

# 地下水位灰色模式誤差分析

## Error Analysis of Groundwater Level Grey Model

國立屏東科技大學土木工程系講師

葉一隆  
Yi-Lung Yeh

### 摘 要

地下水流系統受許多無法完全控制之因素所影響，諸如含水層特性，抽水位置，抽水時段，補注位置等。因此，地下水流系統可視為一灰色系統。本文主要在應用灰色理論來建立地下水位觀測井所得之地下水位之灰色模式，並探討灰色模式中生成係數對灰色模式精度之影響，而且以灰關聯度來分析最佳之生成係數值。並依前述所建立之灰色模式來分析屏東平原中林園站、昭明站及大潭站之地下水位變化。

由分析結果得知均值生成係數所建立之灰色模式並非最佳之預測模式，而以動態之生成係數( $\alpha(t)$ )，並配合灰關聯分析，可得最佳之灰色預測模式。此外，建模所用之點數並非愈多愈好，完全依數列累加生成後滿足指數律函數之點數來決定，否則將降低模式之精度。

**關鍵詞：**灰色模式，地下水位，灰關聯分析。

### ABSTRACT

The groundwater flow system is affected by many factors, such as aquifer properties, pumping position, pumping period, recharge site, etc., which are hardly to control up to now. Hence, the groundwater flow system might treat as a grey system for analyzing. In this paper, the grey model was built to forecast groundwater level. In addition, the effects of generating coefficients on model accuracy were also discussed by grey correlation method. According to the procedure provided by the grey model, the data from Linyuan station, Jauming station and Tatan station in Pingtung plan will be applied to generate the annual change of groundwater level.

According to the results, the grey model built through generating coefficients is not the optimal one. For modification, the dynamic generating coefficients ( $\alpha(t)$ ) and grey

correlation method were used to build an optimal grey model for groundwater level prediction. Besides, the accuracy of grey model is not necessary improved from increasing the size of data set and is dependent on how the accumulated generating data approach to exponential function.

**Keywords:** Grey model, Groundwater level, Grey correlation analysis.

## 一、前言

在自然界中，有許多系統之機制、邊界條件及狀態等無法完全精確描述，以致無法完全以定量來判斷，而只能以邏輯推理或運用某些意識或某些判斷準則，來對系統之特性進行瞭解，此種系統稱為本徵性灰色系統。灰色系統理論係假設系統之隨機性與模糊性是具有灰色性之兩個不同方面之不確定性，亦即，系統灰色性不但包含了隨機性與模糊性，而且還包含了這兩個不確定外之諸多特性。

地下水流系統為一複雜之系統，很多特性無法完全精確掌握，例如：含水層之水力傳導係數(Hydraulic conductivity)往往因地質變化及流體特性而異，抽水井位置無法全部掌控，抽水之時程隨機發生，地下水之補注亦隨人為與水文條件變化而具隨機性，故地下水系統可視為一本徵性灰色系統，因此可利用灰色系統預測理論來預測地下水位之變化。

灰色理論乃 Deng(1982)所提出，該理論已廣泛用於交通管理、自動控制、農業、土木工程、學生成績評估等各領域。應用灰色系統來預測地下水位之研究有梁俊勛(1992)利用灰色系統預測理論建立預測模式，並舉一地區之年平均地下水位來說明模式之應用，但本文對模式修正點之取決並未詳細說明。曹丁濤(1992)提出灰色預測在地下水動態預報中值得注意的幾個問題。鄭永勝(1992)闡述灰色預測的幾個觀點：(1)灰色建模的數據序列不一定越長越好，(2)灰色 GM(1,1)導數還原預測模型的精度低於累加生成預測模型之精度，(3)累減還原預測模型是灰色 GM(1,1)預測模型之最終預測模型。張永波等人(1993)以甘肅

省民勤盆地為例，根據灰色預測理論推導出地下水礦化度與開採量間的線性關係，並將其直接藉合於地下水管理模型中，並對該區地下水開採量進行優化分析。但曹丁濤(1992)認為導數還原預測之精度與累減還原預測之精度不相上下，而鄭永勝(1992)則認為導數還原模式之精度較低。葉一隆等人(1995)利用灰色理論來建立模式，並利用此模式預測屏東平原高樹站與水底寮站之地下水位變化。黃永發等人(1997)利用灰色模式來進行地下水位之內差並將結果與克利金法(Kriging method)比較，結果顯示灰色模式之預測誤差較小。

本文主要探討利用灰色模式分析地下水位時，灰色模式中生成係數( $\alpha$ 值)對模式精度之影響，並以灰關聯找出關聯度最高之生成係數值，並分析在灰關聯中，不同辨識係數( $\zeta$ 值)對灰關聯分析之影響。

## 二、灰色模式

地下水位之變化為一灰色系統，以灰色理論來建立地下水位灰色模式，進行之步驟包括：

### (一) 資料處理

地下水位有正值亦有負值，在進行灰色模式建立前，需將負值之數據進行平移，並且為將地下水位之隨機性隱藏，對資料以累加生成(Accumulated Generating Operation, AGO)處理。即

令觀測之原始地下水位  $\{\tilde{x}^{(0)}(t)\}$  為

$$\{\tilde{x}^{(0)}(t)\} = \{\tilde{x}^{(0)}_{(1)}, \tilde{x}^{(0)}_{(2)}, \tilde{x}^{(0)}_{(3)}, \dots, \tilde{x}^{(0)}_{(n)}\} \dots \dots (1)$$

若數列中有負值，則需對數列進行平移，平移量之決定方式為：

$$\text{令 } x^* = \text{Minimum } \tilde{x}^{(0)}(k), k=1,2,3,\dots,n$$

若  $x^* \geq 0$ ，則平移量  $\underline{x} = 0$

若  $x^* < 0$ ，則平移量  $\underline{x} = |x^*|$  ..... (2)

因此，經平移後之新數列  $\{x^{(0)}(t)\}$  為

$$\{x^{(0)}(t)\} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(n)\}$$

$$\text{其中 } x^{(0)}(k) = \tilde{x}^{(0)}(k) + \underline{x}, k=1,2,3,\dots,n \text{ ..... (3)}$$

利用新數列來建立累加生成數列  $\{x^{(1)}(t)\}$  為

$$\{x^{(1)}(t)\} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), x^{(1)}(3), \dots, x^{(1)}(n)\} \text{ ..... (4)}$$

其中

$$x^{(1)}(k) = x^{(1)}(k-1) + x^{(0)}(k), k=2,3,4,\dots,n \text{ ..... (5)}$$

而且

$$x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1) \text{ ..... (6)}$$

## (二) 微分方程式

地下水水位之數列累加生成後，能使數列轉化為遞增之數列，而使數列之隨機性減弱，規律性增加，並且具近似之指數律。因此，可採用指數型式之微分方程式來套配，微分方程式為

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b \text{ ..... (7)}$$

其中  $t$  為時間， $a, b$  為待定參數。求解式(7)可得通解為

$$x^{(1)}(t) = ce^{-at} + \frac{b}{a} \text{ ..... (8)}$$

其中  $c$  為積分常數。將式(6)代入式(8)得積分常數為

$$c = e^a [x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}] \text{ ..... (9)}$$

將式(9)代入式(8)得特解為

$$x^{(1)}(t) = e^{-a(t-1)} [x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}] + \frac{b}{a} \text{ ..... (10)}$$

式(10)即為一次累加生成之灰色模式 GM(1,1)。

## (三) 灰差分方程式

為求解式(10)中之  $a, b$  兩參數值，將式(7)表示為灰差分方程式型態，即

$$x^{(0)}(t) + az^{(1)}(t) = b, t=2,3,4,\dots,n \text{ ..... (11)}$$

其中

$$z^{(1)}(t) = \alpha(t)x^{(1)}(t) + (1-\alpha(t))x^{(1)}(t-1) \text{ ..... (12)}$$

$\alpha(t)$  稱為生成係數，當  $\alpha(t)$  為 0.5 時， $z^{(1)}(t)$  稱為均值生成。

假設  $\alpha(t)$  值，並將式(11)改寫為

$$-az^{(1)}(t) + b = x^{(0)}(t), t=2,3,4,\dots,n \text{ ..... (13)}$$

對所有  $t=2,3,4,\dots,n$  而言，代入式(13)可得

$$BA = Y_N \text{ ..... (14)}$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} -Z^{(1)}(2) & 1 \\ -Z^{(1)}(3) & 1 \\ -Z^{(1)}(4) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -Z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix} \text{ ..... (15a)}$$

$$A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ ..... (15b)}$$

$$Y_N = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ x^{(0)}(4) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(15c)$$

解式(14)得 A 矩陣為

$$A = (B^T B)^{-1} B^T Y_N \dots\dots\dots(16)$$

利用式(16)求得之 a、b 值，代回式(10)，即可建立地下水位變化之灰色模式。將 t 值代入式(10)，可計算得各 t 值之地下水位預測值，表示為  $\hat{x}^{(1)}(t)$ ，需經累減生成(Inverse accumulated generating operation, IAGO)還原，即

$$\hat{x}^{*(0)}(t) = \hat{x}^{(1)}(t) - \hat{x}^{(1)}(t-1), \quad t = 2, 3, 4, \dots, n \quad (17)$$

再將還原之數列進行逆平移，即可得實際地下水位預測值，即

$$\hat{x}^{(0)}(t) = \hat{x}^{*(0)}(t) - x \quad t = 1, 2, 3, 4, \dots, n \quad (18)$$

### 三、誤差分析

利用式(10)之灰色模式來計算地下水位時，式(12)中之  $\alpha(t)$  值假設不同時，由式(16)所得到之 a、b 值亦不相同。因此， $\alpha(t)$  值之決定將影響模式之正確性。

本文利用計算機快速計算之性特，將  $\alpha(t)$  於 [0,1] 區間指定不同數值，代入式(12)中求得 a、b 值，以建立式(10)之灰色模式後，利用該模式預測各時段之地下水位值，並計算各時段之地下水位之誤差值，再以灰關聯求得地下水位誤差值最小之最佳  $\alpha(t)$  值。

利用灰關聯來決定最佳  $\alpha(t)$  值之步驟為：

(1)將數據初值化，即

$$\Delta x_i(t) = \left| \hat{x}_i^{(0)}(t) - x^{(0)}(t) \right|, \quad t = 2, 3, \dots, n \quad (19)$$

其中 i 為不同之  $\alpha(t)$  值，即為比較序列。

(2)決定標準數列  $x_0(t)$ ，在此，最佳之  $\alpha(t)$  值應使  $\Delta x_i(t) = 0$ ，故標準數列定為  $\Delta x_0(t) = 0$ 。

(3)求差數列，即

$$\Delta_{0i}(t) = \left\| \Delta x_i(t) - \Delta x_0(t) \right\| \dots\dots\dots(20)$$

$$= \left\| \Delta x_i(t) \right\|$$

(4)求差數列中之最大值與最小值，即

$$\Delta_{\max} = \text{Maximum } \Delta_{0i}(t)$$

與  $t = 2, 3, 4, \dots, n$

$$\Delta_{\min} = \text{Minimum } \Delta_{0i}(t)$$

(5)計算各序列之灰聯係數，即

$$\gamma_{0i}(t) = \frac{\Delta_{\min} + \zeta \Delta_{\max}}{\Delta_{0i}(t) + \zeta \Delta_{\max}} \quad t = 2, 3, 4, \dots, n \quad (21)$$

其中  $\zeta$  為辨識係數， $\zeta \in [0,1]$ 。一般取  $\zeta = 0.5$ ，本文則取不同  $\zeta$  值，以分析其差異。

(6)計算灰關聯度，即

$$\Gamma_{oi}(t) = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n \gamma_{oi}(t) \quad \dots\dots\dots(22)$$

(7)排出灰關聯序，並決定最佳之  $\alpha(t)$  值，利用此值所求得之 a、b 值代入式(10)中，即可得最佳之灰色模式。

### 四、灰色模式之應用與分析

屏東平原為一地下水質源豐富之地區，近年來因不當之開發利用，致使平原內發生海水入侵，地層下陷，土壤鹽化等問題，而依據台灣省水利處之調查，林邊地區之累積下陷量至 1998 年已達 3.06m。因此，對地下水位變化之預測相當重要，可提供地下水開發量之參考。

本文利用屏東平原之地下水位觀測站所量得之水位記錄中，經累加生成後，取出其中三口具不同特性之水位來分析，此三口觀測井分別為林園站、昭明站與大潭站，取用時間自 1983 年至 1995 年，共計 13 年之資料，各觀測站之原始地下水位如表 1 所示。由表一可知 大潭站已有海水入侵之現象，因此，此站需進行平移，平移

量依式(2)決定為 1.3m，並將一次累加生成之結果示於圖 1，由此圖可知林園站於 1987 年為一轉折點，昭明站較符合指數律函數曲線，而大潭站在 1986 年為一轉折點。將每一測站之水位資料分成 1983~1988 及 1989~1994 兩個區段來建立灰色模式，並利用所建立之模式來預測 1989 及 1995 年之地下水位值。

灰色模式之建立分別以四點、五點及六點來建立，而且於各模式中分別利用不同之生成係數來求灰色模式中之 a、b 值，建立灰色模式後，計算各觀測井之水位預測值，再與實測值比較而求得差值，以不同辨識係數值求得各組生成係數相對之灰關聯係數，並利用灰關聯度求得最佳之生成係數組。

利用林園站 1983~1988 年之地下水位資料，分別以四點、五點及六點建立灰色模式。依不同之辨識係數值所求得之最佳生成係數與相對之 a、b 值列於表 2，而不同之辨識係數值所對應之最佳生成係數之灰關聯係數值列於表 3。利用表 2 所列之 a、b 值來建立模式預測 1989 年之地下水位值列於表 4。而以 1989~1994 年之資料，利用四點、五點及六點建立之灰色模式，依不同之辨識係數值所求得之最佳生成係數與相對之 a、b 值列於表 5，而不同之辨識係數值所對應之最佳生成係數之灰關聯係數值列於表 6。利用表 5 所列之 a、b 值來建立模式預測 1995 年之地下水位值列於表 7。

利用昭明站 1983~1988 年之地下水位資料，分別以四點、五點及六點建立灰色模式。依不同之辨識係數值所求得之最佳生成係數與相對之 a、b 值列於表 8，而不同之辨識係數值所對應之最佳生成係數之灰關聯係數值列於表 9。利用表 8 所列之 a、b 值來建立模式預測 1989 年之地下水位值列於表 10。而以 1989~1994 年之資料，利用四點、五點及六點建立之灰色模式，依不同之辨識係數值所求得之最佳生成係數與相對之 a、b 值列於表 11，而不同之辨識係數值所對應之最佳生成係數之灰關聯係數值列於表 12。利用表 11 所列之 a、b 值來建立模式預測 1995 年之地下水位值列於表 13。

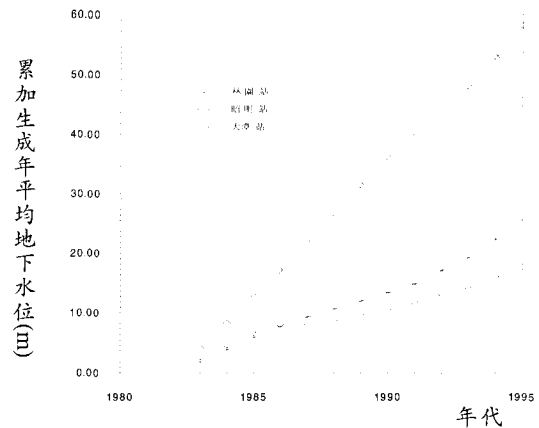


圖 1 一次累加生成地下水位值

利用大潭站 1983~1988 年之地下水位資料，分別以四點、五點及六點建立灰色模式。依不同之辨識係數值所求得之最佳生成係數與相對之 a、b 值列於表 14，而不同之辨識係數值所對應之最佳生成係數之灰關聯係數值列於表 15。利用表 14 所列之 a、b 值來建立模式預測 1989 年之地下水位值列於表 16。而以 1989~1994 年之資料，利用四點、五點及六點建立之灰色模式，依不同之辨識係數值所求得之最佳生成係數與相對之 a、b 值列於表 17，而不同之辨識係數值所對應之最佳生成係數之灰關聯係數值列於表 18。利用表 17 所列之 a、b 值來建立模式預測 1995 年之地下水位值列於表 19。

由表 3、表 6、表 9、表 12、表 15 及表 18 可知，對同一時段，同一建模點數，在同一最佳生成係數組時，灰關聯係數隨辨識係數增加而增加；但同一建模點數，灰關聯係數之平均值則隨辨識係數增加而增加。由表 2、表 5、表 8、表 11、表 14 及表 17 可知，無論辨識係數之值為何，均值生成係數所建立之模式所得之預測值與實測值之差無法達最小，而且隨資料型態之差異，同一建模點數之最佳生成係數隨辨識係數而有不同之組合，如新園站之資料，由圖 1 可得 1987 年為一轉折點，因此，在 1983~1988 年之最佳生成係數，由表 2 可得在各建模點數各有兩組存在，但在 1989~1994 年因曲線較符合指數律函數，由表 5 可得只有一組最佳生成係數存在；昭明站與大潭站亦有相同之趨勢。

表 1 原始年平均地下水位值

水位(m) 年代 測站	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
林園站	1.82	2.04	2.02	1.75	1.62	1.45	1.29	1.43	1.39	2.36	2.11	3.09	3.23
昭明站	4.16	4.12	4.52	4.12	4.89	4.84	4.71	4.70	4.06	4.26	3.54	4.99	5.33
大潭站	1.34	0.60	0.76	0.11	-1.30	-0.66	-0.40	-0.43	-0.12	0.31	-0.32	0.42	0.47

表 2 林園站 1983~1988 年之最佳生成係數值

建模點數	辨識係數	1984	1985	1986	1987	1988	a 值	b 值
四點	0.1~0.2			0.4	0.7	0.4	.087	2.003
	0.3~0.9			0.5	0.8	0.2	.095	2.039
	均值生成			0.5	0.5	0.5	.093	2.028
五點	0.1		0.6	0.2	0.8	0.4	.103	2.295
	0.2~0.9		0.8	0.3	0.1	0.8	.105	2.309
	均值生成		0.5	0.5	0.5	0.5	.109	2.328
六點	0.1~0.6	0.7	0.6	0.3	0.8	0.1	.094	2.398
	0.7~0.9	0.8	0.5	0.2	0.9	0.1	.094	2.397
	均值生成	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	.088	2.354

表 3 林園站 1983~1988 年最佳生成係數之灰關聯係數值

建模點數	辨識係數	1984	1985	1986	1987	1988	平均值
四點	0.1			.92529	.45360	.94718	.77536
	0.2			.96117	.62392	.97285	.85264
	0.3			.79879	.88721	.98744	.89115
	0.4			.84108	.91295	.99055	.91486
	0.5			.86868	.92912	.99243	.93007
	0.6			.88811	.94022	.99368	.94067
	0.7			.90254	.94832	.99458	.94848
	0.8			.91367	.95448	.99525	.95447
	0.9			.92251	.95933	.99578	.95921
五點	0.1		.38564	.99031	.80102	.98675	.79093
	0.2		.60098	.85372	.99543	.98577	.85897
	0.3		.69317	.89748	.99695	.99047	.89452
	0.4		.75076	.92108	.99771	.99283	.91560
	0.5		.79015	.93585	.99817	.99426	.92961
	0.6		.81878	.94597	.99847	.99521	.93961
	0.7		.84054	.95333	.99869	.99589	.94711
	0.8		.85764	.95892	.99885	.99640	.95295
	0.9		.87142	.96332	.99898	.99680	.95763
六點	0.1	.22824	.98890	.71189	.77083	.97054	.73408
	0.2	.37165	.99442	.83170	.87058	.98505	.81068
	0.3	.47011	.99627	.88113	.90983	.98998	.84947
	0.4	.54190	.99720	.90812	.93081	.99247	.87410
	0.5	.59656	.99776	.92512	.94387	.99397	.89146
	0.6	.63956	.99813	.93681	.95279	.99497	.90445
	0.7	.67604	.99258	.95103	.95423	.99927	.91463
	0.8	.70457	.99350	.95689	.95972	.99936	.92281
	0.9	.72848	.99422	.96150	.96403	.99943	.92953

表 4 林園站 1989 年之預測結果

建模點數	辨識係數	預測值(m)	實測值(m)	實測值與預測值之差(m)	誤差百分比
四點	0.1~0.2	1.187	1.29	0.103	7.98%
	0.3~0.9	1.168		0.122	9.46%
	均值生成	1.169		0.121	9.38%
五點	0.1	1.075		0.215	16.67%
	0.2~0.9	1.068		0.222	17.21%
	均值生成	1.047		0.243	18.84%
六點	0.1~0.6	1.076		0.214	16.59%
	0.7~0.9	1.075		0.215	16.67%
	均值生成	1.098		0.192	14.88%

表 5 林園站 1989~1994 年之最佳生成係數值

建模點數	辨識係數	1990	1991	1992	1993	1994	a 值	b 值
四點	0.1~0.9			0.7	0.2	0.4	-.211	1.513
	均值生成			0.5	0.5	0.5	-.157	1.746
五點	0.1~0.9		0.3	0.8	0.7	0.1	-.240	.991
	均值生成		0.5	0.5	0.5	0.5	-.216	1.094
六點	0.1~0.9	0.6	0.1	0.9	0.5	0.1	-.224	.837
	均值生成	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	-.200	.942

表 6 林園站 1989~1994 年最佳生成係數之灰關聯係數值

建模點數	辨識係數	1990	1991	1992	1993	1994	平均值
四點	0.1			.15169	.70955	.94991	.60372
	0.2			.26336	.83006	.97430	.68924
	0.3			.34905	.87990	.98272	.73722
	0.4			.41689	.90713	.98698	.77033
	0.5			.47192	.92430	.98956	.79526
	0.6			.51746	.93611	.99128	.81495
	0.7			.55576	.94473	.99252	.83100
	0.8			.58844	.95130	.99345	.84440
五點	0.1		.51635	.27462	.95774	.97434	.68076
	0.2		.68100	.43086	.97841	.98700	.76932
	0.3		.76202	.53172	.98550	.99130	.81763
	0.4		.81022	.60222	.98909	.99346	.84874
	0.5		.84218	.65426	.99125	.99476	.87061
	0.6		.86493	.69427	.99270	.99563	.88688
	0.7		.88195	.72597	.99373	.99625	.89948
	0.8		.89516	.75172	.99451	.99672	.90953
六點	0.1	.45395	.86988	.27743	.98320	.99669	.71623
	0.2	.62444	.93041	.43435	.99153	.99834	.79581
	0.3	.71379	.95251	.53528	.99434	.99889	.83896
	0.4	.76880	.96395	.60564	.99575	.99917	.86666
	0.5	.80608	.97095	.65750	.99659	.99934	.88609
	0.6	.83300	.97568	.69730	.99716	.99945	.90052
	0.7	.85336	.97908	.72882	.99756	.99953	.91167
	0.8	.86929	.98164	.75439	.99787	.99958	.92056
0.9	.88210	.98365	.77556	.99810	.99963	.92781	

表 7 林園站 1995 年之預測結果

建模點數	辨識係數	預測值(m)	實測值(m)	實測值與預測值之差(m)	誤差百分比
四點	0.1~0.9	4.413	3.23	-1.183	-36.63%
	均值生成	3.997		-0.767	-23.75%
五點	0.1~0.9	5.032		-1.802	-55.78%
	均值生成	4.776		-1.546	-47.86%
六點	0.1~0.9	5.145		-1.915	-59.29%
	均值生成	4.814		-1.584	-49.04%

表 8 昭明站 1983~1988 年之最佳生成係數值

建模點數	辨識係數	1984	1985	1986	1987	1988	a 值	b 值
四點	0.1~0.9			0.7	0.1	0.8	-.047	4.081
	均值生成			0.5	0.5	0.5	-.076	3.769
五點	0.1~0.9		0.3	0.6	0.7	0.4	-.035	4.130
	均值生成		0.5	0.5	0.5	0.5	-.038	4.092
六點	0.1~0.2	0.6	0.1	0.5	0.8	0.5	-.037	3.937
	0.3~0.9	0.6	0.5	0.3	0.2	0.9	-.037	3.934
	均值生成	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	-.040	3.889

表 9 昭明站 1983~1988 年最佳生成係數之灰關聯係數值

建模點數	辨識係數	1984	1985	1986	1987	1988	平均值
四點	0.1			.19218	1.00000	.93563	.70927
	0.2			.32223	1.00000	.96672	.76298
	0.3			.41621	1.00000	.97756	.79792
	0.4			.48731	1.00000	.98307	.82346
	0.5			.54296	1.00000	.98641	.84313
	0.6			.58772	1.00000	.98865	.85879
	0.7			.62449	1.00000	.99025	.87158
	0.8			.65524	1.00000	.99146	.88224
	0.9			.68134	1.00000	.99240	.89125
五點	0.1		.18379	.14629	.96626	.99815	.57362
	0.2		.31050	.25523	.98284	.99908	.63691
	0.3		.40316	.33951	.98850	.99938	.68264
	0.4		.47386	.40666	.99135	.99954	.71785
	0.5		.52959	.46142	.99307	.99963	.74592
	0.6		.57464	.50692	.99421	.99969	.76887
	0.7		.61182	.54533	.99504	.99974	.78798
	0.8		.64302	.57819	.99565	.99977	.80416
	0.9		.66958	.60662	.99614	.99979	.81803
六點	0.1	.46602	.22890	.15775	.99444	.99331	.56809
	0.2	.63576	.37253	.27251	.99721	.99665	.65493
	0.3	.72901	.46763	.36176	.99219	.99988	.71009
	0.4	.78199	.53942	.43044	.99413	.99991	.74918
	0.5	.81764	.59415	.48578	.99530	.99993	.77856
	0.6	.84327	.63725	.53131	.99608	.99994	.80157
	0.7	.86258	.67208	.56944	.99664	.99995	.82014
	0.8	.87766	.70081	.60183	.99706	.99996	.83546
	0.9	.88975	.72491	.62969	.99738	.99996	.84834



表 10 昭明站 1989 年之預測結果

建模點數	辨識係數	預測值(m)	實測值(m)	實測值與預測值之差(m)	誤差百分比
四點	0.1~0.9	5.532	4.71	-0.822	-17.45%
	均值生成	5.820		-1.110	-23.57%
五點	0.1~0.9	5.321		-0.611	-12.97%
	均值生成	5.354		-0.644	-13.67%
六點	0.1~0.2	5.427		-0.717	-15.22%
	0.3~0.9	5.430		-0.720	-15.29%
	均值生成	5.470	-0.760	-16.14%	

表 11 昭明站 1989~1994 年之最佳生成係數值

建模點數	辨識係數	1984	1985	1986	1987	1988	a 值	b 值
四點	0.1~0.9			0.8	0.3	0.2	-.170	2.584
	均值生成			0.5	0.5	0.5	-.093	3.311
五點	0.1~0.9		0.2	0.9	0.9	0.1	-.026	3.884
	均值生成		0.5	0.5	0.5	0.5	-.052	3.541
六點	0.1~0.9	0.6	0.9	0.6	0.5	0.1	.011	4.477
	均值生成	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	-.002	4.287

表 12 昭明站 1989~1994 年最佳生成係數之灰關聯係數值

建模點數	辨識係數	1990	1991	1992	1993	1994	平均值
四點	0.1			.11912	.92188	.92087	.65396
	0.2			.21271	.95931	.95877	.71026
	0.3			.28832	.97249	.97212	.74431
	0.4			.35069	.97922	.97894	.76962
	0.5			.40300	.98331	.98308	.78980
	0.6			.44751	.98605	.98586	.80647
	0.7			.48585	.98802	.98785	.82057
	0.8			.51921	.98950	.98936	.83269
	0.9			.54851	.99066	.99053	.84323
五點	0.1		.94781	.42959	.11073	.83919	.58183
	0.2		.97320	.60098	.19936	.91256	.67153
	0.3		.98197	.69317	.27193	.93996	.72176
	0.4		.98642	.75076	.33244	.95428	.75597
	0.5		.98911	.79014	.38366	.96309	.78150
	0.6		.99091	.81878	.42759	.96905	.80158
	0.7		.99219	.84054	.46566	.97335	.81794
	0.8		.99316	.85763	.49899	.97660	.83160
	0.9		.99392	.87142	.52841	.97915	.84322
六點	0.1	.22694	.98920	.64246	.10147	.99782	.59158
	0.2	.36992	.99457	.78232	.18424	.99891	.66599
	0.3	.46827	.99637	.84352	.25305	.99927	.71210
	0.4	.54007	.99728	.87786	.31116	.99945	.74516
	0.5	.59478	.99782	.89985	.36087	.99956	.77058
	0.6	.63786	.99818	.91512	.40390	.99964	.79094
	0.7	.67266	.99844	.92635	.44150	.99969	.80773
	0.8	.70135	.99864	.93496	.47463	.99973	.82186
	0.9	.72543	.99879	.94177	.50405	.99976	.83396

表 13 昭明站 1995 年之預測結果

建模點數	辨識係數	預測值(m)	實測值(m)	實測值與預測值之差(m)	誤差百分比
四點	0.1~0.9	6.547	5.33	-1.217	-22.83%
	均值生成	5.706		-0.376	-7.05%
五點	0.1~0.9	4.934		0.396	7.43%
	均值生成	5.208		0.122	2.29%
六點	0.1~0.9	4.212		1.118	20.98%
	均值生成	4.369		0.961	18.03%

表 14 大潭站 1983~1988 年之最佳生成係數值

建模點數	辨識係數	1984	1985	1986	1987	1988	a 值	b 值
四點	0.1~0.9			0.9	0.9	0.5	1.042	4.362
	均值生成			0.5	0.5	0.5	.057	3.880
五點	0.1~0.9		0.5	0.8	0.9	0.2	.613	3.921
	均值生成		0.5	0.5	0.5	0.5	.639	4.008
六點	0.1~0.6	0.1	0.1	0.9	0.9	0.2	.281	2.976
	0.7~0.9	0.9	0.5	0.3	0.9	0.6	.441	4.146
	均值生成	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	.353	3.519

表 15 大潭站 1983~1988 年最佳生成係數之灰關聯係數值

建模點數	辨識係數	1984	1985	1986	1987	1988	平均值
四點	0.1			.66514	.11427	.81884	.53275
	0.2			.79133	.19762	.89615	.62837
	0.3			.84844	.26664	.92721	.68076
	0.4			.88101	.32472	.94397	.71657
	0.5			.90205	.37428	.95446	.74360
	0.6			.91677	.41706	.96164	.76516
	0.7			.92765	.45437	.96686	.78296
	0.8			.93601	.48718	.97083	.79801
	0.9			.94264	.51628	.97395	.81096
五點	0.1		.98673	.18550	.17552	.99643	.58604
	0.2		.99331	.31265	.29834	.99821	.65063
	0.3		.99553	.40546	.38931	.99880	.69727
	0.4		.99664	.47619	.45940	.99910	.73283
	0.5		.99731	.53188	.51505	.99928	.76088
	0.6		.99776	.57687	.56032	.99940	.78359
	0.7		.99808	.61396	.59786	.99949	.80235
	0.8		.99832	.64508	.62949	.99955	.81811
	0.9		.99850	.67156	.65651	.99960	.83154
六點	0.1	.65573	.14569	.09895	.99374	.94375	.56757
	0.2	.79207	.25433	.18008	.99686	.97106	.63888
	0.3	.85106	.33845	.24781	.99790	.98052	.68315
	0.4	.88397	.40552	.30520	.99843	.98532	.71569
	0.5	.90497	.46024	.35446	.99874	.98822	.74133
	0.6	.91954	.50574	.39719	.99895	.99016	.76232
	0.7	.55849	.99927	.60914	.73936	.99935	.78112
	0.8	.59111	.99936	.64042	.76426	.99943	.79892
	0.9	.61924	.99943	.66708	.78481	.99950	.81401

表 16 大潭站 1989 年之預測結果

建模點數	辨識係數	預測值(m)	實測值(m)	實測值與預測值之差(m)	誤差百分比
四點	0.1~0.9	-1.485	-0.40	1.085	-271.25%
	均值生成	-1.625		1.225	-306.25%
五點	0.1~0.9	-1.335		0.935	-233.75%
	均值生成	-1.431		1.031	-257.75%
六點	0.1~0.3	-1.267		0.867	-216.75%
	0.4~0.9	-1.476		1.076	-269.00%
	均值生成	-1.306	0.906	-226.50%	

表 17 大潭站 1989~1994 年之最佳生成係數值

建模點數	辨識係數	1990	1991	1992	1993	1994	a 值	b 值
四點	0.1~0.9			0.8	0.1	0.2	-.188	.844
	均值生成			0.5	0.5	0.5	-.045	1.288
五點	0.1~0.4		0.3	0.9	0.4	0.2	-.096	1.042
	0.5~0.9		0.8	0.4	0.1	0.5	-.096	1.041
	均值生成		0.5	0.5	0.5	0.5	-.075	1.109
六點	0.1~0.3	0.1	0.7	0.9	0.4	0.1	-.134	.773
	0.4~0.9	0.7	0.8	0.5	0.4	0.1	-.134	.772
	均值生成	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	-.116	.834

表 18 大潭站 1989~1994 年最佳生成係數之灰關聯係數值

建模點數	辨識係數	1989	1991	1992	1993	1994	平均值
四點	0.1			.11327	.94133	.76420	.60626
	0.2			.20347	.96977	.86633	.67986
	0.3			.27702	.97964	.90673	.72113
	0.4			.33813	.98465	.92838	.75039
	0.5			.38972	.98769	.94187	.77309
	0.6			.43385	.98972	.95108	.79155
	0.7			.47202	.99117	.95778	.80699
	0.8			.50537	.99227	.96286	.82017
	0.9			.53476	.99312	.96685	.83158
五點	0.1		.97288	.14736	.26997	.99993	.59753
	0.2		.98625	.25680	.42508	.99996	.66702
	0.3		.99079	.34134	.52583	.99998	.71448
	0.4		.99307	.40861	.59653	.99998	.74955
	0.5		.99738	.46239	.65110	.99597	.77671
	0.6		.99782	.50790	.69130	.99664	.79841
	0.7		.99813	.54630	.72319	.99712	.81618
	0.8		.99836	.57914	.74911	.99748	.83102
	0.9		.99854	.60755	.77059	.99776	.84361
六點	0.1	.43586	.98190	.15503	.43507	.98331	.59823
	0.2	.60710	.99087	.26845	.60634	.99158	.69287
	0.3	.69860	.99389	.35502	.69792	.99437	.74796
	0.4	.75629	.99332	.42289	.75558	.99690	.78500
	0.5	.79505	.99465	.47807	.79441	.99752	.81194
	0.6	.82316	.99554	.52362	.82260	.99793	.83257
	0.7	.84450	.99617	.56185	.84399	.99823	.84895
	0.8	.86124	.99665	.59441	.86078	.99845	.86230
	0.9	.87473	.99702	.62246	.87430	.99862	.87343

表 19 大潭站 1995 年之預測結果

建模點數	辨識係數	預測值(m)	實測值(m)	實測值與預測值之差(m)	誤差百分比
四點	0.1~0.9	0.904	0.47	-0.434	-92.34%
	均值生成	0.432		0.038	8.09%
五點	0.1~0.4	0.674		-0.204	-43.40%
	0.5~0.9	0.674		-0.204	-43.40%
	均值生成	0.585		-0.115	-24.47%
六點	0.1~0.3	0.984		-0.514	-109.36%
	0.4~0.9	0.985		-0.515	-109.57%
	均值生成	0.890		-0.420	-89.36%

對於建模後之外差預測，由表 4 可知新園站於 1989 年之預測值以四點建模之 1.187m 之誤差最小，而 1995 年之預測值，由表 7 得 3.997m 之誤差最小。昭明站於 1989 及 1995 年之預測值，分別由表 10 及表 13 得，於五點建模所得之 5.321m 與 5.330m 為誤差最小。至於大潭站於 1989 年之預測值誤差均偏大，主要是因曲線不符合指數律函數所致，而 1995 年之預測則以四點建模所得之 0.432m 為最佳。

### 五、結論與建議

由以上之分析可知地下水系統為一灰色系統，對地下水位之預測可以灰色模式來進行，而最佳灰色模式之建立，由本文分析可得以下之結論：

1. 地下水位資料經一次累加生成後，可降低原數列之隨機性，而且可滿足指數函數之型式，因此，本文採用指數函數型來建立灰色模式，以預測地下水位之變化。
2. 均值生成係數所建立之灰色模式並非最佳之預測模式，而以動態之生成係數，並配合灰關聯分析，可得最佳之灰色預測模式。
3. 灰關聯分析中辨識係數之存在，在調整灰關聯分析數列中最大之反應程度，亦可反應數列累加生成後滿足指數律函數之程度。
4. 建模所用之點數並非愈多愈好，完全依數

列累加生成後滿足指數律函數之點數來決定，否則將降低模式之精度。

由以上之分析可得以下之建議：

1. 利用灰色模式來預測地下水位之變化時，對模式誤差之傳遞應加以探討，以增加模式預測之精度。
2. 利用灰色模式可提供建立邊界條件之隨機性變化特性，將可改善區域性地下水數值模擬對邊界處理之猜測。

### 六、參考文獻

1. 曹丁濤，1992，灰色預測在地下水動態預報中的幾個問題，地下水，第 14 卷，第 1 期，pp.48-50。
2. 梁俊勛，1992，地下水位動態的灰色預測，地下水，第 14 卷，第 1 期，p.7-9。
3. 鄭永勝，1992，也談灰色 GM(1,1) 模型預測精度問題，地下水，第 14 卷，第 3 期，pp.154-156。
4. 張永波，李懷杰，時紅，1993，灰色預測模型與地下水管理模型的藕合技術，地下水，第 15 卷，第 3 期，pp.101-102。
5. 劉俊民，1993，灌區地下水年最高水位的灰色預測，地下水，第 15 卷，第 3 期，pp.93-96。
6. 葉一隆，蘇明道，鄒禕，1995，應用灰色模式預測地下水位，臺灣水利，第 43 卷，第 2 期，pp.66-73。

7. 黃永發，連振凱，溫志超，溫志宏，1997，  
應用灰色預測模型作地下水位預測，1997 年  
灰色系統理論與應用研討會，大葉大學，  
pp.230-235。
8. Deng, J. L., 1982, Control problems of grey  
system, System & Control Letters, Vol. 1, No. 5,  
pp.288-294.

收稿日期：民國 86 年 12 月 29 日

修正日期：民國 87 年 5 月 18 日

接受日期：民國 87 年 6 月 10 日