



未飽和層土壤水分垂直入滲之數值模擬

Numerical Approximation of Vertical Moisture Movement in Unsaturated Soil

國立台灣大學農業工程學
研究所碩士

許瑞昌

R.C. Hsue

私立中國工商專校土木工程科
副教授

陳主惠

C.H. Chen

國立台灣大學農業工程學
研究所教授

劉振宇

C.W. Liu

摘要

地表水經由土壤入滲進入地下水層之過程十分複雜，因為土層之邊界條件和初始條件經常不是定值，土壤水力特性亦會隨時間及空間變化。並且在非飽和土壤中土壤水分趨近飽和時，其水力傳導係數隨變化微小之體積含水比而會有極大之變化。因此，當水分濕潤前緣經過時，在很小的深度範圍，變化劇烈之水力傳導係數會造成濕潤前緣附近產生一巨大之水頭梯度，在數值解之發展過程中，水力傳導係數離散化不論選取算數平均、幾何平均、調和平均，或其他複雜的公式，均無法正確描述其變化，造成質量守恆之問題。本文利用母體通量位能推導非飽和層流動方程式，以有限差分法離散，發展一維數值程式，在地表之上層邊界條件可考慮強度隨時間任意變化之降雨型態，下層邊界條件可考慮有無固定之地下水面，土壤臨前水文條件可考慮土壤任意分佈之體積含水比。模式可用來推估不同土壤在不同邊界及初始條件下之地表積水時間及土壤體積含水比剖面與地表入滲率曲線。在不同條件下程式模擬結果，其質量守恆均達 99-105%之精度，顯示上述濕潤前緣附近產生之巨大水頭梯度所造成之質量守恆問題已獲得良好之改善。模擬結果亦顯示地下水面之深淺及土壤臨前之體積含水比剖面會影響地表積水時間。地下水面越深者，其地表土壤較地下水面淺者越慢到達飽和，穩態之初始體積含水比剖面最快使地表土壤到達飽和。

關鍵詞：未飽和土壤，土壤水分，入滲，數值模擬。

ABSTRACT

It is complicated to predict water infiltration into subsoil because boundary and initial conditions of soil are not often constant. Also, soil hydraulic properties change with

time and space. In unsaturated soil, hydraulic conductivity, K , changes much with volumetric water content which changes little while soil is nearly saturated. As wetting front passes, under teeny depth change, hydraulic conductivity will change greatly and near the wetting front exists an enormous head gradient which can not be accurately approximated numerically and causes the mass-balance problem. In development of numerical solutions, there are many methods, such as arithmetic mean, geometric mean, harmonic mean or other complex formula, proposed to approximate hydraulic conductivity, but most of them can not the resolve the problem of mass-conservation. The study adopt matric flux potential concept to construct the unsaturated flow equation. A finite difference computer program is developed which has the upper boundary condition expressed by rainfall intensity changing with time, the lower boundary condition expressed by groundwater table, and the antecedent condition expressed by distribution of volumetric water content. The model can be used to estimate ponding time, T_p , soil volumetric water content profile, infiltration curve and mass balance curve. The simulated result under various condition shows that mass balance is 99~105% and the mass-balance problem caused by the enormous head gradient near wetting front is improved. The depth of groundwater table and soil antecedent profile of volumetric water content will influence on ponding time. The ponding time of deep groundwater table is longer than that of shallow one. The initial volumetric water content profile at steady state has the subsurface soil reach to saturated condition first.

Keywords: Unsaturated soil, Soil moisture, Infiltration, Numerical modelling.

一、前 言

入滲為一重要之水文現象，影響入滲之因子主要有：降雨強度、土壤種類、土壤臨前水文條件，因為土層之邊界條件和初始條件經常不是定值，並且土壤水力特性亦會隨時間及空間變化 (Haverkamp et al., 1977)，而影響入滲之因子主要有：(1) 降雨強度：當降雨強度小於地表最大入滲率前，地表土壤尚未到達飽和狀態，所有降雨全部入滲，該時之降雨強度即為入滲率。當降雨強度大於地表最大入滲率後，地表土壤到達飽和狀態，此後入滲率即隨時間而遞減。然而，在入滲率遞減過程中，若降雨強度減少而小於地表最大入滲率時，則地表土壤回復至未飽和狀態，入滲率即為降雨強度。(2) 土壤種類：土壤種類不同，其飽和體積含水比與水力傳導係數等土壤特性均不同，將影響地表土壤到達飽和之時

間。(3) 土壤臨前水文條件：地表土壤在降雨前之體積含水比不同，將影響降雨後地表土壤到達飽和之時間。因此描述入滲過程很複雜，傳統上入滲問題是利用經驗公式、解析解及數值解來解決，其中經驗公式最著名為 Horton's equation，但其並未將土壤之臨前水文條件及降雨強度之變化對入滲曲線所造成之影響納入考慮，而造成所估計之有效降雨有所偏差（見圖 1）。

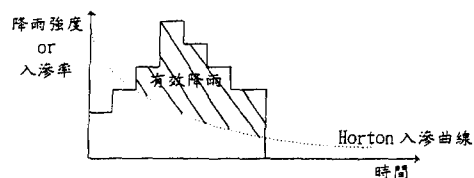


圖 1 Horton 估計有效降雨示意圖

入滲之解析解(Philip, 1957; Broadbridge and White, 1988; Warrick, 1991)大多利用理查方程式作為控制方程式,除簡化邊界條件與初始條件,並做一些特殊之假設方能求得解析解(Zabra, 1990)。因此,在非定值的邊界條件及初始條件下,由於土壤水力特性間之非線性關係(van Genuchten, 1980; Millington and Quirk, 1961),使得理查方程式之解析解極難求得,而必須依賴數值方法來預測非飽和土壤層中之水分移動情形(Hanks and Bowers, 1962; Giesel et al., 1972; Rajesh and Yeh, 1991)。

在非飽和土壤中,其水力傳導係數 K 值在土壤趨近飽和時隨變化極小之體積含水比 θ 而有極大的變化。因此,在濕潤前緣經過時,其上之土壤處於飽和狀態,而其下之土壤則尚未飽和,使得在很小的深度變化下, K 值有很大之變化,因而造成濕潤前緣附近產生一巨大之 $\frac{\partial K}{\partial Z}$,在計算機之模擬中將無法正確處理。然而,數值解之發展過程中,在模擬 K 值的離散上產生了許多不同的方法,如取算術平均、幾何平均、調何平均,甚至其他複雜的公式,但均不能符合上述狀況(Ross, 1990)。

因此,本文探討以母體通量位能(matric flux potential)來消除上述因 $\frac{\partial K}{\partial Z}$ 值所產生之數值發散問題,並且發展一數值程式,在地表上層邊界條件可考慮強度隨時間任意變化之降雨型態,下層邊界條件可考慮有無固定之地下水水面,土壤臨前水文條件可考慮土壤任意分佈之體積含水比,模式可用來推估不同土壤在不同之邊界條件及初始條件下之地表積水時間(ponding time)、及土壤體積含水比剖面與地表入滲率曲線。

二、文獻回顧

在土壤物理、農業工程、環境工程及地下水文學等許多科學及工程的研究領域,預測非飽和土壤中的液體流動是一個很重要的研究課題。在非飽和土壤層中液體流動之行為多假設為符合理查方程式(Hillel, 1980)。理查方程式是研

究土壤中水流移動行為被普遍接受之理論根據(Ross, 1990),理查方程式可寫成以水頭 h 或體積含水比 θ 為獨立變數的型式。以下針對理查方程式之三種型式及非飽和土壤水力傳導係數二部份,作出詳細之說明。

(一) 理查方程式之三種型式

描述一維垂直土壤水份移動之偏微分方程式可表為

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \left[K(\theta) \left(\frac{\partial h}{\partial Z} + 1 \right) \right] \dots\dots\dots(1)$$

其中 θ = 體積含水比 [L^3L^{-3}]
 $K(\theta)$ = 水力傳導係數 [LT^{-1}]
 Z = 深度 [L], 向上為正
 H = 水頭 [L]

由於式(1)包含 θ 及 h 二變數,稱之為混和型之理查方程式。

若 $h(\theta)$ 關係唯一時,即不考慮遲滯現象,定義

$$C(\theta) = \frac{d\theta}{dh} = \text{specific water capacity} \dots\dots\dots(2)$$

$$D(\theta) = \frac{K(\theta)}{C(\theta)} = \text{diffusivity} \dots\dots\dots(3)$$

將式(3)代入式(1)可寫成以 h 為變數之偏微分方程式

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \left[K(h) \left(\frac{\partial h}{\partial Z} + 1 \right) \right] \dots\dots\dots(4)$$

式(4)稱為 h -型之理查方程式,由於水頭 h 在非飽和層中為負值,並逐漸變成飽和層中之正值,因此可同時考慮飽和及非飽和土壤區域。若土壤均質等向,且在飽和層中,則式(4)即可簡化為 Laplace equation。將式(2)、(3)代入式(1)可寫成以 θ 為變數之偏微分方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right] + \frac{\partial K(\theta)}{\partial Z} \dots\dots\dots(5)$$

式(5)稱為 θ -型之理查方程式，僅在 $h(\theta)$ 之關係唯一時適用，因此不能考慮遲滯現象；並且，因為飽和層中土壤體積含水比為定值 θ_s ，所以亦不適用於飽和層土壤。

由於式(1)、(4)、(5)均為非線性方程式，因此只能求得特殊情況下的解析解。Philip(1957)提出式(4)之均質半無限域的一個特解，其邊界條件如下

$$\begin{aligned} t < 0, \quad Z \geq 0, \quad \theta = \theta_i \\ t \geq 0, \quad Z = 0, \quad \theta = \theta_s \end{aligned} \dots\dots\dots (6-a)$$

其中為土壤均 θ_i 勻分佈之初始體積含水比，在土壤表層到達飽和體積含水比 θ_s 後作為起始之模擬條件。

並且 Philip(1958)利用 Boltzmann transform 導出以時間 $t^{1/2}$ 形式之級數解，其邊界條件如下

$$\begin{aligned} t < 0, \quad Z \geq 0, \quad h = h_i \\ t \geq 0, \quad Z = 0, \quad h = h_s \end{aligned} \dots\dots\dots (6-b)$$

其中 h_i 為土壤均勻分佈之初始水頭，土壤表層到達飽和時之水頭 h_s 後，作為起始之模擬條件。

由於 Philip 之級數解僅在有限之時間 t 值收斂，此外 t 值收斂之範圍依不同土壤特性、初始條件及邊界條件而異。但是當時間趨近無限大時，則會降低了其解之正確性(Haverkamp et al., 1977)。

依據下述關係

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right)_{\theta} = - \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_z \cdot \left(\frac{\partial Z}{\partial \theta} \right)_t \dots\dots\dots (7)$$

將式(7)代入式(5)得出

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[D \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right] = \frac{dK(\theta)}{d\theta} \dots\dots\dots (8)$$

Parlange 在一系列的的研究中(1971,1972)，提出式(8)之近似解析解(quasianalytical solution)，其邊界條件同(6-a)、(6-b)，並且在土壤表層有一不變之通量(flux) q ：

$$\begin{aligned} t < 0, \quad Z \geq 0, \quad \theta = \theta_i \\ t \geq 0, \quad Z = 0, \quad q = -D \frac{\partial \theta}{\partial Z} - K \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

然而，此近似解析解有下述之限制：

- (1)定義域需為半無限
- (2)初始體積含水比需為定值
- (3)邊界條件不隨時間改變
- (4)土壤表面之通量不能超過飽和傳導係數 K_s
- (5)忽略遲滯現象

實際上，土壤之初始條件及邊界條件並不符合上述簡化後之狀況，其解析解之應用範圍有限，故發展限制條件較少之數值模式是後續研究之重要課題，數值模式依離散或線性化之方法有所不同(Haverkamp et al.,1977)。

然而，以上述三型之理查方程式進行數值模擬時，尤其在模擬乾燥土壤的入滲時，為了克服在濕潤前緣附近因存在一巨大之水頭梯度而產生之穩定度問題，很多研究包括 Raats and Gardner, 1974 採用 Kirchhoff 積分轉換式

$$\phi(h) = \int_{-\infty}^h K(h') dh'$$

用來解決上述穩定度之問題。

非飽和土壤入滲之數值模擬過去均採用 θ 型或 h 型之理查方程式(Zabra, 1990)，並且以各種之有限差分法或有限元素法來尋求上述二型之數值解(Huyakorn et al., 1984, 1986)。然而，Allen 和 Murphy(1985,1986)與 Celia et al.(1987)使用了混和型之理查方程式來求得數值解。

對非飽和土壤中的入滲問題而言，以不同型式之偏微分控制方程式的數值近似法會導致截然不同的模擬結果(Zabra,1990)。Zabra (1990)提出不論使用有限差分法或有限元素法來做數值模擬時，採用 h -型或 θ -型之理查方程式所模擬出的結果會得到較差的質量守恆，而採用混和型之理查方程式則可得到較佳之質量平衡。

(二) 非飽和土壤水力傳導係數

可靠地預測非飽和水力傳導係數 K 十分困難，不僅需要克服現場實驗土壤之變異性，而且，直接測量 $K(h)$ 之實驗是費時且昂貴(van Genuchten,1980)。因此，有些學者(Millington and Quirk,1961)從較易測得的土壤特性曲線 $\theta(h)$

中，來分析非飽和水力傳導係數，並且以不同的形式成功地應用在許多的研究上(Green and Corey, 1971; Jackson, 1972; Bruce, 1972)。然而，這些研究在非均質的多維非飽和土壤水流模式中，容易產生無法應用的缺點(van Genuchten, 1980)。

此外，亦有些學者(Gardner, 1958; Brooks and Corey, 1964; Jeppson, 1974; Mualem, 1976)推導非飽和水力傳導係數 K 之數學解析式，包括下列描述 K 函數的模式被用來模擬土壤水流移動之方程式。

Gardner (1958) 提出非飽和土壤水力傳導係數與水頭之關係為

$$K(h) = K_s \cdot e^{\alpha h} \dots\dots\dots(10)$$

其中 K_s = 飽和水力傳導係數[LT⁻¹]
 K = 非飽和水力傳導係數[LT⁻¹]
 H = 水頭[L] (負值)
 α = 土壤孔隙分佈參數[L⁻¹]

Mualem(1976)利用土壤孔隙粒徑分佈之概念模式，從 $h(\theta)$ 之關係中提出了水力傳導係數之表示式：

$$K(\theta) = K_s \cdot S^2 \left[\frac{\int_0^S \frac{1}{h(x)} dx}{\int_0^1 \frac{1}{h(x)} dx} \right]^2 \dots\dots\dots(11)$$

其中 θ_r = 殘餘體積含水比[L³L⁻³]
 θ_s = 飽和體積含水比[L³L⁻³]

$$S = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \text{飽和度[無因次]}$$

x = 積分變數

van Genuchten(1980)提出飽和度 S 與 $h(\theta)$ 之關係式

$$S = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = (1 + |\beta h|^n)^{-m} \dots\dots\dots(12)$$

其中 $n = h(\theta)$ 曲線之形狀因子一[無因次]
 $\beta = h(\theta)$ 曲線之形狀因子二[L⁻¹]

$$m = 1 - 1/n \text{ [無因次]}$$

van Genuchten (1980) 並利用 $h(\theta)$ 關係及結合(11)、(12)式而得到非飽和水力傳導係數的一個數學表示式：

$$K(h) = \frac{\left\{ 1 - |\beta h|^{n-1} \left[1 + |\beta h|^n \right]^{-m} \right\}^2}{\left[1 + |\beta h|^n \right]^{\frac{m}{2}}} \dots\dots\dots(13)$$

三、模式理論

(一) 假設

考慮一維等溫下均質等向之不脹縮(nonswelling)土壤，位於單一土層之非拘限含水層中，模擬時土壤體積不因其體積含水比之增減而變化，且不考慮遲滯現象。同時假設水力傳導係數 K 與水頭 h 之關係式滿足 $K(h) = K_s \cdot e^{\alpha h}$ ，土壤之體積含水比 θ 與水頭 h 之關係式滿足

$$\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = (1 + |\beta h|^n)^{-m}。$$

(二) 控制方程式

考慮一維之混合型理查方程式可表為

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} K \frac{\partial h}{\partial Z} + \frac{\partial K}{\partial Z} \dots\dots\dots(14)$$

將非線性之控制方程式轉成線性，須定義母體通量位能(matric flux potential)：

$$\phi(h) = \int_{-\infty}^h K(h') dh' \dots\dots\dots(15)$$

若 $K(h) = K_s \cdot e^{\alpha h}$

代入(14)式，則

$$\phi(h) = \int_{-\infty}^h K_s \cdot e^{\alpha h'} dh' = \frac{K_s \cdot e^{\alpha h}}{\alpha} = \frac{K(h)}{\alpha}$$

即 $K(h) = \alpha \phi(h) \dots\dots\dots(16)$

利用來伯尼茲微分積分公式：

$$\frac{\partial \phi(h, Z)}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial Z} \int_{-\infty}^h K(h') dh' = \int_{-\infty}^h \frac{\partial K(h')}{\partial Z} dh' + K(h) \frac{\partial h}{\partial Z} \quad \dots\dots\dots(17)$$

因假設土壤為均質，所以式(17)中 $\frac{\partial K(h')}{\partial Z} = 0$

$$\text{則式(17)可寫成 } \frac{\partial \phi(h, Z)}{\partial Z} = K(h) \frac{\partial h}{\partial Z} \quad \dots\dots\dots(18)$$

$$\text{由式(16)得 } \frac{\partial K(h)}{\partial Z} = \alpha \frac{\partial \phi(h)}{\partial Z} \quad \dots\dots\dots(19)$$

$$\text{由式(18)得 } \frac{\partial}{\partial Z} (K \frac{\partial h}{\partial Z}) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} \quad \dots\dots\dots(20)$$

式(19)及式(20)代入式(14)得

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial Z} \quad \dots\dots\dots(21)$$

上式為本文線性化後之控制方程式，以母體通量位能 ϕ 替代未線性化前之水力傳導係數 K ，將可消除在濕潤前緣附近因存在一巨大之水頭梯度而產生之質量守恒問題。

四、數值離散

由於理查方程式為非線性之偏微分方程式，在複雜之邊界條件及初始條件下極難求得其解析解，因此本文採用數值方法求解。常用之空間離散方法包括有限差分法與有限元素法，並配合時間之離散與疊代的過程，求得各個離散化之方程式及數值模擬結果。

本文利用母體通量位能建立非飽和層流動方程式，以有限差分法離散，配合無條件穩定之 Crank-Nicolson 數值方法來離散空間為第 i 點，時間間隔為第 j 至第 $j+1$ 之方程式。

(一) 控制方程式離散

控制方程式之 Crank-Nicolson 數值離散可寫成

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} + \frac{\partial K}{\partial Z} \right]_i^{j+\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots(22)$$

其中

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \theta}{\partial t} \right]_i^{j+\frac{1}{2}} &= \frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\Delta t} \\ \left[\frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right]_i^{j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\Delta Z_i} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial Z} \right)_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial Z} \right)_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{\Delta Z_i} \left[\frac{\phi_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - \phi_i^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta Z_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{\phi_i^{j+\frac{1}{2}} - \phi_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta Z_{i-\frac{1}{2}}} \right] \\ &= \frac{1}{\Delta Z_i} \left[\frac{(\phi_{i+1}^{j+1} + \phi_{i+1}^j) - (\phi_i^{j+1} + \phi_i^j)}{2 \cdot \Delta Z_{i+\frac{1}{2}}} \right] \\ &\quad - \frac{1}{\Delta Z_i} \left[\frac{(\phi_i^{j+1} + \phi_i^j) - (\phi_{i-1}^{j+1} + \phi_{i-1}^j)}{2 \cdot \Delta Z_{i-\frac{1}{2}}} \right] \\ \left[\frac{\partial K}{\partial Z} \right]_i^{j+\frac{1}{2}} &= \frac{K_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - K_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta Z_i} \\ &= \frac{(K_{i+1}^{j+1} + K_{i+1}^j + K_{i+1}^{j+1} + K_i^j) - (K_i^{j+1} + K_i^j + K_{i-1}^{j+1} + K_{i-1}^j)}{4 \cdot \Delta Z_i} \end{aligned}$$

令

$$\theta_i^{j+1, m+1} = \theta_i^{j+1, m} + \frac{d\theta}{d\phi} \Big|_i^{j+1, m} \cdot (\phi_i^{n+1, m+1} - \phi_i^{n+1, m}), C = \frac{d\theta}{d\phi}$$

， m 為疊代次數

代入式(22)整理得

$$\begin{aligned} \phi_{i+1}^{j+1, m+1} &\left[\frac{1}{2\Delta Z_i \Delta Z_{i+\frac{1}{2}}} \right] + \dots \\ \phi_i^{j+1, m+1} &\left[-\frac{1}{2\Delta Z_i \Delta Z_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2\Delta Z_i \Delta Z_{i-\frac{1}{2}}} - \frac{C_i^{j+1, m}}{\Delta t} \right] + \dots \\ \phi_{i-1}^{j+1, m+1} &\left[\frac{1}{2\Delta Z_i \Delta Z_{i-\frac{1}{2}}} \right] = \frac{(\theta_i^{j+1, m} - \theta_i^j) + C_i^{j+1, m} \cdot (-\phi_i^{j+1, m})}{\Delta t} \\ &\frac{1}{2\Delta Z_i \Delta Z_{i+\frac{1}{2}}} [\phi_{i+1}^j - \phi_i^j] + \frac{1}{2\Delta Z_i \Delta Z_{i-\frac{1}{2}}} [\phi_i^j - \phi_{i-1}^j] - \\ &\frac{K_{i+1}^{j+1, m} + K_{i+1}^j - K_{i-1}^{j+1, m} - K_{i-1}^j}{4\Delta Z_i} \end{aligned} \quad (23)$$

(二) 邊界條件離散

以數值近似法來模擬入滲情形時，需考慮上層及下層邊界。在上層邊界中，可供控制的因子有體積含水比、水頭及上層入滲之通量；下層邊界可分為有固定之地下水面與無地下水面之半無限域等兩種類型。當無地下水面時，下層邊界以通量 $q = -K$ 控制，屬於 Neumann 型之定流量邊界。當有地下水面時，下層邊界以飽和體積含水比 θ_s 作為控制，屬於 Dirichlet 型之定水頭邊界。

地表積水時間(ponding time) T_p ，定義為從開始降雨補注到地表產生積水所經過的時間。本文在 T_p 之前，採用頂層入滲之通量來控制上層邊界；在 T_p 之後，採用飽和體積含水比來控制上層邊界，並且無積水之產生。

1. 上層邊界條件

地表有一可隨時間變化之通量 q_1 ，寫成以達西公式之 Crank-Nicolson 數值離散，並令地表之空間結點 $i = nz$ 得

$$-\left(\frac{\phi_{nz+1}^{j+1} + \phi_{nz+1}^j}{2\Delta Z_{nz+\frac{1}{2}}}\right) - \frac{K_{nz+1}^{j+1} + K_{nz+1}^j}{4} \dots\dots\dots(24)$$

$$= q_1 - \left(\frac{\phi_{nz}^{j+1,m} + \phi_{nz}^j}{2\Delta Z_{nz+\frac{1}{2}}}\right) + \frac{K_{nz}^{j+1,m} + K_{nz}^j}{4}$$

地表離散化之控制方程式可寫成

$$\phi_{nz+1}^{j+1,m+1} \left[\frac{1}{2\Delta Z_{nz}\Delta Z_{nz+\frac{1}{2}}} \right] +$$

$$\phi_{nz}^{j+1,m+1} \left[\frac{-1}{2\Delta Z_{nz}\Delta Z_{nz+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2\Delta Z_{nz}\Delta Z_{nz-\frac{1}{2}}} - \frac{C_{nz}^{j+1,m}}{\Delta t} \right] +$$

$$\phi_{nz-1}^{j+1,m+1} \left[\frac{1}{2\Delta Z_{nz}\Delta Z_{nz-\frac{1}{2}}} \right] = \frac{(\theta_{nz}^{j+1,m} - \theta_{nz}^j) + C_{nz}^{j+1,m} \cdot (-\phi_{nz}^{j+1,m})}{\Delta t}$$

$$- \frac{1}{2\Delta Z_{nz}\Delta Z_{nz+\frac{1}{2}}} [\phi_{nz+1}^j - \phi_{nz}^j] + \frac{1}{2\Delta Z_{nz}\Delta Z_{nz-\frac{1}{2}}} [\phi_{nz}^{j+1,m} - \phi_{nz-1}^j] -$$

$$\frac{K_{nz+1}^{j+1,m} + K_{nz+1}^j - K_{nz-1}^{j+1,m} - K_{nz-1}^j}{4\Delta Z_{nz}}$$

將式(24) 代入上式得

$$\phi_{nz}^{j+1,m+1} \left[\frac{-1}{2\Delta Z_{nz}\Delta Z_{nz+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2\Delta Z_{nz}\Delta Z_{nz-\frac{1}{2}}} - \frac{C_{nz}^{j+1,m}}{\Delta t} \right] +$$

$$\phi_{nz-1}^{j+1,m+1} \left[\frac{1}{2\Delta Z_{nz}\Delta Z_{nz-\frac{1}{2}}} \right] = \frac{(\theta_{nz}^{j+1,m} - \theta_{nz}^j) + C_{nz}^{j+1,m} \cdot (-\phi_{nz}^{j+1,m})}{\Delta t}$$

$$- \frac{1}{2\Delta Z_{nz}\Delta Z_{nz+\frac{1}{2}}} [\phi_{nz}^j] + \frac{1}{2\Delta Z_{nz}\Delta Z_{nz-\frac{1}{2}}} [\phi_{nz}^j - \phi_{nz-1}^j] +$$

$$\frac{K_{nz-1}^{j+1,m} + K_{nz-1}^j}{4\Delta Z_{nz}} + \frac{q_1}{\Delta Z_{nz}} - \left(\frac{\phi_{nz}^{j+1,m} + \phi_{nz}^j}{2\Delta Z_{nz}\Delta Z_{nz+\frac{1}{2}}} \right) + \frac{K_{nz}^{j+1,m} + K_{nz}^j}{4\Delta Z_{nz}}$$

2. 下層邊界條件 (無地下水面)

無地下水面之邊界條件為 $K_1 = K_0, \phi_1 = \phi_0$ ，並令下層邊界之空間結點 $i = 1$ ，代入式(23)得

$$\phi_2^{j+1,m+1} \left[\frac{1}{2\Delta Z_1\Delta Z_{1+\frac{1}{2}}} \right] + \phi_1^{j+1,m+1} \left[\frac{-1}{2\Delta Z_1\Delta Z_{1-\frac{1}{2}}} - \frac{C_1^{j+1,m}}{\Delta t} \right]$$

$$= \frac{(\theta_1^{j+1,m} - \theta_1^j) + C_1^{j+1,m} \cdot (-\phi_1^{j+1,m})}{\Delta t}$$

$$- \frac{1}{2\Delta Z_1\Delta Z_{1+\frac{1}{2}}} [\phi_2^j - \phi_1^j] - \frac{K_2^{j+1,m} + K_2^j - K_1^{j+1,m} - K_1^j}{4\Delta Z_1}$$

3. 下層邊界條件 (有地下水面)

有地下水面之邊界條件為 $\phi_0 = \frac{K_s}{\alpha}, K_0 = K_s$ ，並令下層邊界之空間結點 $i = 1$ ，代入式(23)得

$$\phi_2^{j+1,m+1} \left[\frac{1}{2\Delta Z_1\Delta Z_{1+\frac{1}{2}}} \right] +$$

$$\phi_1^{j+1,m+1} \left[\frac{-1}{2\Delta Z_1\Delta Z_{1+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2\Delta Z_1\Delta Z_{1-\frac{1}{2}}} - \frac{C_1^{j+1,m}}{\Delta t} \right]$$

$$= \frac{(\theta_1^{j+1,m} - \theta_1^j) + C_1^{j+1,m} \cdot (-\phi_1^{j+1,m})}{\Delta t} - \frac{1}{2\Delta Z_1\Delta Z_{1+\frac{1}{2}}} [\phi_2^j - \phi_1^j]$$

$$+ \frac{1}{2\Delta Z_1\Delta Z_{1-\frac{1}{2}}} [\phi_1^j] - \frac{K_2^{j+1,m} + K_2^j - K_s - K_s}{4\Delta Z_1} -$$

$$\frac{K_s}{\alpha} \left[\frac{1}{2\Delta Z_1\Delta Z_{1-\frac{1}{2}}} \right]$$

(三) 程式疊代流程

控制方程式與邊界條件之離散後，需加入疊代過程，首先以上一時段所演算之母體通量位能 ϕ^{m-1} 當成本時段疊代之初值，並求出其他相關水力特性值，將這些水力特性值代入 Thomas Algorithm 求出本時段之母體通量位能 ϕ^{m+1} ，若本時段與上一時段之差大於一容忍誤差 ϵ (10^{-5})，則以本時段之母體通量位能求出其他相關水力特性值，再代入 Thomas Algorithm 求解比較；若本時段與上一時段之差小於一容忍誤差 ϵ (10^{-5})，則以本時段之母體通量位能求出其體積含水比之分佈，詳細之流程如圖 2 所示。

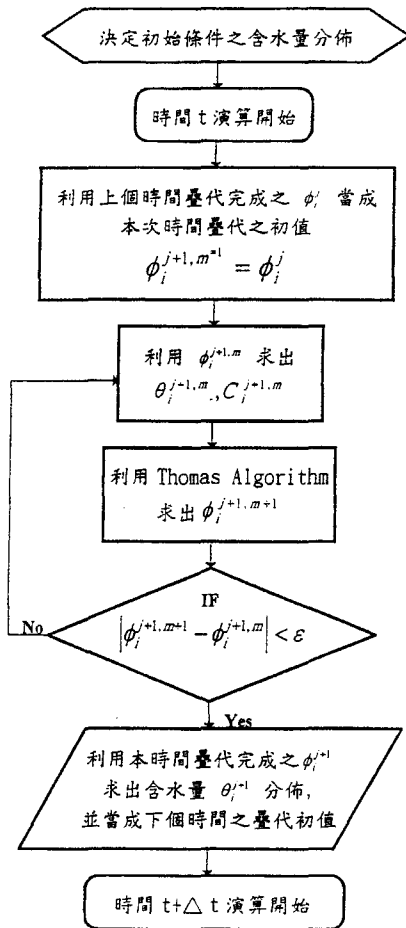


圖 2 程式流程圖

(四) 地表飽和時間與入滲率曲線

由地表通量之達西公式可知地表之最大入滲率 $q_{max} = -(\frac{\phi_s - \phi_n}{\Delta Z}) - K$ ，其中 ϕ_s 為土壤飽和時之母體通量位能， ϕ_n 為最層結點之母體通量位能。當降雨強度小於地表最大入滲率前，地表土壤尚未到達飽和狀態，該時之入滲率即為降雨強度；當降雨強度等於地表最大入滲率時，地表土壤到達飽和狀態，該時即為地表飽和時間 T_p ；當降雨強度大於地表最大入滲率後，地表土壤仍為飽和狀態，以達西公式計算其入滲率隨時間遞減之情形。即入滲率 $f = -\frac{\partial \phi}{\partial Z} - K$ ，其中前項 $\frac{\partial \phi}{\partial Z}$ 為因勢能不同而引起之水分移動，後項 K 則為因重力而導致之水分移動。

(五) 質量平衡

嚴謹之數值模式在模擬時其質量必須能平衡、穩定及收斂(Zabra,1990)。定義質量平衡

$MB(t) =$ 模擬區域中增加之質量/進入模擬區域之淨總通量

其中模擬區域中增加之質量由該時間與初始條件下之體積含水比之差造成，進入模擬區域之淨總通量由地表之入滲量與下層邊界之通量之差決定，本模式將以質量平衡之觀念探討模式之嚴謹性及收斂性。

(六) 模式驗證

陳建謀等(1998)利用式(20)線性化控制方程式，假設 $K(h) = K_s \cdot e^{\alpha h}$ 及 $\frac{\partial \theta}{\partial \phi} = \frac{\alpha}{c}$ 或

$$\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = e^{\alpha h} \text{ 導出非飽和土壤入滲時體積含水比}$$

θ 隨時間 t 及空間 Z 變化之解析解如下(詳細之推導見附錄)：

$$\theta(Z, t) = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{K_s} e^{\frac{B(Z - \frac{Bt}{2})}{2A^2}}$$

$$\left\{ \frac{-2q}{A^2} \left[\left(\frac{A^2 t}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{Z^2}{4A^2 t}} - \frac{Z}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{Z}{2A\sqrt{t}} \right) \right] + W_i \right\}$$

表 1 土壤水力參數特性表

土壤參數	飽和體積含水比	殘餘體積含水比	飽和水力傳導係數 Ks (cm/day)	土壤特性參數 α (cm ⁻¹)	土壤特性參數 β (cm ⁻¹)	土壤特性參數 n(無因次)
黏土	0.4	0.0	34.07	0.015	0.00152	1.17
壤土	0.396	0.131	4.96	0.01	0.00423	2.06

其中 $c = \frac{Ks}{\theta_s - \theta_r}$, $A^2 = \frac{c}{\alpha}$, $B = -c$, \bar{q} 與 W_i 為附錄中微分方程式 (A-8) 之邊界條件。

本文採用黏土進行模式與解析解之驗證,其土壤之水力參數特性見表 1, 假設土壤初始體積含水比分佈為定值 $\theta_r = 0$, 地表上層邊界之降雨強度如式 A-10, $\bar{q} = -A^2 \frac{\partial W}{\partial Z} \Big|_{Z=0}$, 下層邊界無地下水, 並比較在不同之空間間隔 DZ 為 1、3、5cm 及時間間隔 DT 為 1 秒, 地表飽和時間及土壤體積含水比剖面之差異。

程式驗證之結果, 在相同之時間間隔 DT =

1 秒下, 本模式與解析解在不同之空間間隔 DZ=1、3、5cm 時其時間 T=1000、2000 秒及地表飽和時間 T_p 時之土壤體積含水比剖面見圖 3。由圖 3 可知, 本模式在不同之 DZ 下, 各時段之土壤體積含水比剖面均極吻合; 在模擬初段時間 T=1000 秒時, 因地表初接受降雨之影響, 本模式在靠近地表處之土壤體積含水比與解析解比較時有些許差異, 略小於解析解之分佈, 之後於 T=2000 秒時, 兩者之差異減小; 而在地表飽和時間 T_p 時, 本模式與解析解之差異仍小, 在模擬土區之中間部分, 其土壤體積含水比略大於解析解之分佈。

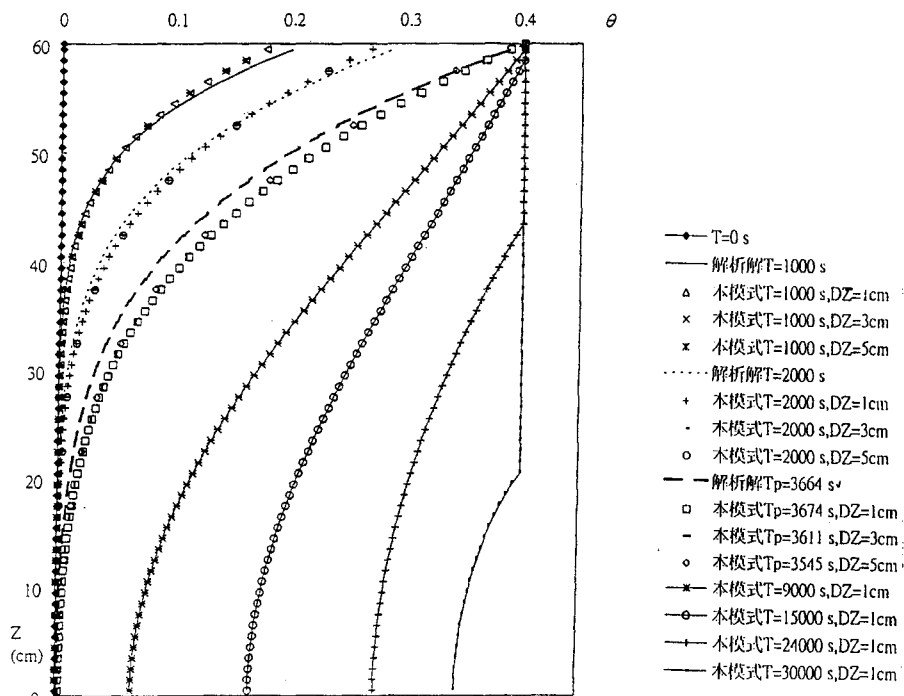


圖 3 本模式在 DT=1 秒下與解析解之比較

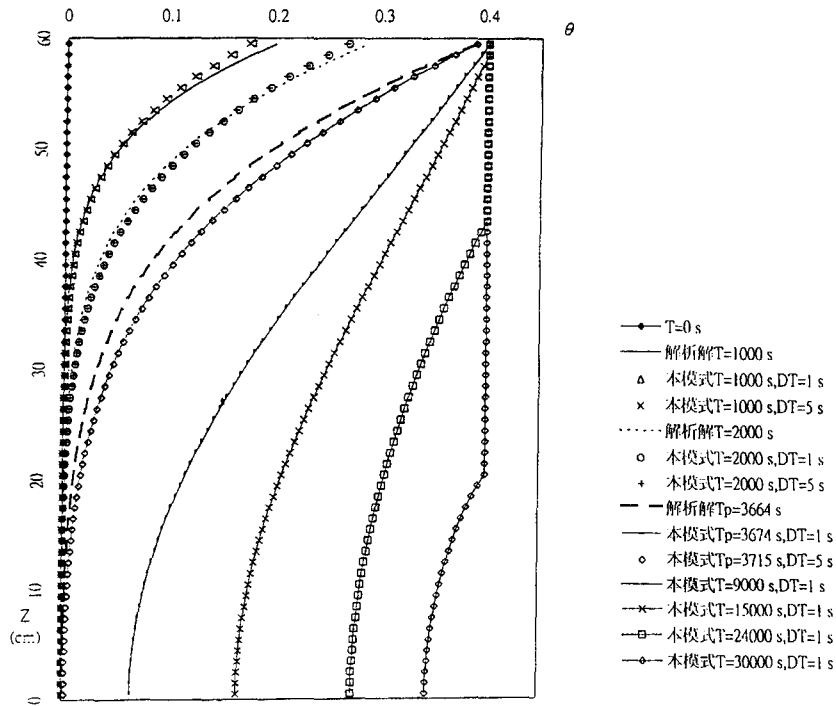


圖 4 本模式在 DT=1 秒下與解析解之比較

在地表飽和時間 T_p 之比較上，解析解之 T_p 為 3664 秒，而本模式採用之 $DZ=1、3、5\text{cm}$ 其 T_p 分別為 3674、3611、3545 秒，與解析解之差異分別為 10、53、119 秒，差異均小於 5%，以 $DZ=1\text{cm}$ 時差異最小。在相同之空間間隔 $DZ = 1\text{cm}$ 下，本模式與解析解在不同之時間間隔 $DT=1、5$ 秒時其時間 $T=1000、2000$ 秒及地表飽和時間 T_p 時之土壤體積含水比剖面見圖 4。由圖 4 可知，本模式在不同之 DT 下，各時段之土壤體積含水比剖面亦極吻合。在模擬初段時間 $T = 1000$ 秒時，本模式在靠近地表處之土壤體積含水比略小於解析解之分佈，之後於 $T=2000$ 秒時，兩者之差異減小；而在地表飽和時間 T_p 時，模擬土區之中間部分，其土壤體積含水比略大於解析解之分佈。

在地表飽和時間 T_p 之比較上，解析解之 T_p 為 3664 秒，而本模式採用之 $DT=1、5$ 秒，其 T_p 分別為 3674、3715 秒，與解析解之差異分別為

10、51 秒，差異均小於 2%，以 $DT=1\text{cm}$ 時差異較小。因此，本模式不論較大或較小之 DZ 及 DT 均可適用。

五、程式模擬

(一) 模擬狀況

經解析解驗證後，將本文應用於下述條件下之模擬，並令 $DZ=1\text{cm}$ ， $DT=1$ 秒，求出在下述不同邊界條件及初始條件下之結果。

1. 模擬土壤因初始體積含水比分佈不同對入滲所造成之影響。考慮有地下水面之穩態、線性及無地下水面之固定等三種分佈（見圖 5）。
2. 模擬土壤因地表邊界降雨型態不同對入滲所造成之影響。考慮降雨強度為常數及隨時間變化或有降雨中斷或不足之降雨型態（見圖 6）。
3. 模擬土壤因地下水面邊界不同對入滲所造成

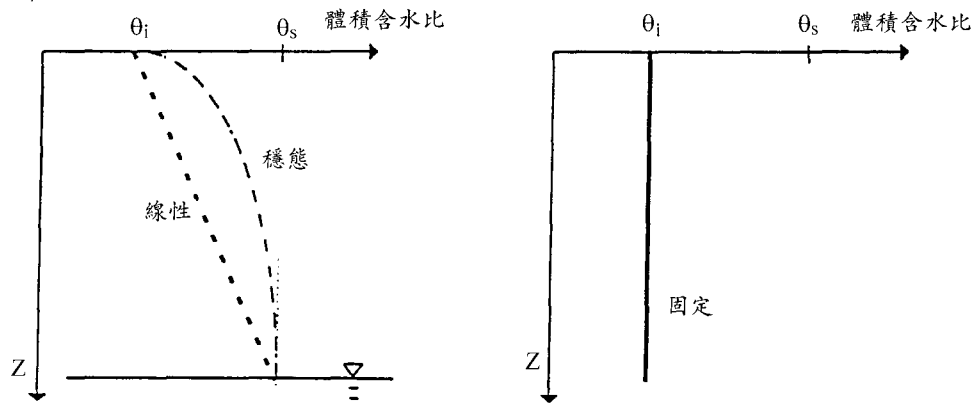


圖 5 土壤模擬初始體積含水比分佈示意圖

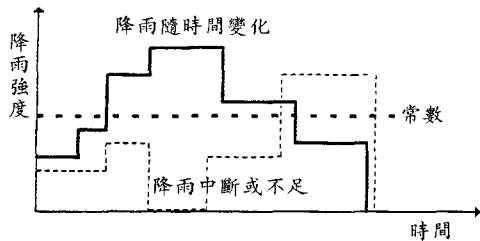


圖 6 土壤模擬降雨型態示意圖

之影響。考慮無地下水面及有地下水面 (60cm, 120cm) 等三種地下水面邊界。

對於上述三項模擬之需求, 本文設計實際模擬狀況如下:

- (1) 條件一: 考慮均勻、等向之壤土 (水力特性參數見表 1), 初始體積含水比為線性分佈, 其地表初始體積含水比為 0.2, 有地下水面 (60cm), 模擬三種降雨型態之入滲。
- (2) 條件二: 考慮均勻、等向之壤土, 初始體積含水比為穩態分佈, 其地表初始體積含水比為 0.2, 降雨強度為定值 0.0008cm/s, 模擬有地下水面 (60cm, 120cm) 之入滲。
- (3) 條件三: 考慮均勻、等向之壤土, 降雨強度為定值 0.0008cm/s, 地表初始體積含水比為 0.2, 模擬三種初始體積含水比分佈之入滲。

(二) 模擬結果討論

模擬結果中之 T_p 為地表飽和時間; T_s 為最下層之結點其飽和時間, 當其飽和時, 程式模擬完畢, 或模擬土層中之土壤體積含水比達穩定不再變化之時間。模擬之結果討論如下:

1. 考慮固定降雨強度為 0.0006 及 0.0008cm/s 之兩降雨, 其入滲曲線見圖 7。降雨強度大者, 地表土壤於 1728 秒飽和, 降雨強度小者, 地表土壤於 3019 秒飽和, 且降雨強度大者其入滲率曲線在遞減過程之初期減少較快, 但於約 10000 秒後, 兩者之入滲率相近。
2. 條件一模擬降雨強度隨時間變化及降雨強度不足之入滲曲線如圖 8 及圖 9 所示, 在 $T=1800$ 秒前降雨強度均維持在 0.0008cm/s, 故二者之地表飽和時間均為 1728 秒, 在 $T=1800$ 秒後, 降雨強度維持不變或大於地表最大入滲率時, 則於約 20000 秒時入滲率隨時間遞減至飽和水力傳導係數 K_s , 如圖 8 所示, 若降雨強度減小至地表最大入滲率之下或中斷降雨時, 如圖 9 所示, 則地表土壤回復至未飽和狀態, 待雨量重新補給水分後於 $T=4940$ 秒時地表再度飽和, 並於約 25000 秒後入滲率減至飽和水力傳導係數 K_s 。
3. 將條件二模擬兩深淺地下水面之入滲率曲線合併如圖 10, 地下水面淺者, 其地表土壤較快飽和, 其入滲率亦較快遞減至飽和水力傳導係數。

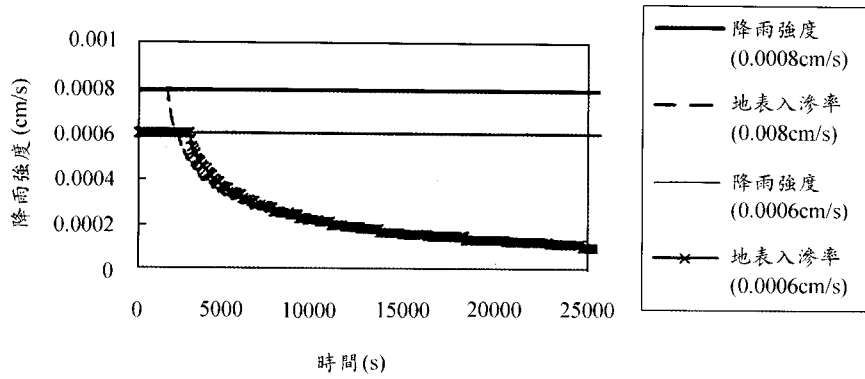


圖 7 條件一降雨強度 0.0008 及 0.0006 cmm/s 之入滲率比較圖

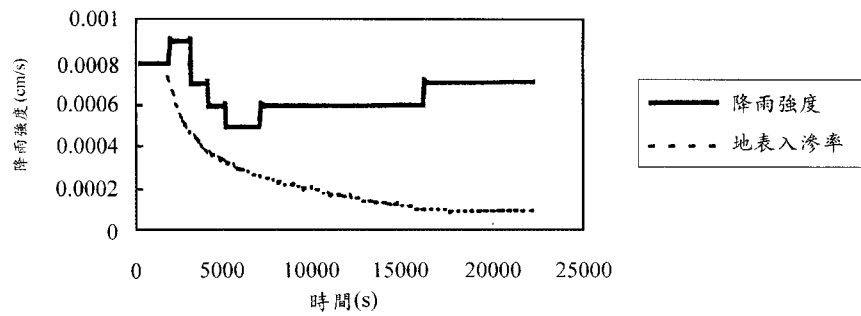


圖 8 條件一降雨強度隨時間變化之入滲率曲線

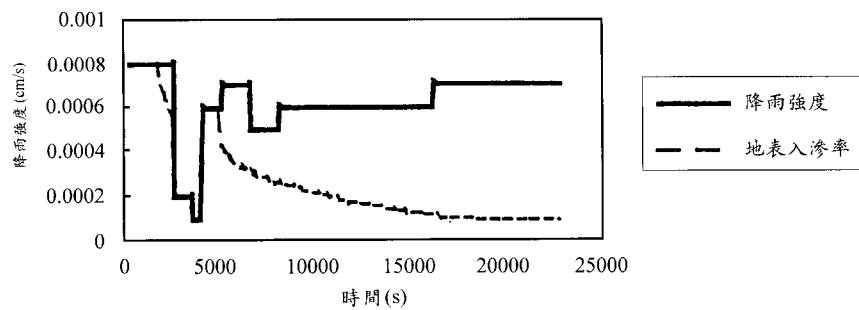


圖 9 條件一有降雨不足之入滲率曲線

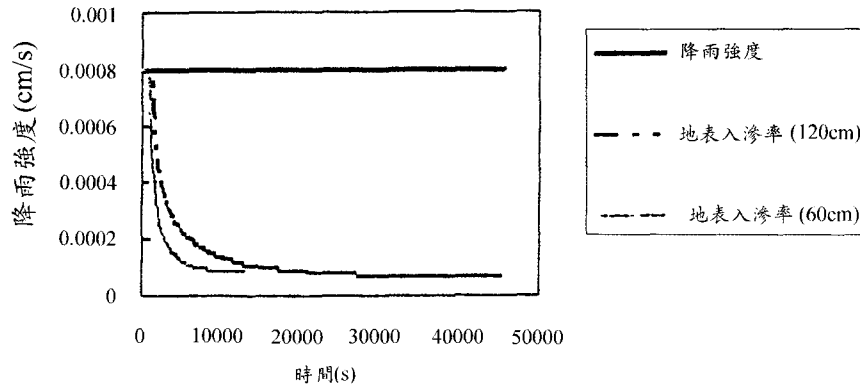


圖 10 條件二地下水面 60、120 cm 之入滲率比較圖

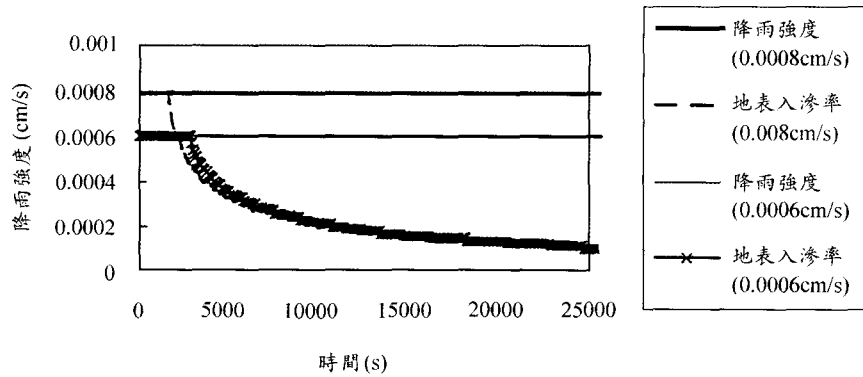


圖 11 條件三各型初始分佈之入滲率比較圖

4. 將條件三模擬穩態、線性及固定之初始體積含水比分佈，三型之入滲率曲線繪製如圖 11 所示，可知其地表飽和時間分別為 914、1728 及 1839 秒且穩態之入滲率最快遞減至飽和水力傳導係數，線性及固定分佈次之。
 5. 由條件一、二、三模式模擬之質量平衡結果均在 99~105% 之間，本模式以母體通量位能取代水力傳導係數模擬，並消除濕潤前緣處存在極大之 $\frac{\partial K}{\partial Z}$ 所產生數值模擬時之誤差，改善數值解常有之質量平衡問題。
1. 本程式以母體通量位能取代水力傳導係數模擬，並消除濕潤前緣處存在極大之 $\frac{\partial K}{\partial Z}$ 所產生數值模擬時之質量平衡問題，由各條件之質量平衡均在 99~105% 之間，已明顯改善數值解常見之質量守恒問題，模式並與解析解比較獲得驗證。
 2. 由條件一之模擬可知，入滲率曲線需視地表土壤之飽和狀態與否而做適當之判斷，當地表土壤未飽和前，入滲率即為該時之降雨強度；當地表飽和後，則應以達西公式計算其入滲率大小。此時入滲率隨時間遞減。若因降雨強度減小而使地表回復至未飽和狀態時，則應重新判斷下次地表飽和時間，而其間之入滲率均為降

六、結論與建議

(一) 結論

雨強度。

3. 由條件二之模擬可知，地下水面之深淺將會影響地表入滲之過程，地下水面淺者，其地表土壤較快達到飽和，地下水面深者，其地表土壤較慢達到飽和，且地下水面淺者其入滲率較快遞減至一定值。
4. 由條件三之模擬可知，在相同之地表初始體積含水比下，地表下之體積含水比分佈將影響地表到達飽和之時間，以穩態之分佈最快，線性及固定之分佈次之。

(二) 建議

1. 非飽和土壤之水分入滲，在濕潤前緣到達後，即成爲飽和之土壤，其控制方程式應爲 Laplace 方程式，而非原先未飽和時之理查方程式，因此可先判斷飽和之區域而修正其控制方程式。
 2. 本模式考慮均質等向之單層不可壓縮土壤，對於觀察各種狀況對入滲之影響具有簡化的效果。若應用於現地之模擬時，可視實際情形發展多層土區之模式。
 3. 在實際情況下，由於降雨強度及土壤水力特性均非定值或一函數可代表，因此，可利用統計序率之概念來描述其變異情形，以符合現實之情況。
 4. 在降雨過程中，若因降雨強度不足或停止降雨期間，地表土壤之體積含水比由飽和降至未飽和間之乾燥過程中未考慮遲滯現象，將產生些許誤差，可在往後之研究中加入考慮。
3. Broadbridge, P. and I. White , Constant Rate Rainfall Infiltration : a Versatile Nonlinear Model , Water Resource Res. , 24 , p145-154 , 1988.
 4. Brooks, R. H., and A. T. Corey, Hydraulic Properties of Porous Media, Hydrology Paper no. 3, Civil engineering Dep., Colorado State Univ., Fort Collins, Colo , 1964.
 5. Bruce, R. R., Hydraulic Conductivity Evaluation of the Soil Profile from Soil Water Retention Relations , Soil Sci. Soc. Am. Proc. , 36 , p555-561 , 1972.
 6. Celia, M. A. , L. R. Ahuja , and G. F. Pinder , Orthogonal Collocation and Alternating-Direction Procedures for Unsaturated Flow Problems , Adv. Water Resour. , 10 , p178-187 , 1987.
 7. Gardner, W. R., Some Steady-State Solution of the Unsaturated Moisture Flow Equation with Application to Evaporation from a Water Table , Soil Sci. , 85 , p228-232 , 1958.
 8. Green, R. E., and J. C. Corey, Calculation of Hydraulic Conductivity : a Further Evaluation of Some Predictive Methods , Soil Sci. Soc. Am. Proc. , 35 , p3-8 , 1971.
 9. Giesel, W., M. Renger, and O. Strebel, Numerical Treatment of the Unsaturated Water Flow Equation - Comparison of the Experimental and Computed Results , Water Resource Res. , 9 , p174-177 , 1972.
 10. Hanks, R., and S. A. Bowers, Numerical Solution of the Moisture Flow Equation into Layered Soils , Soil Sci. Soc. Am. Proc. , 26 , p530-534 , 1962.
 11. Haverkamp, R., M. Vauclin, J. Touma, P. J. Wierenga, and G. Vachaud, A Comparison of Numerical Simulation Models for One-Dimensional Infiltration , Soil Sci. Soc. Am. J. , 41 , p285-293 , 1977.
 12. Hillel, D., Fundamentals of Soil Physics ,

七、參考文獻

1. Allen , M. B. , and C. L. Murphy , A Finite Element Collocation Method for Variably Saturated Flows in Porous Media , Numer. Methods Partial Differential Equations , I(3) , p229-239 , 1985 .
2. Allen , M. B. , and C. L. Murphy , A Finite Element Collocation Method for Variably Saturated Flows in Two Space Dimensions, Water Resource Res. , 22 , p1537-1542 , 1986.

- Academic , San Diego , Calif. , 1980.
13. Huyakorn, P. S., S. D. Thomas, and B. M. Thompson , Techniques for Making Finite Elements Competitive in modeling Flow in Variably Saturated Media , Water Resource Res., 20 , p1099-1115 , 1984.
 14. Huyakorn, P. S., E. P. Springer , V. Guvanasen , and T. D. Wadsworth , A Three-Dimensional Finite-Element Model for Simulating Water Flow in Variably Saturated Porous Media , Water Resource Res., 22 , p1790-1808 , 1986.
 15. Jackson, R. D., On the Calculation of Hydraulic Conductivity , Soil Sci. Soc. Am. Proc. , 36 , p380-382 , 1972.
 16. Jeppson,R. W. , Axisymmetric Infiltration in Soils . I. Numerical Techniques for Solution . J. Hydroa. , 23 , p111-130 , 1974.
 17. Millington, R. J., and J. P. Quirk, Permeability of Porous Solids , Trans. Faraday Soc. , 57 , p1200-1206 , 1961.
 18. Mualem, Y., A New Model for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Porous Media , Water Resource Res. , 12 , p513-522 , 1976.
 19. Parlange, J. -Y., Theory of Water-movement in Soils:2. One-dimensional Infiltration ,Soil Sci. , 111 , p170-174 , 1971.
 20. Parlange, J. -Y., Theory of Water-movement in Soils:8. One-dimensional Infiltration with Constant Flux at the Surface , Soil Sci. , 114 , p1-4 , 1972.
 21. Philip, J. R. , The Theory of Infiltration 1. , Soil Sci. , 83 , p345-357 , 1957.
 22. Philip, J. R. , The Theory of Infiltration 6. , Soil Sci. , 85 , p278-286 , 1958.
 23. Rajesh, S. , and T.-C. Jim Yeh , Analytical Solutions for One-Dimensional , Transient Infiltration toward the Water Table in Homogeneous and Layered Soils , Water Resource Res., 27 , p753-762 , 1991.
 24. Raats, P. A. C. , and W. R. Gardner , Movement of Water in the Unsaturated Zone near a Watertable , In Jan Van Schilfgaarde (ed.) Drainage for Agriculture : Agronomy 17 , p311-405 , 1974.
 25. Ross, P. J., Efficient Numerical Methods for Infiltration Using Richards' Equation , Water Resource Res. , 26 , p279-290 , 1990.
 26. van Genuchten, M. Th., A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils , Soil Sci. Soc. Am. J. , 44 , p892-898 , 1980.
 27. Warrick, A. W. , An Analytical Solution to Richards' Equation for Time-Varying Infiltration , Water Resource Res. , 27 , p763-766 , 1991 .
 28. Zabra, R. L., A General Mass-conservation Numerical Solution for the Unsaturated Flow Equation , Water Resource Res. , 26 , p1483-1496 , 1990.
 29. 陳建謀，陳主惠，譚義績，劉振宇，1998，入滲問題於一維半無窮區間之解析解（尚未發表）。

附錄

由本文式(20)

$$\frac{\partial}{\partial Z} \left(K \frac{\partial h}{\partial Z} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} \dots\dots\dots(A-1)$$

因 θ 與 h 及 ϕ 間之關係可利用連鎖律(chain rule) 改寫如下：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} \dots\dots\dots(A-2)$$

假設

$$\frac{\partial \theta}{\partial \phi} = \frac{\alpha}{c} \dots\dots\dots(A-3)$$

將式(A-3)代入式(A-2)得

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\alpha}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

將式(A-2)代入式(A-1)得

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{c}{\alpha} \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} + c \frac{\partial \phi}{\partial Z} \dots\dots\dots (A-4)$$

令 $A^2 = \frac{c}{\alpha}, B = -c$ 則(A-4)可表為

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = A^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} - B \frac{\partial \phi}{\partial Z} \dots\dots\dots (A-5)$$

令

$$\phi(Z,t) = e^{B(Z-\frac{Bt}{2})/2A^2} W(Z,t) \dots\dots\dots (A-6)$$

將式(A-6)代入式(A-5)得

$$\frac{\partial W}{\partial t} = A^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \dots\dots\dots (A-7)$$

式(A-7)為一較易求解之控制方程式，可先求解 $W(Z,t)$ 再轉換成 ϕ 或 θ ，並配合其邊界條件之轉換，即可求出其解析解。

1. 地表到達飽和前($t < T_p$)之解及 T_p 之解

(1)求解方式採逆推之求解方式，先考慮 $W(Z,t)$ 之微分方程組，利用 $W(Z,t)$ 之解及 $W(Z,t)$ 與 $\theta(Z,t)$ 之關係式，將 $W(Z,t)$ 之解轉換為 $\theta(Z,t)$ 之解。若考慮 $W(Z,t)$ 之微分方程組如下：

控制方程式： $\frac{\partial W}{\partial t} = A^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2}, 0 \leq Z \leq \infty \dots\dots\dots (A-8)$

初始條件： $W(Z,0) = W_i \dots\dots\dots (A-9)$

邊界條件： $\bar{q} = -A^2 \frac{\partial W}{\partial Z} \Big|_{Z=0} \dots\dots\dots (A-10)$

上列微分方程組可求得其解如下式所示：

$$W(Z,t) = \frac{2\bar{q}}{A^2} \left[\left(\frac{A^2 t}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{Z^2}{4A^2 t}} - \frac{Z}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{Z}{2A\sqrt{t}} \right) \right] + W_i \dots\dots\dots (A-11)$$

上列式(A-8)~(A-10)之微分方程組可轉換成 $\theta(Z,t)$ 之微分方程組如下：

控制方程式： $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(K \frac{\partial h}{\partial Z} \right) + \frac{\partial K}{\partial Z}, 0 \leq Z \leq \infty$

初始條件： $\theta(Z,0) = \theta_r + \frac{\alpha}{c} e^{\frac{B^2 Z}{4A^2}} W_i$

邊界條件： $q(t) = -\alpha e^{\frac{B^2 t}{4A^2}} \left[\left(\frac{B}{2\alpha A^2} - 1 \right) W(0,t) - \frac{\bar{q}}{\alpha A^2} \right]$

其中 $\theta(h) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) e^{\alpha h}$

$$c = \frac{Ks}{\theta_s - \theta_r}$$

由 $K(h) = \alpha \phi(h)$ 之關係及式(A-6)得

$$\begin{aligned} \phi(Z,t) &= e^{B\left(Z-\frac{Bt}{2}\right)/2A^2} W(Z,t) = \frac{Ks}{\alpha} e^{\alpha h} \\ &= \frac{Ks}{\alpha(\theta_s - \theta_r)} [\theta(Z,t) - \theta_r] \dots\dots\dots (A-12) \end{aligned}$$

由式(A-11)代入式(A-12)得 $t < T_p$ 下之 $\theta(Z,t)$ 解為：

$$\begin{aligned} \theta(Z,t) &= \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{Ks} e^{B\left(Z-\frac{Bt}{2}\right)/2A^2} \\ &\left\{ \frac{2\bar{q}}{A^2} \left[\left(\frac{A^2 t}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{Z^2}{4A^2 t}} - \frac{Z}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{Z}{2A\sqrt{t}} \right) \right] + W_i \right\} \end{aligned}$$

(2)當 $t = T_p, Z = 0, \theta(0, T_p) = \theta_s$ 代入式(A-12)得

$$\theta_s = \theta_r + \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{Ks} e^{-\frac{B^2 T_p}{4A^2}} \cdot W(0, T_p)$$

$$\alpha e^{\frac{B^2 T_p}{4A^2}} W(0, T_p) = Ks$$

上式利用試誤法即可求得 T_p

收稿日期：民國 87 年 10 月 8 日

修正日期：民國 87 年 11 月 17 日

接受日期：民國 87 年 11 月 19 日