



## 自由跌水末端深度比之探討

### Investigation on End Depth Ratio of a Free Overfall

淡江大學水資源及環境工程學系教授

施 濟 吉

Ching-Chi Shih

#### 摘 要

流況為次臨界流，臨界深度與斷崖深度分別為  $y_c$  與  $y_e$ ，若不計水頭損失與渠底高程的改變，利用 Anderson's 方法所求得之自由跌水之末端深度比  $y_e/y_c$  較一般的共識值小。但是，涵蓋了摩擦水頭損失，即可提高末端深度比，其幅度視自斷崖與發生臨界流處之間的距離  $\Delta x$  及摩擦因子  $f$  的乘積  $f\Delta x/y_c$  而定。如果末端深度比採用一般的共識值，即寬矩形與矩形渠道分別以 0.710 與 0.715 計，則  $f\Delta x/y_c$  為一定值。若為寬矩形渠道， $f\Delta x/y_c = 0.1467583$ ；若為矩形渠道， $f\Delta x/y_c = 0.07510867 \cdot 0.1473389$  與 0.1674705，當  $b/y_c$  分別等於 1，5，10，其中  $b$  為渠寬。

**關鍵詞：**自由跌水，渠流。

#### ABSTRACT

For a subcritical flow with a critical depth  $y_c$  and an end depth  $y_e$  of a free overfall, if the head loss and the change in elevation of the channel bottom are neglected, the end depth ratios  $y_e/y_c$  as predicted by Anderson's method are generally smaller than those as commonly accepted. However, including the frictional head loss will increase the value of end depth ratio, the range of which depends upon the product  $f\Delta x/y_c$ , where  $\Delta x$  is the distance from the section with a critical flow prevailing to the brink and  $f$  denotes the friction factor. For wide open and rectangular channels, if commonly accepted values of end depth ratio for a free overfall, 0.710 and 0.715 respectively, are used, the product  $f\Delta x/y_c$  will be fixed constants;  $f\Delta x/y_c = 0.1467583$  for a wide open channel, and  $f\Delta x/y_c = 0.07510867, 0.1473389$  and 0.1674705 for a rectangular channel with  $b/y_c = 1, 5, 10$  respectively, where  $b$  denotes the channel width.

**Keywords:** Free overfall, Channel flows.

## 一、前言

渠底高程突然急劇下降，致使最底下的流線脫離渠底形成一自由跌水(Free overfall)。類似於堰流(Weir flow)同樣具有上、下兩自由面(Free surface)，不過自由跌水是堰流的極端，因堰高等於 0。一般而言，自由跌水多半位於渠道末端，上游流況通常是次臨界流(Subcritical flow)，少數情況為超臨界流(Supercritical flow)；其功能以消能與量水為主，為水利工程常見的流況。若用於量水，斷崖(Brink 或 end)的水深  $y_e$  為探討  $y_2$  的重點。1936 年 Rouse 首先求得  $y_e = 0.715y_c$ ， $y_c$  為臨界深度(Critical depth)。其實，末端深度比(End depth ratio)  $y_e/y_c$  相當於因流線彎曲而導致的收縮係數(Contraction coefficient)，後者可由堰流的流量係數(Discharge coefficient)並配合堰高趨近於 0、Rehbock 氏的流量係數公式以及臨界流特徵等關係式求得。而後有多位學者使用不同的技巧從事於類似的研究。以矩形與寬矩形渠道為例，計有 Southwell et. al. (1946)、Jaeger(1948)、Roy(1949)、Fraser(1961)與 Hay(1958)；求得的結果分別為  $y_e = 0.715y_c$ 、 $y_e = 0.72y_c$ 、 $y_e = 0.72y_c$ 、 $y_e = 0.71y_c$  與  $0.676y_c$ 。另外，Rouse (1936)、Krainjenhoff (1976)、Rajaratnam (1964)與 Muralidhar (1968)諸人的實驗結果指出，寬矩形渠道與矩形渠道的自由跌水之末端深度比分別等於 0.710 與 0.715。因此，若渠道斷面形狀為矩形與寬矩形時，自由跌水的末端深度比之共識值分別視為 0.710 與 0.715。

在上述諸多分析末端深度比的方法中，以 Anderson's(1967)方法的假設最簡捷(討論於下節)，而且合理，其技巧相當靈活，可應用於任何渠道斷面形狀之自由跌水。唯一的缺點是所求得的末端深度比偏低。本文改進 Anderson's 方法，以期所求得之末端度比更能趨近於上述的共識值。

## 二、理論分析

如圖 1 所示的斷崖，假設自由面的坡度或曲率很小，同時自由面至渠底間的流線曲率  $1/r$  為

線性型分佈( $r$  為曲率半徑)，以渠底的曲率為最小，其值等於 0，而以自由面的曲率為最大，其值為  $d^2h/dx^2$ ， $h$  與  $x$  分別代表水深與縱向座標(Longitudinal coordinate)，則任何斷面的儀壓頭(Piezometric head)可由法線加速度積分求得(Subramanya, 1997)，即

$$h_p = h + \frac{V^2}{g} \frac{d^2h}{dx^2} \left( hy - \frac{y^2}{2} \right) \dots\dots\dots(1)$$

式中， $y$  為自渠底起算的深度， $y=0$  與  $h$  分別代表渠底與自由面； $V$  代表斷面平均速度(而後簡稱為速度)。法線加速度為  $v^2/r$ ， $v$  為局部速度，係以平均速度  $V$  計。由於儀壓頭因不同深度而異，須取其平均值，再改以有效儀壓頭(Effective piezometric head)  $h_{ep}$  表之。故式(1)等號右邊第二項沿深度積分，上下限分別為 0 與  $h$ ，而後再除以  $h$ ，即可得

$$h_{ep} = h + \frac{1}{3} \frac{V^2 h}{g} \frac{d^2h}{dx^2} \dots\dots\dots(2)$$

式中  $g$  為重力加速度。式(2)係來自 Boussinesq (Jaeger, 1957)。此後用不著再考慮沿不同深度的變化，故改以  $y$  取代  $h$  以代表自由面高度，即水深。最後，再配合比能  $E$  的定義，就可得

$$E = y + \frac{1}{2} \frac{V^2 y}{g} \frac{d^2y}{dx^2} + \alpha \frac{Q^2}{2gA^2} \dots\dots\dots(3)$$

式中， $\alpha$  為能量係數(Energy coefficient)，以 1 計， $A$  為通水面積(Flow area)。參閱圖 1，在自由面上，水平速度與垂直速度分別以  $V_x$  與  $V_y$  表之，同時其加速度分別等於 0 與  $-g$ ，即  $dV_x/dt=0$  與  $dV_y/dt=-g$ 。另外，由於自由面亦為流線，即  $dy/dx = V_y/V_x$ ，則式(3)等號右邊第二項  $d^2y/dx^2$  可改以所考慮的變數予以表示(Anderson, 1967)。所以式(3)變為

$$E = y + \frac{Q^2}{2gA^2} + \frac{1}{3} \frac{Q^2}{gA^2} y \left( \frac{-g}{V_x^2} \right) \dots\dots\dots(4)$$

除了上述的主要假設外，再假設  $V_x$  以  $V$  計，則式(4)又可簡化為

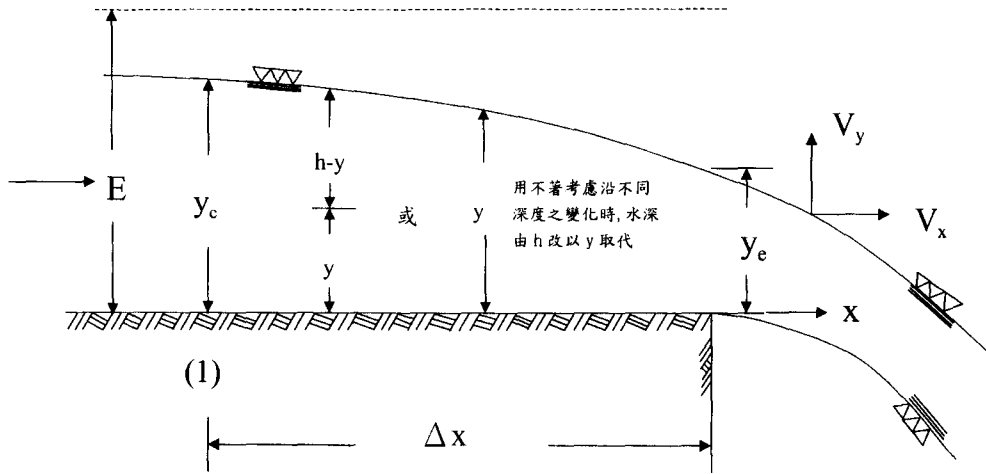


圖 1 自由跌水示意圖

$$E = \frac{2}{3}y + \frac{Q^2}{2gA^2} \dots\dots\dots(5)$$

式中， $Q$  為流量，即  $Q=VA$ 。式(5)可適用於斷崖附近的任何斷面。

如果式(5)用於斷崖，即可求得斷崖水深  $y_e$ ，但其上的比能  $E_e$  須為已知，或由另一途徑估算求得。最簡單的估算方式之一是利用產生臨界流的斷面。參閱圖 1，若斷面 (1) 之流況為臨界流，則其處與斷崖間的距離  $\Delta x$  大致等於臨界深度  $y_c$  的三至六倍(Henderson, 1970; Subramanya, 1997)。若渠道為寬矩形，能量線坡度  $S_r$  採用 Chezy's 公式，且水力半徑  $R$  以深度  $y$  計，同時利用摩擦因子(friction factor)  $f$  與 Chezy's 常數  $C$  間的關係，即  $C = \sqrt{8g/f}$ ，則由能量方程式可求得在斷崖上的  $E_e$ ，其結果為

$$\frac{E_e}{y_c} = 1.5 - \frac{\Delta x' f}{2} \left[ 1 + \frac{1}{\eta^3} \right] \dots\dots\dots(6)$$

式中  $\eta = \frac{y_e}{y_c}$   
 $\Delta x' = \frac{\Delta x}{y_c}$

式(6)等號右邊第二項  $f(1+1/\eta^3)/16$  代表摩擦水頭

損失。如果摩擦因子  $f$  與末端深度比  $\eta$  分別以 0.02 與 0.7 計，則  $f(1+1/\eta^3)/16$  大致等於  $4.894 \times 10^{-3}$ ，其值遠大於一般的坡度  $S_0$ ，故式(6)並未包括重力。若須計重力，則須於等號右邊另加  $S_0 \Delta x'$ 。引用式(5)於斷崖上，則深度  $y$  與通水面積  $A$  分別為  $y_e$  與  $A_e (=by_e)$ ，其上的比能為式(6)所示，則式(5)變為

$$6 \left[ 1.5 - \frac{\Delta x' f}{2} \left( 1 + \frac{1}{\eta^3} \right) \right] - 4\eta - \frac{3}{\eta^2} = 0 \dots\dots\dots(9)$$

若斷面(1)至斷崖間的水頭損失不計，相當於  $f=0$ ；簡化後，則式(9)變為  $9 - 4\eta - 3/\eta^2 = 0$ ， $\eta = 6.94$ 。另外，由式(9)得知

$$\Delta x' f = \frac{16 \left[ 1.5 - 1/6(4\eta + 3/\eta^2) \right]}{1 + 1/\eta^3} \dots\dots\dots(10)$$

另一方面，若為矩形渠道，水力半徑  $R$  不能以水深計，則式(9)與式(10)分別變為

$$1.5 - \frac{\Delta x' f}{2} \left[ 1 + 2 \frac{y_c}{b} + \frac{1}{\eta^3} \left( 1 + 2\eta \frac{y_c}{b} \right) \right] = \frac{1}{6} \left[ 4\eta + \frac{3}{\eta^2} \right] \dots\dots\dots(11)$$

$$\Delta x' f = \frac{16[1.5 - 1/6(4\eta + 3/\eta^2)]}{1 + 2y_c/b + 1/\eta^3(1 + 2\eta y_c/b)} \dots\dots\dots(12)$$

參閱式(11)與式(12)，如果  $y_c/b$  趨近於 0，即底寬  $b$  近於無窮大，則這兩式就分別回復為式(9)與式(10)。

### 三、結果與討論

在斷崖附近，臨界流的發生處大致位於三至六倍臨界深度  $y_c$  之上游，即  $\Delta x' = \Delta x/y_c = 3 \sim 6$ ；另外，摩擦因子  $f$  之值採用 0.01 至 0.03，大致可涵蓋中型斷面的人工渠道。本研究共採用四個不同的臨界流發生處， $\Delta x' = 3, 4, 5, 6$ ；四個不同的底寬比， $b/y_c = \infty, 10, 5, 1$ ，其中  $b/y_c = \infty$  相當於寬矩形渠道，'5'與'10'為一般視為矩形渠道可以寬矩形渠道計的臨界。

寬矩形渠道的分析結果示於式(9)與式(10)。前者顯示末端深度比  $\eta (=y_e/y_c)$  視不同的摩擦因子  $f$  與臨界流發生處  $\Delta x' (= \Delta x/y_c)$  而定，其計算結果展示於圖 2，水平與垂直座標軸分別為  $f$  與  $\eta$ ，而以  $\Delta x'$  為參數。不論  $\Delta x'$  的值為若干，末端深度比均隨著摩擦因子的值之增加呈現遞增，幾乎為線性型。以目前所探討的範圍 ( $\Delta x' = 3, 4, 5, 6$ ) 而言， $y_e/y_c$  的最大值與最小值分別為 0.7135254 與 0.7039673。但是，寬矩形渠道的末端深度比  $y_e/y_c$  通常以 0.710 為共識值，示於圖 2 上方的水平線，其線只與  $\Delta x' = 6$  與 5 的兩條

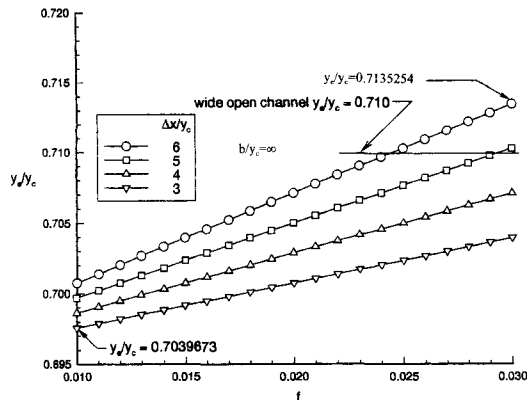


圖 2 寬矩形渠道之末端深度比

曲線相交，但不與  $\Delta x' = 4$  與 3 的兩條曲線相交，除非提高  $f$  值的上限(目前為 0.03)。其實，式(9)的考量為在斷崖上的比能  $E_c$  不再以臨界比能  $E_c$  計，其間的差距為相對於  $y_c$  之水頭損失，即  $\frac{\Delta E}{y_c} = (E_c - E_e)/y_c = f\Delta x'/16 \times [1 + 1/\eta^3]$ ，除了  $\eta$  外，差距決定於摩擦因子  $f$  與間距  $\Delta x'$  的乘積，即  $f\Delta x'$ ，而不是單獨的  $f$  值或是單獨  $\Delta x'$  值。這說明了為何  $y_e/y_c = 0.710$  的水平線段只能與較大間距  $\Delta x'$  的兩條曲線(圖形符號為圓與方塊，或  $\Delta x' = 6$  與 5)相交，而不與另二條曲線(圖形符號為三角與倒三角，或  $\Delta x' = 4$  與 3)相交；而且相交處位於圖之右上方。 $f\Delta x'$  的大小視末端深度比  $\eta$  而定，示於式(10)。如果末端深度比  $\eta$  以共識的 0.710 計，則  $f\Delta x' = 0.1467583$ 。這是個相當有趣的數字。一般而言，渠道的粗糙度  $n$  與  $C$ ，或由此而求得的  $f$  值，以及臨界流的發生處，這些都不是很明確的，往往只能得知落在哪一範圍內。如果，吾人接受寬矩形渠道自由跌水的末端深度比  $\eta$  等於 0.710 為一明確的事實，那麼上述的數字即明確表示產生臨界流之處與斷崖間的相對水頭損失為  $\frac{\Delta E}{y_c} = 0.1467583/16 \times (1 + 1/0.710^3) \times y_c = 0.0348 \times y_c$ 。這樣的話就用不著了解臨界流發生於何處，以及其間的粗糙度的確實值為若干等困惑。

矩形渠道的末端深度比  $\eta (=y_e/y_c)$  示於式(11)，非常類似於式(9)，唯一差異就是式(11)多了一個反映渠寬因素的寬度比  $b/y_c$ ，其值等於 10, 5 與 1 的計算結果分別展示於圖 3 至圖 5。這三張圖如圖 2 一般，同樣以  $f$  與  $\eta$  為水平與垂直座標軸，另以  $\Delta x'$  為參數。如同寬矩形渠道，末端深度比  $y_e/y_c$  也是隨著摩擦因子  $f$  值的增加而遞增，也幾乎都是呈現線性型的變化。末端深度比的最大值與最小值除了受間距  $\Delta x'$  的影響外，同時受寬度比  $b/y_c$  的影響。針對本研究所探討的範圍 ( $0.03 \geq f \geq 0.01, \Delta x' = 3, 4, 5, 6$ )，寬度比等於 10, 5 與 1 時，末端深度比  $y_e/y_c$  的最大值及最小值分別為 (0.7165406, 0.6980591), (0.7195801, 0.6985596), (0.7445069, 0.7025513)

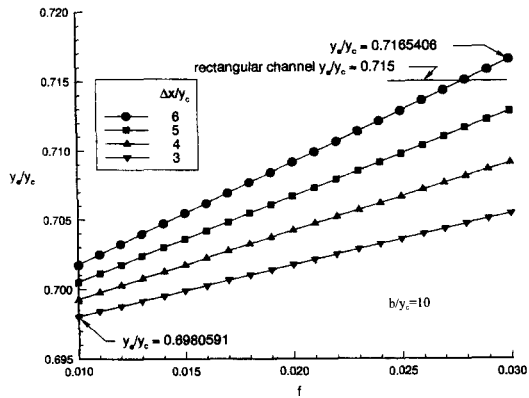


圖 3 寬度比( $b/y_c$ )等於 10 之末端深度比

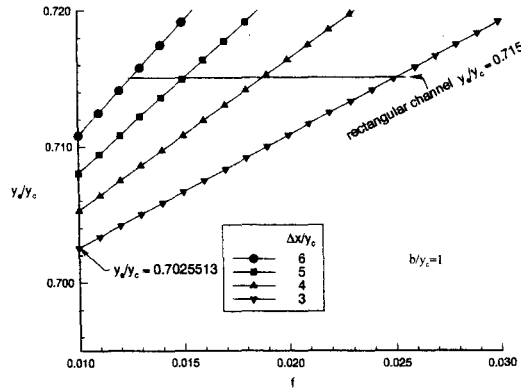


圖 5 寬度比( $b/y_c$ )等於 1 之末端深度比

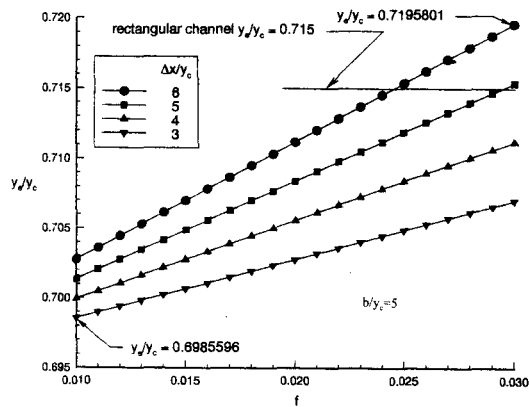


圖 4 寬度比( $b/y_c$ )等於 5 之末端深度比

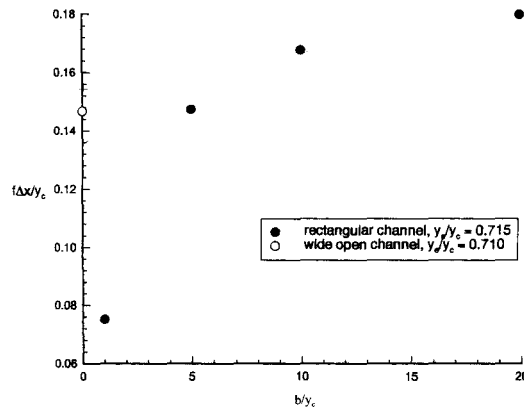


圖 6  $f\Delta x'/y_c$  與寬度比( $b/y_c$ )之關係

。由於垂直座標尺度為自 0.695 至 0.720，故最大  
值 0.7445069 未示於圖 5。

矩形渠道的末端深度比  $y_e/y_c$  通常採用  
0.715，而不是 0.710。前者代表寬度比不甚懸殊，  
而後者卻相當於寬度比趨近於無窮大。圖 3 至圖  
5 的水平線段即代表  $y_e/y_c = 0.715$ ，每一張圖均有  
四條近乎直線的曲線用以代表不同的間距  
 $\Delta x' (= \Delta x/y_c)$ 。圖 3 比圖 5 更不接近寬矩形渠道，  
其寬度比分別等於 1 與 10。所以圖 3 的水平線段  
與其他四條傾斜線都有交點；但是圖 3 的水平線段  
只與  $\Delta x/y_c = 6$  的傾斜線相交，與其他三傾斜線  
的交點均在範圍外 ( $f > 0.03$ )。這是由於隨著寬度  
比  $b/y_c$  的增加，上述末端深度比的最大值

與最小值均呈遞減趨勢；易言之，四條傾斜線的  
涵蓋範圍往下降。另外，臨界流發生處至斷崖間  
的相對水頭損失為

$$\frac{\Delta E}{y_c} = \frac{(E_c - E_e)}{y_c} = \frac{f\Delta x'}{16} \times \left[ 1 + \frac{2y_c}{b} + \left(1 + \frac{2\eta y_c}{\eta^3}\right) \right],$$

其值示於式(11)。式(12)顯示不同於寬矩形渠道，  
 $f\Delta x'$  之值卻視不同的寬度比  $b/y_c$  而定，其結果示  
於圖 6，以實心圓表示  $y_e/y_c = 0.715$ ，另空心圓代  
表寬矩形 ( $f\Delta x' = 0.1467583$ ,  $y_e/y_c = 0.710$ )。寬度  
比  $b/y_c = 1, 5, 10, 20$  時， $f\Delta x'$  的值分別等於  
0.07510867, 0.1473389, 0.1674705 與 0.1797506。

參閱式(12)，除了末端深度比  $\eta (= y_e/y_c)$  外，

$f\Delta x'$  的值還視寬度比  $b/y_c$  的值而定，其中  $\Delta x' = \Delta x/y_c$ 。若矩形渠道逐漸趨近於寬矩形，這相當於寬度比趨近於無窮大，或式(12)中  $y_c/b$  趨近於 0。在這種情況下， $f\Delta x'$  的值只決定於末端深度比  $\eta$  的值。如果在此趨近的過程中，渠道一直都視為矩形，而非寬矩形，則  $f\Delta x'$  等於 0.1938。然而，渠道為寬矩形時， $f\Delta x'$  的值係等於 0.1467583，而不是等於 0.1938。寬矩形渠道的  $f\Delta x'$  值並無法由式(12)的極限求得，這一點不同於一般的意料。

示於式(6)的能量方程式並未涵蓋重力，僅考慮摩擦而已；若考慮重力，則須於式(6)等號右邊須另加  $S_0\Delta x'$ ，其中  $\Delta x' = \Delta x/y_c$ 。如果摩擦因子  $f$  與末端深度比  $\eta (=y_c/y_c)$  分別以 0.02 與 0.7 估算，則  $[f(1+1/\eta^3)/16]$  約等於  $4.894 \times 10^{-3}$ ，大致為渠底坡度  $S_0$  的十倍，坡度係以  $10^{-4}$  計（參閱式(8)底下之說明）。一般而言，針對河川與渠道的實際粗糙度，其對應的摩擦因子之值均大於 0.02(參閱 Henderson, 1966)。斷崖比能  $E_c$  係等於臨界比能  $E_c$  減掉摩擦水頭損失再加上渠底下降的高程，後者即反映於坡度，代表重力的影響。所以摩擦水頭損失與坡度的角色適巧相反。摩擦水頭損失減小斷崖比能  $E_c$ ，提高末端深度比  $\eta$ 。相反地，坡度增加斷崖比能，減小末端深度比。雖然本研究不計重力，如式(6)所示，但也不礙於應用於這兩項因素均須同時考慮的分析。

Anderson's 方法配合能量方程式，可應用於斷崖前之流況為次臨界流與超臨界流的自由跌水。若不計重力，則用不著涵蓋以坡度為主的參數。另外，上游為次臨界流適宜於採用臨界深度為尺度，但超臨界流則須改用正常深度(Normal depth)。

#### 四、結論

如果自由跌水之水面線曲率很小，但是流線彎曲的因素必須涵蓋於儀壓頭，使用 Anderson's 方法即可求得適用於斷崖(End)附近的比能。比能同樣包括兩項：壓力頭(pressure head)與速度頭(velocity head)。唯一的修正就是壓力頭由原來的水深計，改為水深的三分之二，如式(5)所示，少

掉三分之一的水深係代表來自離心力的影響。若斷崖(End)前的流況為次臨界流，引用上述的結果於斷崖上，並不計摩擦水頭損失與渠底坡度，且在斷崖上的比能  $E_c$  以上游的臨界比能  $E_c$  計，則在斷崖之末端深度比  $\eta (=y_c/y_c)$  就相當於解一非線性代數式之根。代數式的型式決定於渠道的斷面形狀。通常由此方法所求得的末端深度比  $\eta$  偏小。若為矩形渠道(包括寬矩形)，所求得的末端深度比等於 0.694，比一般常用的 0.710 與 0.715 小，前者為寬矩形渠道的實驗結果，而後者為矩形渠道的實驗結果。不過 Anderson's 方法的理論依據相當簡單與合理，而且其結果可適用於任何斷面形狀的自由跌水。

如果重力仍然不予以考慮，但是斷崖與產生臨界處間的摩擦損失水頭予以考慮，則末端深度比  $y_c/y_c$  將由此明顯地提高，其值視斷面形狀、自臨界流發生處與崖斷之間距  $\Delta x$  與摩擦因子  $f$  等因素而定。但無論如何，末端深度比均大於 0.694。一旦涵蓋了摩擦損失水頭，那麼末端深度比將因寬矩形渠道或矩形渠道而有所差異。一般而言，寬矩形渠道的末端深度比小於矩形渠道的末端深度比。此外，矩形渠道還多了一個參數，即寬度比  $b/y_c$ 。為了使末端深度比符合常用的值，寬矩形與矩形渠道分別採用 0.710 與 0.715，間距  $\Delta x$  與摩擦因子  $f$  的影響，並不是獨立的與分開的，而是合併為一體。寬矩形渠道， $f\Delta x/y_c = 0.1467583$ ；而矩形渠道， $f\Delta x/y_c = 0.07510867$ ，0.1473389 與 0.1674705，分別相當於  $b/y_c = 1, 5, 10$ 。

斷崖前的臨界流大致發生於臨界深度  $y_c$  三至六倍的上游，其位置並不明確。但是渠道粗糙度  $n$  較為明確，故所求得的摩擦因子之值也就較肯定。而今，斷崖之末端深度比極具共識，根據這些共識值(例如，寬矩形與矩形渠道的末端深度比分別等於 0.710 與 0.715)，本研究指出間距  $\Delta x' (= \Delta x/y_c)$  與摩擦因子  $f$  之乘積為一明確的常數。根據這些明確的常數值可供兩方面的分析。一是利用  $f\Delta x'$  的乘積與摩擦因子  $f$  等值，就可求得臨界流發生於何處；若  $\Delta x/y_c$  不落於 3 至 6 之間，則顯示粗糙度  $n$  的值有待進一步的了解與查

證。

Anderson's 方法配合能量方程式適用於次臨界流與超臨界流的自由跌水，但須採用不同之深度尺度。

### 五、參考文獻

1. Anderson, M. V., 'Non-uniform Flow in Front of a Free Overfall', Acta Polytechnica Scandinavia, C142, Copenhagen, 1967.
2. Fraser, W. B., 'Gravity-deflected Jets in Two-Dimensional Flow', M. E. Thesis, University of Canterbury, N. Z., May 1961.
3. Hay, N. and Markland, E., 'The Determination of the Discharge over Weirs by the Electrolytic Tank', Proc. I.C.E. (London), vol. 10, p. 59, May 1958.
4. Henderson, F. M., Open Channel Flow, MacMillan Co. Limited, New York, 1966.
5. Jaeger, C., 'Hauteur d'eau a l'extremite d'un long deversoir', La Houille Blanche, vol. 3, part 6, p. 518, 1948.
6. Jaeger, C., Engineering Fluid Mechanics, Blackie and Son, London, 1957.
7. Krainjenhoff et. al., - Bos, M. B., (Ed.), Discharge Measurement Structures, Int. Inst. for Land Reclamation and Improvement, Wageningen, The Netherlands, Pub. no. 20, 1976.
8. Rajaratnam, N. and Muralidhar, D., 'End Depth for Exponential Channels', J. of Irr. and Drain. Div., Proc. ASCE, pp. 17-39, March 1964.
9. Rajaratnam, N. and Muralidhar, D., 'Characteristics of Rectangular Free Overfall', J. of Hyd. Res., IAHR, vol. 6, no. 3, pp. 233-258, 1968.
10. Rouse, H., 'Discharge Characteristics of the Free Overfall', Civil Engineering, ASCE, pp. 257-260, April 1936.
11. Roy, S. K., 'Note on the Stream Depth at the Edge of a Free Overfall', La Houille Blanche, vol. 4, part 6, p. 832, 1949.
12. Subramanya, F., Flow in Open Channels, Tata McGraw-Hill Publishing Co. Limited, New Delhi, 1997.
13. Southwell, R. V. and Vaisey, G. 'Relaxation Methods Applied to Engineering Problems: XII, Fluid Motions Characterized by Free Streamlines', Phil. Trans. Roy. Soc. (London), A, vol. 240, p. 117, 1946.

收稿日期：民國 88 年 2 月 26 日

修正日期：民國 88 年 6 月 27 日

接受日期：民國 88 年 6 月 30 日