2}\right)/2A^2} \left\{ g(z) + \int_{\tau=0}^{\bar{t}} \frac{\partial}{\partial t} [\Psi(z, \bar{t}, \tau)] d\tau \right\} \quad \dots\dots\dots(2.34)$$

2.2 推導降雨強度隨時間變化之解

若考慮(2.22)式中， $f(t) = \bar{q}$ ，而 \bar{q} 為一常數之情形下，其降雨強度仍為時間之函數，其求解之流程圖如圖 2.2 及圖 2.3 所示，圖 2.2 中水頭 θ 表體積含水比(水體積/土體總體積)， θ_r 表殘存體積含水比， t 表時間， z 表向地表下之方向

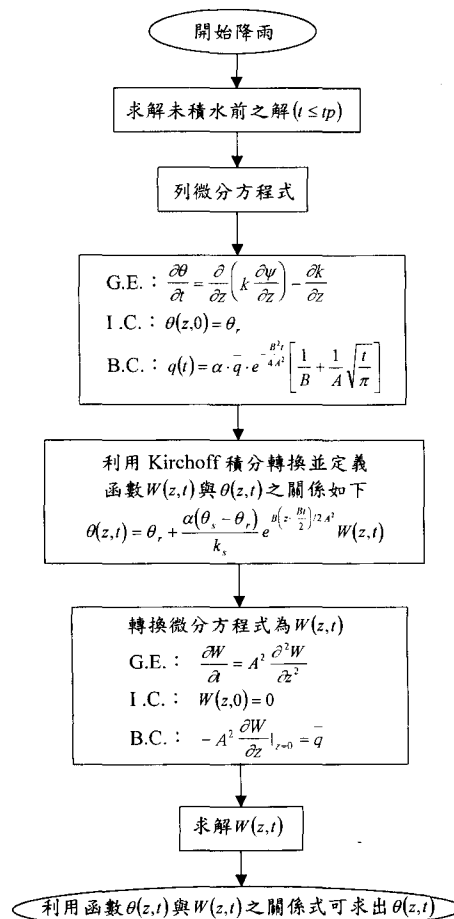


圖 2.2 積水前求解之流程圖

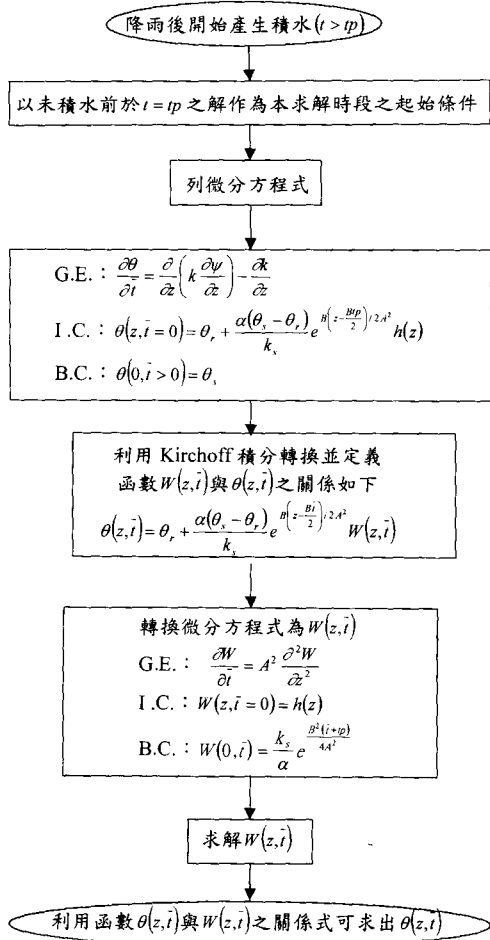


圖 2.3 積水前求解之流程圖

為正， ψ 表張力水頭， k 表水力傳導係數， $q(t)$ 表示降雨強度隨時間變化之函數， \bar{q}, A, B 為常數， α 表土壤孔隙分佈參數。圖 2.3 中 $\bar{t} = t - t_p$ ， $h(z)$ 表示 z 的函數如下所示，其詳細之推導過程詳見如下數節。基本上函數 $\theta(z, t)$ 與 $W(z, t)$ 間之關係從數學式來看則僅呈現一函數轉換之關係，但若從物理意義來看則可將 $\theta(z, t)$ 與 $W(z, t)$ 視為兩個不同的物理面，而 $\theta(z, t)$ 與 $W(z, t)$ 之差異則在於 $W(z, t)$ 乃將入滲時重力項之影響忽略不予考慮，此可由理查方程式中若忽略重力之影響後理查方程式可退化為擴散方程式得知。

$$h(z) = c1 \cdot \exp(-c2 \cdot z^2) - c3 \cdot z \cdot \operatorname{erfc}(c4 \cdot z) \dots (2.35)$$

$$\text{上式中 } c1 = \frac{2\bar{q}}{A} \left(\frac{t_p}{\pi} \right)^{0.5}, \quad c2 = \frac{1}{4 \cdot t_p \cdot A^2},$$

$$c3 = \frac{\bar{q}}{A^2}, \quad c4 = \frac{1}{2 \cdot A \cdot \sqrt{t_p}} \dots (2.36)$$

2.2.1 積水前一維入滲問題之求解

考慮一維半無窮區域之入滲問題如圖 2.1 所示，求解採用逆轉換方式，先求解 $W(z, t)$ 之微分方程式，利用 $W(z, t)$ 之解及 $W(z, t)$ 與 $\theta(z, t)$ 之關係式，將 $W(z, t)$ 之解轉換為 $\theta(z, t)$ 之解。若考慮 $f(t) = \bar{q}$ ，而 \bar{q} 為一常數之情形下， $W(z, t)$ 之微分方程式如下：

$$\text{G.E. } \frac{\partial W}{\partial t} = A^2 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, \quad 0 \leq z < \infty \dots (2.37)$$

$$\text{I.C. } W(z, 0) = 0 \dots (2.38)$$

$$\text{B.C. } -A^2 \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=0} = \bar{q} \dots (2.39)$$

上式中 \bar{q} 為常數，上列微分方程式可求得其解如下式所示。

$$W(z, t) = \frac{2\bar{q}}{A^2} \left[\left(\frac{A^2 t}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{4A^2 t}\right) - \frac{z}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{A^2 t}}\right) \right] \dots (2.40)$$

上列 (2.37) ~ (2.39) 式之微分方程式可轉換成 $\theta(z, t)$ 之微分方程式如下：

$$\text{G.E. } \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial k}{\partial z}, \quad 0 \leq z < \infty \dots (2.41)$$

$$\text{I.C. } \theta(z, 0) = \theta_r \dots (2.42)$$

$$\text{B.C. } q(t) = \alpha \cdot \bar{q} \cdot e^{-\frac{B^2 t}{4A^2}} \left[\frac{1}{B} + \frac{1}{A} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \right] \dots (2.43)$$

轉換後之起始條件為均勻分佈之體積含水比，而邊界條件則為隨時間變化之不均勻分佈降雨強

度。

根據 2.1 節之推導，可知 $\theta(z,t)$ 與 $W(z,t)$ 之關係如(2.15)式所示：

$$\theta(z,t) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} e^{B\left(z - \frac{Bt}{2}\right)/2A^2} W(z,t), \text{ 因此將}$$

(2.40)式 $W(z,t)$ 之結果代入(2.15)式可求出在未產生積水前 $\theta(z,t)$ 之解為：

$$\theta(z,t) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} \exp\left[B\left(z - \frac{Bt}{2}\right)/2A^2\right] \cdot \left\{ \frac{2\bar{q}}{A^2} \left[\left(\frac{A^2 t}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{4A^2 t}\right) - \frac{z}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2A\sqrt{t}}\right) \right] \right\} \dots (2.44)$$

$$\text{上式中 } B = \frac{k_s}{\theta_s - \theta_r}, \quad A = \sqrt{\frac{k_s}{\alpha(\theta_s - \theta_r)}}$$

2.2.2 推導積水時間

為判別是否會產生積水或是何時產生積水之狀況，將 $z=0$ 代入(2.44)式得地表之體積含水比 $\theta(0,t)$ 如下所示：

$$\theta(0,t) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} \exp\left[-\frac{B^2 t}{4A^2}\right] \cdot \left(\frac{2\bar{q}\sqrt{t}}{A\sqrt{\pi}}\right) \quad (2.45)$$

將上式繪出後，若地表之體積含水比 $\theta(0,t)$ 均小於 θ_s ，表示降雨完全入滲於土壤中，不產生積水之狀況，但若 $\theta(0,t)$ 於某時間開始大於 θ_s ，表示會產生積水，此時 $\theta(0,t)$ 達 θ_s ，令 tp 為積水時間，則 $\theta(0,tp) = \theta_s$ 代入(2.45)式得

$$\alpha e^{-B^2 tp/4A^2} \left(\frac{2\bar{q}\sqrt{tp}}{A\sqrt{\pi}}\right) = k_s \dots (2.46)$$

上式利用試誤法疊代運算可求得 tp 。

2.2.3 積水後一維半無窮區域入滲問題之求解

當降雨經過一段時間地表開始產生漫地流時 ($t \geq tp$)，則部分降雨滲入土壤且地表之含水比維持飽和，此為本求解時段之邊界條件。設 $\bar{t} = t - tp$ ，當 $\bar{t} = 0$ 時，即 $t = tp$ ，由上節之推導

結果(2.45)式可得土壤之體積含水比如下所示，此式可視為本求解時段之起始條件。

$$\theta(z, t - tp = 0) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} e^{B\left(z - \frac{Btp}{2}\right)/2A^2} h(z) \quad (2.47)$$

上式中 $h(z)$ 為利用 $t = tp$ 代入(2.40)式求得如下所示：

$$h(z) = c1 \cdot \exp(-c2 \cdot z^2) - c3 \cdot z \cdot \operatorname{erfc}(c4 \cdot z) \dots (2.48)$$

$$\text{其中 } c1 = \frac{2\bar{q}}{A} \left(\frac{tp}{\pi}\right)^{0.5}, \quad c2 = \frac{1}{4 \cdot tp \cdot A^2},$$

$$c3 = \frac{\bar{q}}{A^2}, \quad c4 = \frac{1}{2 \cdot A \cdot \sqrt{tp}} \dots (2.49)$$

當 $t \geq tp$ 時，可列出入滲問題之微分方程式如下：

$$\text{G.E. } \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial k}{\partial z}, 0 \leq z < \infty \dots (2.50)$$

$$\text{I.C. } \theta(z, t|_{t=tp=0}) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} e^{B\left(z - \frac{Btp}{2}\right)/2A^2} h(z) \quad (2.51)$$

$$\text{B.C. } \theta(0, t|_{t=tp>0}) = \theta_s \dots (2.52)$$

令 $\bar{t} = t - tp$ 將(2.50)~(2.52)式中之 $\theta(z,t)$ 利用(2.15)式轉換成 $W(z,\bar{t})$ 之微分方程式如下：

$$\text{G.E. } \frac{\partial W}{\partial \bar{t}} = A^2 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, 0 \leq z < \infty \dots (2.53)$$

$$\text{I.C. } W(z, \bar{t} = 0) = h(z) \dots (2.54)$$

$$\text{B.C. } W(0, \bar{t}) = \frac{k_s}{\alpha} e^{\frac{B^2(\bar{t}+tp)}{4A^2}} \dots (2.55)$$

上列(2.53)~(2.55)式利用 Duhamel's Theorem [Ozisk,1979]可解得之結果如下：

$$W(z, \bar{t}) = h(z) + \eta(z, \bar{t}) \dots (2.56)$$

上式中

三、結果與討論

3.1 結果與驗證

今以砂土(Hygiene sandstone)及壤土(Silt Loam)為例，考慮 $f(t) = \bar{q}$ 之情形下，分別說明不會產生積水之狀況及會產生積水之狀況的結果，並與許瑞昌(1998)所做之數值模擬結果進行比較。

3.1.1 不積水狀況之結果

以砂土為例說明不積水狀況的結果，取 $\bar{q} = 0.001$ ，砂土之土壤參數列於表 3.1，首先將表 3.1 之參數值代入(2.45)式繪出地表之體積含水比如圖 3.1 所示，由圖中可得知不會產生積水，將表 3.1 之參數值代入(2.43)式算出降雨歷線如圖 3.2 所示(此為不均勻降雨)，將表 3.1 之參數值代入(2.44)式算出其土壤水份分佈圖於不同位置及時間下之變化如圖 3.3 所示。

$$\eta(z, \bar{t}) = \frac{c1 \cdot \sqrt{tp} \cdot \text{Erfc} \left[\frac{z\sqrt{tp}}{2A\sqrt{t+tp}} \right] \cdot \text{Exp} \left[-\frac{z^2}{4A^2\sqrt{t+tp}} \right]}{\sqrt{t+tp}} - c1 \cdot \text{Exp} \left(-\frac{z^2}{4A^2tp} \right) + \frac{k_s \cdot z}{2 \cdot \alpha \cdot A \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\bar{t}} (t-\tau)^{-1.5} \cdot \text{Exp} \left[\frac{\alpha B \tau}{4} - \frac{z^2}{4A^2(t-\tau)} \right] d\tau - \frac{c3}{2A\sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^{\infty} x \text{Erfc}(c4 \cdot x) \cdot \left\{ \text{Exp} \left[-\frac{(x-z)^2}{4A^2 t} \right] - \text{Exp} \left[-\frac{(x+z)^2}{4A^2 t} \right] \right\} dx + c3 \cdot \left[z + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c4^{2n-1} \cdot z^{2n}}{(2n-1) \cdot (n-1)!} \right] \dots\dots\dots(2.57)$$

根據 2.1 節之推導， $\theta(z, t)$ 與 $W(z, t)$ 之關係如(2.15)式所示：

$$\theta(z, t) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} e^{B \left(z - \frac{Bt}{2} \right) / 2A^2} W(z, t), \text{ 因此將}$$

(2.56)式 $W(z, t)$ 之結果代入(2.15)式可求出在產生積水後 $\theta(z, t)$ 之解為：

$$\theta(z, t) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} \exp \left[B \left(z - \frac{Bt}{2} \right) / 2A^2 \right] \cdot \left\{ \begin{aligned} &c1 \cdot \exp(-c2 \cdot z^2) - c3 \cdot z \cdot \text{erfc}(c4 \cdot z) \\ &+ \frac{c1 \cdot \sqrt{tp} \cdot \text{Erfc} \left[\frac{z\sqrt{tp}}{2A\sqrt{t+tp}} \right] \cdot \text{Exp} \left[-\frac{z^2}{4A^2\sqrt{t+tp}} \right]}{\sqrt{t+tp}} \\ &- c1 \cdot \text{Exp} \left(-\frac{z^2}{4A^2tp} \right) \\ &+ \frac{k_s \cdot z}{2 \cdot \alpha \cdot A \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\bar{t}} (t-\tau)^{-1.5} \cdot \text{Exp} \left[\frac{\alpha B \tau}{4} - \frac{z^2}{4A^2(t-\tau)} \right] d\tau \\ &- \frac{c3}{2A\sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^{\infty} x \text{Erfc}(c4 \cdot x) \cdot \left\{ \text{Exp} \left[-\frac{(x-z)^2}{4A^2 t} \right] - \text{Exp} \left[-\frac{(x+z)^2}{4A^2 t} \right] \right\} dx \\ &+ c3 \cdot \left[z + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c4^{2n-1} \cdot z^{2n}}{(2n-1) \cdot (n-1)!} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.58)$$

表 3.1

參數	砂土參數值	單位
k_s	108	cm/day
α	0.0079	l/cm
θ_s	0.25	cm ³ /cm ³
θ_i	0.153	cm ³ /cm ³

資料來源：van Genuchten, 1980.

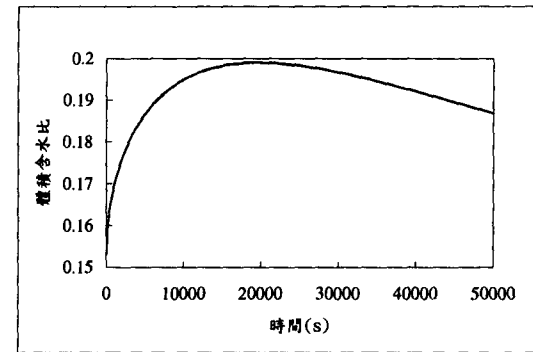


圖 3.1 砂土地表體積含水比分佈圖

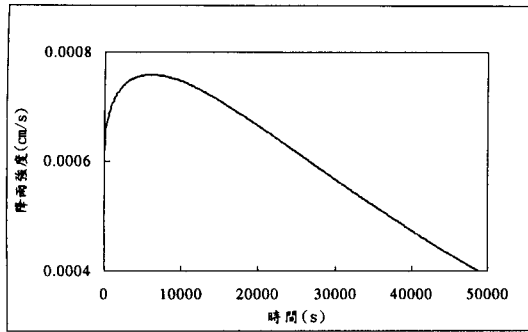


圖 3.2 降雨歷線分佈圖

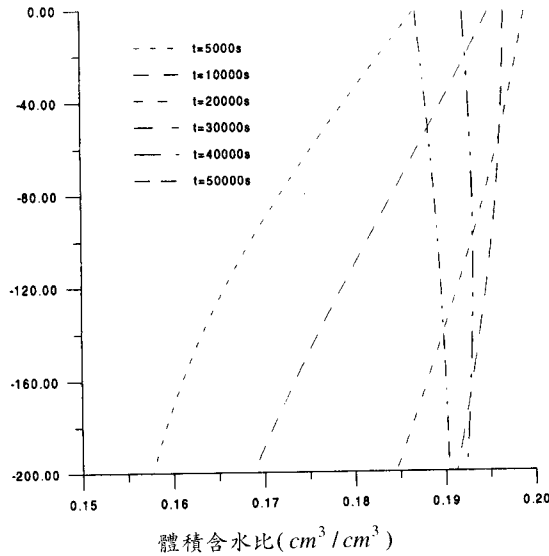


圖 3.3 砂土體積含水比變化分佈圖

表 3.2

參數	壤土參數值	單位
k_s	31.6	cm/day
α	0.02	l/cm
θ_s	0.434	cm^3/cm^3
θ_i	0.218	cm^3/cm^3

資料來源：van Genuchten, 1980

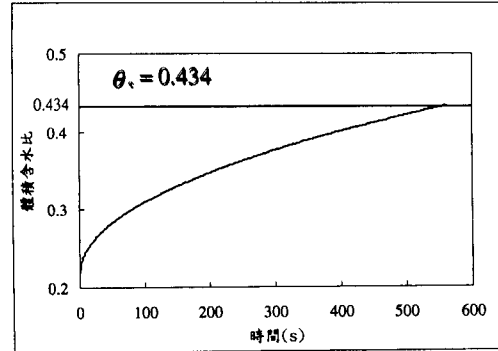


圖 3.4 壤土地表體積含水比分佈圖

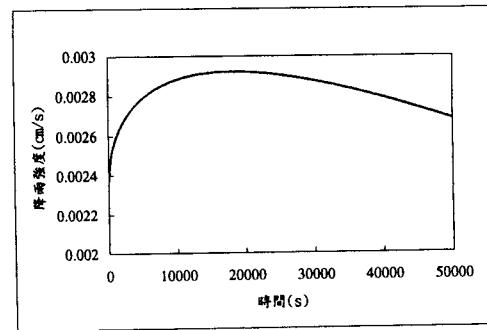


圖 3.5 降雨歷線分佈圖

3.1.2 會積水狀況之結果

以壤土為例說明會積水狀況的結果，取 $\bar{q} = 0.0002$ ，壤土之土壤參數列於表 3.2，首先將表 3.2 之參數值代入(2.45)式繪出地表之體積含水比如圖 3.4 所示，由圖中可知在 $tp = 561.221$ 秒會產生積水，將表 3.2 之參數值代入 (2.43)式算出降雨歷線如圖 3.5 所示，將表 3.2 之參數值代入 (2.46)式可算出積水時間，將表 3.2 之參數值代入 (2.44)及(2.58)式算出其土壤水份分佈圖於不同位置及時間下之變化如圖 3.6 所示。

3.1.3 數值模擬結果之比較

許瑞昌(1998)利用中央差分法求解未飽和層土壤水份垂直入滲之數值解，今以壤土為例，其土壤參數如表 3.2 所示，利用解析解所求得之積水時間為 561.221 秒，利用數值解所求得之積水時間為 561 秒，兩者差異不多，今將其土壤體積含水比 θ 於不同位置及時間下之結果進行比較如圖 3.7 所示，由圖中發現兩者之變化趨勢完全吻合。

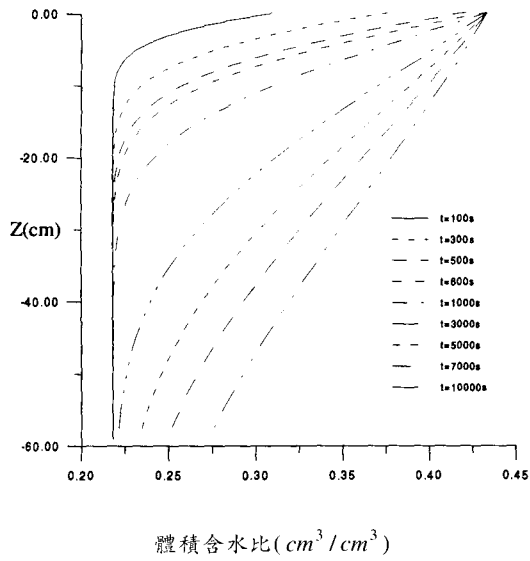


圖 3.6 壤土體積含水比變化分佈圖

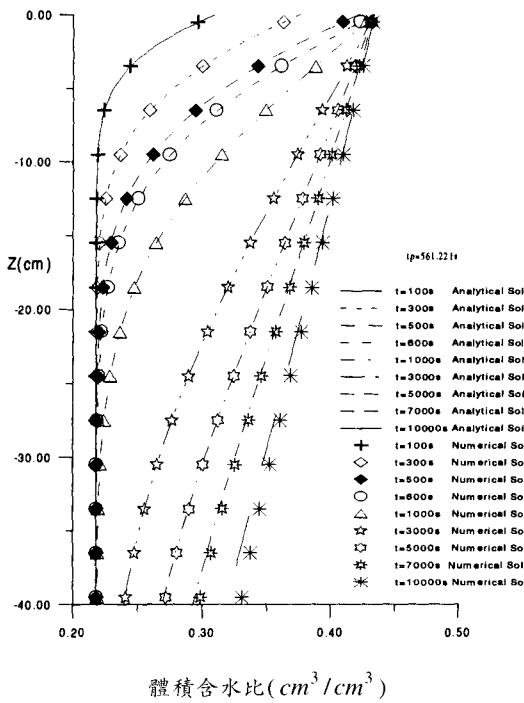


圖 3.7 解析解與數值解之比較

3.2 討論

1. 本文所推導降雨強度之邊界條件(2.43)式中，因參數 α, A 及 B 均為土壤性質之參數，故為固定之值，所以降雨強度之大小及其分佈主要受所取 \bar{q} 值之影響，且與 \bar{q} 成正比，今將不同 \bar{q} 值與 q 之對應關係以砂土為例繪出如圖 3.8 所示。

2. 本文所推導之積水時間(2.46)式中，積水時間 tp 與飽和水力傳導係數 k_s 成正相關，今以壤土為例，取 $\bar{q} = 0.0002$ ，繪出 tp 與 k_s 之關係如圖 3.9 所示；積水時間 tp 與所取 \bar{q} 之值成反相關，今以壤土為例，取 $k_s = 31.6 \text{ cm/s}$ ，繪出 tp 與 \bar{q} 之關係如圖 3.10 所示。

3. 本文假設土壤性質為 $\frac{\partial \theta}{\partial \phi} = \frac{\alpha}{B}$ ，可推得(2.13)

式 $\theta = (\theta_s - \theta_r)e^{\alpha\psi} + \theta_r$ ，今將以砂土及壤土為例繪出 $\theta - \psi$ 及 $\psi - k$ 之關係曲線如圖 3.11~3.14 所示，而含水量 θ 與張力水頭 ψ 之關係則與遲滯效應中之加濕過程之曲線近似，因此本文之假設 $\frac{\partial \theta}{\partial \phi} = \frac{\alpha}{B}$ 乃合乎物理

現象之假設。

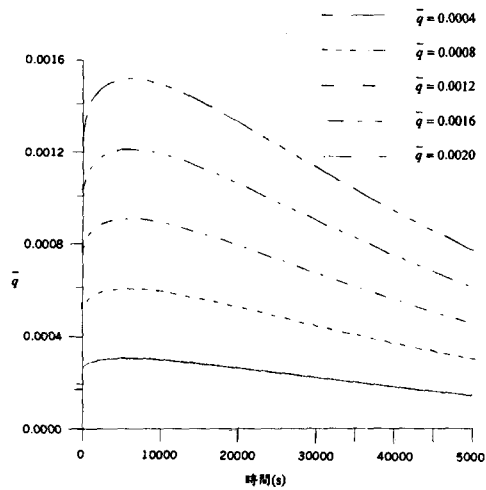


圖 3.8 \bar{q} 對降雨歷線分佈之影響示意圖

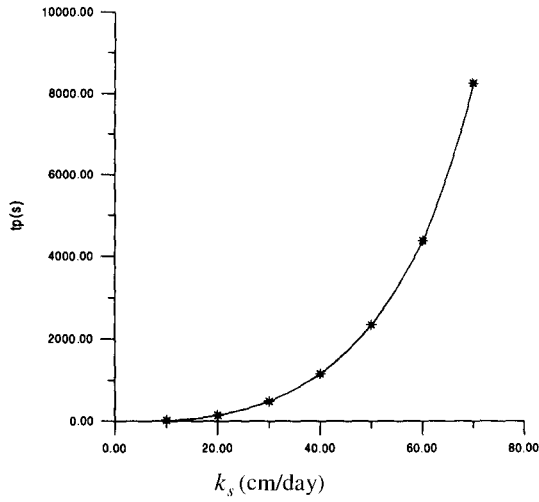


圖 3.9 壤土的積水時間(t_p)與飽和水力傳導係數(k_s)之關係圖

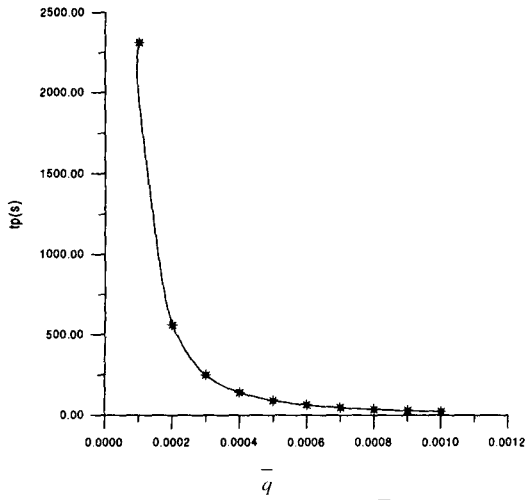


圖 3.10 壤土的積水時間(t_p)與 \bar{q} 之關係圖

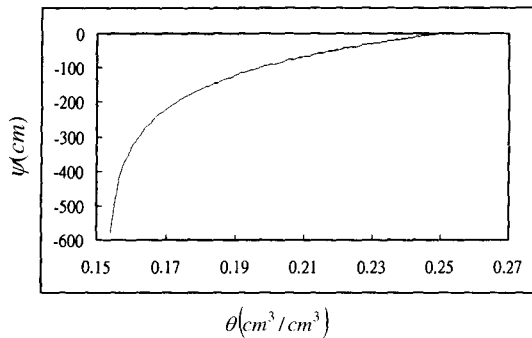


圖 3.11 砂土的體積含水比(θ)與張力水頭(ψ)之關係圖

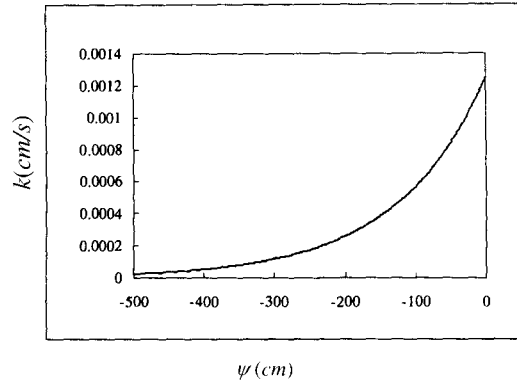


圖 3.12 砂土的水力傳導係數(k)與張力水頭(ψ)之關係圖

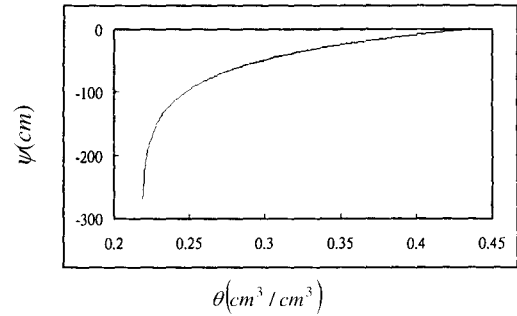


圖 3.13 壤土的體積含水比(θ)與張力水頭(ψ)之關係圖

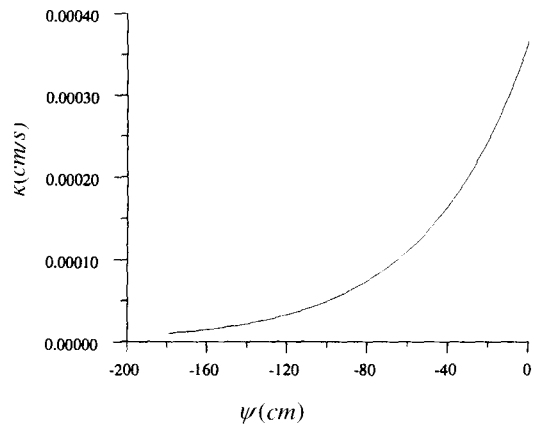


圖 3.14 壤土的水力傳導係數(k)與張力水頭(ψ)之關係圖

4. 假設 $t = t_0$ (即 $t = tp + t_0$) 時降雨停止，則可將 $\bar{t} = t_0$ 代入(2.58)式作為重新求解之起始條件，令 $\bar{t} = \bar{t} - t_0$ 則微分方程式可列出如下：

$$\text{G.E. } \frac{\partial \theta}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial k}{\partial z}, 0 \leq z < \infty \dots\dots\dots(3.1)$$

$$\text{I.C. } \theta(z, 0) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} e^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\alpha B t_0}{4}} J(z) \dots\dots\dots(3.2)$$

$$\text{B.C. } q(0, t) = 0 \dots\dots\dots(3.3)$$

上式中 $J(z)$ 如下所示：

$$J(z) = c1 \cdot \text{Exp}(-c2 \cdot z^2) - c3 \cdot z \cdot \text{Erfc}(c4 \cdot z) + \frac{c1 \cdot \sqrt{tp} \cdot \text{Erf} \left[\frac{z \sqrt{tp}}{2A \sqrt{t_0(t_0 + tp)}} \right] \cdot \text{Exp} \left[-\frac{z^2}{4A^2 \sqrt{t_0 + tp}} \right]}{\sqrt{t_0 + tp}} + c1 \cdot \text{Exp} \left(-\frac{z^2}{4A^2 tp} \right) + \frac{k_s \cdot z}{2 \cdot \alpha \cdot A \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{t_0} (t_0 - \tau)^{-1.5} \cdot \text{Exp} \left[\frac{\alpha B \tau}{4} - \frac{z^2}{4A^2 (t_0 - \tau)} \right] d\tau - \frac{c3}{2A \sqrt{\pi_0}} \cdot \int_0^{\infty} x \text{Erfc}(c4 \cdot x) \cdot \left\{ \text{Exp} \left[-\frac{(x-z)^2}{4A^2 t_0} \right] - \text{Exp} \left[-\frac{(x+z)^2}{4A^2 t_0} \right] \right\} dx + c3 \cdot \left[z + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c4^{2n-1} \cdot z^{2n}}{(2n-1) \cdot (n-1)!} \right] \dots\dots\dots(3.4)$$

將(3.1)~(3.3)式中之 $\theta(z, \bar{t})$ 利用(2.15)式轉換成 $W(z, \bar{t})$ 之微分方程式如下：

$$\text{G.E. } \frac{\partial W}{\partial \bar{t}} = A^2 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, 0 \leq z < \infty \dots\dots\dots(3.5)$$

$$\text{I.C. } W(z, 0) = J(z) \dots\dots\dots(3.6)$$

$$\text{B.C. } -A^2 \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \dots\dots\dots(3.7)$$

上列(3.5)~(3.7)式可解得之結果如下：

$$w(z, \bar{t}) = \int_{\beta=0}^{\infty} \text{Exp}(-A^2 \beta^2 \bar{t}) \cdot \frac{2 \text{Cos}(\beta z)}{\pi} \cdot \left[\int_{x=0}^{\infty} \text{Cos}(\beta x) \cdot J(x) dx \right] d\beta \dots\dots\dots(3.8)$$

所以於 $\bar{t} = t_0$ (即 $t = tp + t_0$) 停止降雨後之解為：

$$\theta(z, t) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} \text{exp} \left[B \left(z - \frac{Bt}{2} \right) / 2A^2 \right] \cdot \left\{ \int_{\beta=0}^{\infty} \text{Exp}(-A^2 \beta^2 \bar{t}) \cdot \frac{2 \text{Cos}(\beta z)}{\pi} \cdot \left[\int_{x=0}^{\infty} \text{Cos}(\beta x) \cdot J(x) dx \right] d\beta \right\} \dots\dots\dots(3.9)$$

上式可利用數值積分求解。

四、結論

1. 應用 Kirchoff 積分轉換及 Duhamel's Theorem 可求出 Richards Equation 於邊界條件為時間(t)的函數及起始條件為位置(z)的函數之情形下的解析解。
2. 本文推導之結果(2.44)及(2.58)式適用於無地下水位之情況下，土壤體積含水比之起始條件為 θ_r ，而降雨歷線隨時間變化之一維半無窮區間入滲問題於積水前後之體積含水比變化之解析解，同時可利用(2.46)式求出積水時間。
3. 若考慮 $t = tp + t_0$ 時降雨停止，則利用本方法仍可繼續求解其降雨停止後之體積含水比分佈，其結果如(3.9)所示。
4. 本文推導之結果與許瑞昌(1998)利用中央差分法求解未飽和層土壤水份垂直入滲之數值解結果一致，其變化趨勢完全吻合。
5. 本研究提供降雨強度為時間變化之連續函數下之解析解，具運算簡易之優點同時可供其他較複雜之數值模式驗證變化降雨強度之解。

五、參考文獻

1. Celia, A. M., E. T. Bouloutas and R. L. Zarba, "A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation", Water Resource Res., Vol. 26, No.7, p.1483-

- 1496, 1990.
2. Chow V. T. , Maidment , Applied Hydrology, Mc Graw-Hill,1970.
 3. Clothier B. E., I. White, and G. J. Hamilton, "Constant-rate Rainfall Infiltration: Field Experiments", Soil Sci. Soc. Am. J., Vol.45, p.245-249,1981.
 4. Eagleson P.S. , Dynamic Hydrology, Mc Graw-Hill, 1970.
 5. Green, W. H., and G. A. Ampt, "Studies on soils physics, I, Flow of air and water through soils", J. Agric. Sci., 1-24,1911.
 6. Horton, R. E.," An Approach toward a Physical Interpretation of Infiltration-Capacity", Soil Sci. Soc. Am. Proc., Vol.5, p.399-417,1940.
 7. Morel-Seytoux, H. J., "Derivation of equations for variable rainfall infiltration", Water Resources Res. Vol. 14, No.4, pp.561-568,1978
 8. Morel-Seytoux, H. J., "Analytical results for prediction of variable rainfall infiltration", Journal of Hydrology, Vol. 59, pp.209-230,1981
 9. Ozisik M., Heat Conduction, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1979.
 10. Philip, J. R., "The theory of infiltration, 1, The infiltration equation and its solution", Soil Sci., 84, p.345-357, 1957.
 11. Parlange, J.-Y., "The theory of water movement in soils, 2, One-dimensional infiltration", Soil Sci., 111(3), p.170-174,1971.
 12. Parlange, J.-Y., "Water transport in soils", Annu. Rev. Fluid Mech., 12, p.77-102,1980.
 13. Raats, P. A. C., and W. R. Gardner, Movement of water in the unsaturated zone near a watertable, In Jan Van Schilfgaarde(ed.) Drainage for Agriculture : Agronomy 17, p.311-405 ,1974.
 14. Rafael L. B., Hydrology. An Introduction to Hydrologic Science, Massachusetts Institute of Technology,p.351-353 ,1990.
 15. Richards,L. A., "Capillary conduction of liquids through porous mediums", Physics, vol. 1, p.318-313,1931.
 16. Salvucci, G. D. , "Series solution for Richards equation under concentration boundary conditions and uniform initial conditions " Water Resources Res. Vol. 32, No.8, pp.2401-2407,1996.
 17. Sander,G., C.,J.-Y. Parlange, V. Kuhnel, W.L. Hogarth, D. Lock-ington, and J. P. J. O'Kane, "Exact nonlinear solution for constant flux infiltration", J.Hydrol.,vol. 97, p.341-346,1988.
 18. Serrano S. E. "Analytical decomposition of the nonlinear unsaturated flow equation " Water Resources Res. Vol. 34, No.3, pp.397-407, 1998.
 19. Swartzendruber Dale, "A Quasi-solution for the Downward Infiltration of Water into Soil", Water Resource Res., Vol. 23, No.5, p.809-817, 1987.
 20. Van Genuchten , M. Th. "A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils" Soil Sci. Soc. Am. J-44:892-898 , 1980.
 21. Warrick A. M., "Analytical Solutions to the one-dimensional linearized moisture flow equation for arbitrary input", Soil Sci. Soc., Vol.120, p.79-84,1975.
 22. 許瑞昌, 「未飽和層土壤水份垂直入滲之數值模擬」, 國立台灣大學農業工程研究所碩士論文, 民國八十七年。

六、誌謝

本研究承蒙國科會(計畫編號：NSC 88-2625-Z-002-023)補助研究經費，在此特致謝忱。

七、附錄：起始條件及邊界條件之推導

起始條件之推導：

將 $t = 0$ 代入(2.15)式即可求出轉換後之起始條件如下。

$$\theta(z,0) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} e^{B\left(z - \frac{Bt}{2}\right)^2} W(z,0) \dots (A.1)$$

將(2.17)式代入上式得起始條件：

$$I.C. : \theta(z,0) = \theta_r \dots \dots \dots (A.2)$$

邊界條件之推導：

由入滲率之定義，(2.4)式及(2.6)式可列式如下：

$$q(t) = -k \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=0} + k \Big|_{z=0} = \alpha \phi \Big|_{z=0} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} \dots (A.3)$$

將(2.11)式對 z 微分得

$$\frac{\partial W(z,t)}{\partial z} = e^{-B\left(z - \frac{Bt}{2}\right)^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{B}{2A^2} \cdot e^{-B\left(z - \frac{Bt}{2}\right)^2} \cdot \phi \dots (A.4)$$

當 $z=0$ ，將(2.11)及(2.18)式代入上式得：

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{\alpha f(t)}{B} \cdot e^{-\frac{B^2 t}{4A^2}} + \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-\frac{B^2 t}{4A^2}} \cdot W(0,t) \dots (A.5)$$

當 $z=0$ ，將(2.11)及(A.5)式代入(A.3)式得：

$$q(t) = \frac{\alpha \cdot f(t)}{B} \cdot e^{-\frac{B^2 t}{4A^2}} + \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-\frac{B^2 t}{4A^2}} \cdot W(0,t) \dots \dots \dots (A.6)$$

將 $z=0$ 代入(2.19)式可得：

$$W(0,t) = \frac{1}{A\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \dots \dots \dots (A.7)$$

將(A.7)式代入(A.6)式代入上式得邊界條件：

$$B.C. : q(t) = \frac{\alpha \cdot f(t)}{B} \cdot e^{-\frac{B^2 t}{4A^2}} + \frac{\alpha}{2A\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{B^2 t}{4A^2}} \cdot \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \dots (A.8)$$

收稿日期：民國 88 年 7 月 13 日

修正日期：民國 88 年 8 月 6 日

接受日期：民國 88 年 8 月 13 日