



抽取地下水導致孔隙壓變化之探討 Investigation on Change of Pore Pressure Due to Pumping of Groundwater

淡江大學水資源及環境工程學系
教授

施 濟 吉

Ching-chi Shih

摘 要

飽和含水層的上方與下方各有一層滲漏非常小的透水層。假設自飽和含水層抽取地下水而導致之水流動，僅限制於平面，同時也假設只有沿垂直方向的滲漏；則在飽和含水層內，因抽取地下水而導致孔隙壓之遞減，為擴散方程式所規範，但另含兩項，常數項與線性項分別代表抽水量與滲漏。另外，再假設地層下陷僅來自垂直方向的壓密，則利用孔隙壓遞減量與土層厚度變量之間的關係式，就可間接求得沉陷量。針對孔隙壓的變化，分析解係由 Green 函數構建求得，其結果為描述四者的相互關係：無因次空間座標、無因次孔隙壓差距、擴散參數與遞減參數，後兩項均與時間有關。直角座標的分析解可由控制方程式直接積分求得，其組成以誤差函數為主；而極座標的分析解只能簡化至瑕積分，無法再直接積分求得，被積函數係由第零階與第一階貝塞函數所組成。小於零的無因次孔隙壓差距不具意義。不論是直角座標或極座標，小於 1.0×10^{-9} 的分析解均會呈現時正時負的現象，但是這並不妨礙分析解的應用，因為 1.0×10^{-9} 實在太小了。呈現時正時負的現象是必然的，直角座標是來自分析解本身所含的負號，而極座標係來自其貝塞函數的特性。數值計算所涵蓋的範圍如下：擴散參數的值為 0.001、0.01、0.1 與 1；而遞減參數的值為 0.0001、0.001 與 0.01。

關鍵詞：地下水，地層下陷，孔隙壓。

ABSTRACT

Due to the decrement of the pore pressure as resulted from the pumping of the groundwater from a saturated aquifer, confined between two weakly leaking stratum, it is assumed that the movement of the groundwater is restricted in a horizontal plane only while the leaking through the strata is limited in a vertical direction only. The decay of

the pore pressure in the saturated aquifer is then described by a diffusion equation with two extra terms, the constant term representing the pumping discharge while the linear term denoting the decaying rate of the pore pressure. In addition, it is further assumed that the land subsidence is exclusively caused by a vertical settlement in the saturated aquifer. Based on the relationship between the decrement of the pore pressure and that of the relative thickness of the aquifer, the amount of the land subsidence can consequently and indirectly be determined. Analytical solutions, as constructed from the Green function, are referred to the change of the pore pressure and present a functional relationship among four items: the dimensionless pore pressure decrement, the dimensionless spatial coordinate, the diffusion parameter and the decay parameter, the later two items relating to the time. In the cartesian coordinate, analytical solutions, as integrated directly from the governing equation, are entirely composed of the error function. On the other hand, in the polar coordinate the governing equation can only be integral partially, and be simplified further to end up with an improper integral with an integrand consisting with the zeroth order and the first order of the Bessel functions. It is meaningful only if the value of the dimensionless pore pressure decrement as predicted by the analytical solution is greater than zero. It is found that analytical solutions will present oscillation if the value of the dimensionless pore pressure decrement is less than $1.0E-09$ regardless of the coordinate systems. However, the oscillation of the analytical solution will not stifle applying the analytical solution on some other related fields, since the value of $1.0E-09$ is too small. The presence of the negative value for the dimensionless pore pressure decrement is inevitable. In the cartesian coordinate system it is due to the negative operation in the analytical solutions, while in the cylindrical coordinate system it is originated from the characteristics of the Bessel functions. Ranges of numerical calculation of analytical solutions are 0.001, 0.01, 0.1 and 1 for values of the diffusion parameter, while for the decay parameter three values are used, i.e., 0.0001, 0.001 and 0.01.

Keywords: Groundwater, Land subsidence, Pore pressure.

一、前言

如眾所知，當水自受限飽和含水層 (Confined saturated aquifer) 被抽掉後，土壤內之孔隙就幾乎處於真空狀態，無法再能承受得了其上的龐大載重，飽和含水層就逐漸被壓縮，而最後就形成一般所謂的「地層下陷」 (Land subsidence)。其飽和含水層的上方與下方土層均為完全不透水層，其控制方程式為一擴散方程式，但含一代表超額抽水量的「源」。一維直角座標與極座標的分析解分別由誤差函數 (Error

function) 與貝塞函數 (Bessel function) 所組成 (施, 1997)。而本文所探討的，為飽和含水層的上方與下方土層不再是完全不透水層，而是滲漏非常小的透水層。若飽和含水層介於兩完全透水層之間，則假設地層下陷僅來自垂直方向的壓密，而地下水流動同時也限制於與其垂直的平面。而今，飽和含水層的上方與下方並不是完全不透水層，則地下水流動就不再侷限於平面上的流動。然而，沉陷行為仍然假設為垂直方向的壓密。另外，自飽和含水層超抽地下水而導致的地層下陷可分為前階段與後階段，分別為正在抽水

當中與停止抽水。其實，在孔隙內，水的流動是非常緩慢的。所以後階段停止抽水的沉陷應是非常微乎其微，地層下陷還是來自前階段正在抽水當中。本研究只探討正在抽水當中的孔隙壓變化。

據作者所知，大概在三十年前一再重複檢測橋墩高程時，才開始發現台北盆地陷。而後，相關的報導、防範對策、論著、探討、分析、討論等陸續刊登於相關的期刊。但是，從純理論的觀點，探討微滲漏受限飽和含水層抽水導致的孔隙壓變化之文獻並不多見。只希藉此以收拋磚引玉之效，且期待能更透徹了解事實之真相。

二、理論分析

如圖 1 所示，若目前所探討的受限飽和含水層為中間的一層，其厚度、孔隙壓(Pore pressure)、孔隙率 (Porosity) 與儀壓頭分別為 H 、 p 、 n 、與 h 。緊接於其上與其下各有一層微滲漏透水層，其厚度與透水係數(Permeability) 分別以 η 與 K 表之，而右下註腳 “j-1” 與 “j+1” 分別代表上微滲漏透水層與下微滲漏透水層。位於上微滲漏透水層之上方為一上飽和含水層，其厚度、孔隙壓、孔隙率與儀壓頭分別為 H_{j-1} 、 p_{j-1} 、 n_{j-1} 、與 h_{j-1} ；而下微滲漏透水層之下方為另一飽和含水層，其厚度、孔隙壓、孔隙率與儀壓頭分別為 H_{j+1} 、 p_{j+1} 、 n_{j+1} 、與 h_{j+1} 表之。則由質量守恆法則可得(施，1976)

$$\left(\alpha n + \frac{\partial n}{\partial p} + \beta n\right) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{K_x}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{K_y}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} \right] + \frac{W_1 + W_2}{H} - \frac{Q}{AH} \dots\dots\dots (1)$$

式中 t ：時間

x 、 y ：平面之直角座標軸

K_x 、 K_y ：分別為抽水管所在之飽和含水層，沿 x 軸與 y 軸的透水係數，因次為 L/T ， L 與 T 分別為時間尺度與長度尺度

γ ：水之單位體積重(= ρg ， ρ 與 g 分別為水之密度與重力加速度)

Q ：抽水量

A ：抽水管面積

α ：土壤顆粒骨架(Grandular skeleton)的垂直壓縮係數(抽水管所在之飽和含水層)，因次為應力之倒數

β ：水的體積彈性係數(Bulk modulus of elasticity)之倒數，即為水之壓縮係數，因次為應力之倒數

W_1 、 W_2 ：分別為上飽和含水層與下飽和含水層注入抽水管口所在之飽和含水層的水流速度

由達西法則得知

$$W_1 = K_{j-1} \frac{h_{j-1} - h}{\eta_{j-1}} \dots\dots\dots (2)$$

$$W_2 = K_{j+1} \frac{h_{j+1} - h}{\eta_{j+1}} \dots\dots\dots (3)$$

由式(2)與式(3)，式(1)變為

$$\left(\alpha n + \frac{\partial n}{\partial p} + \beta n\right) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{K_x}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{K_y}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} \right] - \frac{Q}{AH} - \frac{p}{\mathcal{H}} \left[\frac{K_{j-1}}{\eta_{j-1}} + \frac{K_{j+1}}{\eta_{j+1}} \right] + \frac{1}{H} \left[\frac{K_{j-1} h_{j-1}}{\eta_{j-1}} + \frac{K_{j+1} h_{j+1}}{\eta_{j+1}} \right] \dots\dots\dots (4)$$

式(4)極類似自受限飽和含水層超抽地下水而導致地層下陷的控制方程式，但增加了等號右邊的第四項與第五項，這兩項都代表微滲漏透水層的影響。參閱圖 1，如果上下微滲漏透水層改為完全不透水層，即 K_{j-1} 與 K_{j+1} 均為 0，則式(4)恢復為自受限飽和含水層抽取地下水而導致地層下陷的控制方程式(施，1997)。若令

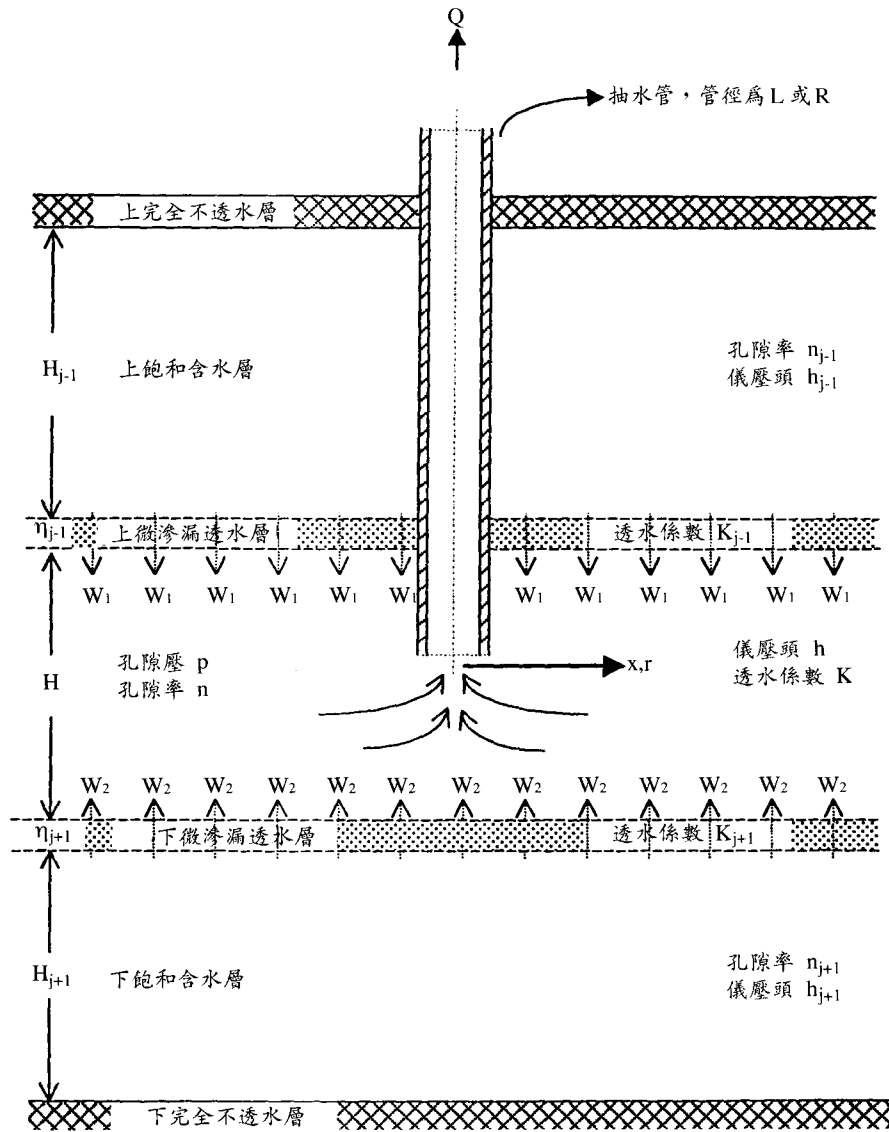


圖 1 自微滲漏飽和含水層抽水之示意圖

$$k = \frac{K_x}{\gamma(cn + \frac{\partial n}{\partial p} + \beta n)} \Big|_{r=0} = \frac{K_y}{\gamma(cn + \frac{\partial n}{\partial p} + \beta n)} \Big|_{r=0} \dots (5) \quad p^* = \gamma \left\{ \left[\frac{K_{j-1}h_{j-1} + K_{j+1}h_{j+1}}{\eta_{j-1} + \eta_{j+1}} \right] / \left[\frac{K_{j-1} + K_{j+1}}{\eta_{j-1} + \eta_{j+1}} \right] \right\} \Big|_{t=0} \dots (7)$$

$$b = \left\{ \frac{1}{\gamma H} \left[\frac{K_{j-1}}{\eta_{j-1}} + \frac{K_{j+1}}{\eta_{j+1}} \right] / \left(cn + \frac{\partial n}{\partial p} + \beta n \right) \right\} \Big|_{t=0} \dots (6) \quad w_p^* = \left\{ \begin{array}{l} \frac{Q}{AH \left(cn + \frac{\partial n}{\partial p} + \beta n \right)} \Big|_{t=0}, \text{管內} \\ 0, \text{管外} \end{array} \right\} \dots (8)$$

式中， $'|_{t=0}$ 為未抽水前的初始情況；另， k 、 b 、 p^* 與 w_p^* 的因次分別為 L^2/T 、 $1/T$ 、 F/L^2 與 F/TL^2 ， F 為力之尺度。利用式(5)、(6)、(7)、與(8)，且其值均視為常數，則式(4)變為

$$\frac{\partial p}{\partial t} = k \left[\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right] - b(p - p^*) - w_p^* \dots (9)$$

再令 $p' = p - p^* \dots (10)$

則式(9)之向量表示式為

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = k \nabla^2 p' - b p' - w_p^* \dots (11)$$

其中， ∇^2 代表拉普拉斯運算子 (Laplace operator)。式(11)的初始與邊界條件 (Initial and boundary conditions) 分別為

$$p' = 0, t = 0 \dots (12)$$

$$p' = 0, t > 0 \text{ 與遠離抽水管} \dots (13)$$

$$p' \text{ 以管中心為對稱軸}, t > 0 \dots (14)$$

式(12)表示在剛抽水前的刹那，抽水管口所在之飽和含水層的孔隙壓為 p^* ，如式(7)所示，即 $p' = 0$ 。而邊界條件為式(13)與式(14)。前者為遠離抽水管 (即 x 或 r 趨近於 ∞)， $p' = 0$ ；後者表示孔隙壓以 $x = 0$ 或 $r = 0$ 為對稱軸，參閱圖 1。式(11)仍屬於擴散方程式 (Diffusion equation)，但加一「源」(Source) w_p^* 以代表抽水量，另一線性項 $b p'$ 以反映滲漏率。

滿足上述初始與邊界條件之「解」，可利用 Green 函數，由瞬間點源 (Instantaneous point source) 對時間與空間座標積分構建求得 (Carslaw et al., 1969)。但初始條件為 0 (即敘述初使條件的函數為 0)，故由 Green 函數構建「解」時，只需考慮面積分，無須考慮體積分。同時，「源」可轉加置於面積分上。微滲漏之地層下陷並非直接求下陷量，而是先求得孔隙壓差距 p' 。然後，

再藉助於孔隙壓差距 p' 與土層厚度變量 ΔH 間的關係式，就可間接求得 (施，1976；Sower et al., 1970)，即

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{C_c p'}{1 + e_p} \dots (15)$$

式中，抽水管口所在之土層厚度 H 、孔隙壓 p 、壓密指標 (Compression index) C_c 與孔隙比 (Void ratio) e 均以未抽水前的初始情況之值計。

若為一維 (One dimension)，空間座標為 x ，管徑為 L ，式(11)簡化為

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = k \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - b p' - w_p^* \dots (16)$$

其「解」可由 Green 函數構建而得，即

$$p'(x, t) = -w_p^* \int_0^t \frac{e^{-b(t-\tau)} d\tau}{2\sqrt{k\pi}\sqrt{t-\tau}} \int_{-L}^L \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4k(t-\tau)}\right] d\xi \dots (17)$$

詳見附錄，若 $|x| < L$ (管內)，則式(17)之積分結果為

$$\begin{aligned} \delta = & 0.25 \left\{ 4 - 2e^{-\tau} \left[\phi\left(\frac{1-\xi}{2\sqrt{D'_0}}\right) + \phi\left(\frac{1+\xi}{2\sqrt{D'_0}}\right) \right] \right. \\ & - e^{+\sqrt{\tau/D'_0}(1-\xi)} \left[1 - \phi\left(\frac{1-\xi}{2\sqrt{D'_0}} + \sqrt{\tau}\right) \right] \\ & - e^{-\sqrt{\tau/D'_0}(1-\xi)} \left[1 - \phi\left(\frac{1-\xi}{2\sqrt{D'_0}} - \sqrt{\tau}\right) \right] \\ & - e^{+\sqrt{\tau/D'_0}(1+\xi)} \left[1 - \phi\left(\frac{1+\xi}{2\sqrt{D'_0}} + \sqrt{\tau}\right) \right] \\ & \left. - e^{-\sqrt{\tau/D'_0}(1+\xi)} \left[1 - \phi\left(\frac{1+\xi}{2\sqrt{D'_0}} - \sqrt{\tau}\right) \right] \right\} \dots (18) \end{aligned}$$

若 $|x| \geq L$ (管外)，式(17)的積分結果變為

$$\begin{aligned} \delta = & 0.25 \left\{ 2e^{-\tau} \left[\phi \left(\frac{\xi-1}{2\sqrt{D'_0}} \right) - \phi \left(\frac{\xi+1}{2\sqrt{D'_0}} \right) \right] \right. \\ & + e^{+\sqrt{\tau/D'_0}(\xi-1)} \left[1 - \phi \left(\frac{\xi-1}{2\sqrt{D'_0}} + \sqrt{\tau} \right) \right] \\ & + e^{-\sqrt{\tau/D'_0}(\xi-1)} \left[1 - \phi \left(\frac{\xi-1}{2\sqrt{D'_0}} - \sqrt{\tau} \right) \right] \\ & - e^{+\sqrt{\tau/D'_0}(\xi+1)} \left[1 - \phi \left(\frac{\xi+1}{2\sqrt{D'_0}} + \sqrt{\tau} \right) \right] \\ & \left. - e^{-\sqrt{\tau/D'_0}(\xi+1)} \left[1 - \phi \left(\frac{\xi+1}{2\sqrt{D'_0}} - \sqrt{\tau} \right) \right] \right\} \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

式中 $\xi = \frac{x}{L} \dots\dots\dots (20)$

$$\delta = \frac{p'b}{w_p^*} \dots\dots\dots (21)$$

$$D'_0 = \frac{kt}{L^2} \dots\dots\dots (22)$$

$$\tau = bt \dots\dots\dots (23)$$

$$\phi(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\lambda^2} d\lambda \dots\dots\dots (24)$$

ξ 與 δ 分別為無因次自因變數。定義於式(22)與(23)分別為擴散參數與遞減參數，均由時間組合而成。擴散參數 D'_0 主要反映於擴散係數 k (參閱式(5))，而遞減參數則以遞減率 b 為代表，其因次為時間的倒數，如式(6)所示。無因次空間座標 ξ 係以管徑 L 為長度尺度。無因次沉陷量 δ 受好幾個因子的影響，如遞減率 b ，孔隙壓差距 p' 與抽水參數 w_p^* ，後者定義於式(8)。孔隙壓差距 p' 是針對 p^* (參閱式(7)與式(10))，用以反映上下兩微滲漏透水層的影響。式(19)的適用範圍為管外，即 $\xi > 1$ ，其式的組成包括兩項正指

數(Positive exponent)與參項負指數(Negative exponent)。等號右邊的第二項與第四項雖含正指數，即 $+\sqrt{\tau/D'_0}$ ，但是在一般情形下，當誤差函數內的引數之值趨近於較大時，其值急劇趨近於 1；故以中括弧表示的因子之值也就趨近於 0。因此，式(19)的值也就完全決定於含負指數的第一、第三、與第五等三項的值。若誤差函數內的引數小於 1，則誤差函數的值可以正引數計，但其值為負，即 $\phi(-\eta) = -\phi(\eta)$ 。因此，這三項的中括弧之值不是趨近於 -2，就是趨近於 2。另外，式(18)適用於管內，即 $\xi \leq 1$ ，其情形頗類似於式(19)，但多了一個常數項 4。

總之，直角座標之分析解，如式(18)與(19)所示，係以誤差函數與指數遞減為主。若無微滲漏，則分析解就簡化為誤差函數所組成。誤差函數的定義示於式(24)；當其內的引數 η 等於 5 時，以十三位有效數字而言，其值等於 0.9999999999984。這就顯示在式(18)與(19)的分析解中，以「值」而言，含正指數的項幾乎可以 0 計。另外，只有式(19)才適用，因其描述管外的孔隙壓變化，因而導致地層下陷如式(15)所示。然而，式(18)可用於查驗式(16)的邊界條件，參閱式(14)。

若為極座標，空間座標改為 r ，管徑改為 R ，式(11)變為

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = k \left[\frac{\partial^2 p'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial r} \right] - bp' - w_p^* \dots\dots\dots (25)$$

其初始與邊界條件分別示於式(12)、(13)與(14)。式(25)含一線性項，即 $-bp'$ 。若令 $p' = u e^{-bt}$ ，則式(25)即可消去線性項，簡化為只包含「源」的擴散方程式，但因變數由 p' 改為 u 。而後，針對因變數 u ，利用 Green 函數構建其「解」，再乘以 e^{-bt} ，就可轉換為因變數 p' 的構建式，即(Amosov, 1937)

$$p' = \frac{1}{4\pi k} \int_0^t \frac{e^{-b(t-\tau)}}{(t-\tau)} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (-w_p^*) e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4k(t-\tau)}} d\xi d\eta \dots\dots\dots (26)$$

令 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $\xi = \rho \cos \theta_o$, $\eta = \rho \sin \theta_o$, 則式(26)變為

$$p' = \frac{1}{4\pi k} \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{e^{-b(t-\tau)}}{(t-\tau)} d\tau \times \exp\left[-\frac{r^2 + \rho^2}{4k(t-\tau)}\right] \times (-w_p^*) \times \exp\left[-\frac{r\rho \cos(\theta - \theta_o)}{2k(t-\tau)}\right] \rho d\rho d\theta \dots\dots\dots (27)$$

為方便起見, 令 $\theta_o = 0$ 。首先對 θ 積分, 並引用修正貝塞爾函數(Modified Bessel Function) I_o 的定義, 即(McLachlan, 1954)

$$I_o\left[\frac{r\rho}{2k(t-\tau)}\right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{r \cos \theta}{2k(t-\tau)}\right] d\theta \quad (28)$$

則式(27)改為

$$p' = \int_0^t \frac{e^{-b(t-\tau)}}{2k(t-\tau)} d\tau \int_0^R (-w_p^*) e^{-\frac{r^2 + \rho^2}{4k(t-\tau)}} \times I_o\left[\frac{r\rho}{2k(t-\tau)}\right] \rho d\rho \dots\dots\dots (29)$$

再令, $\mu = t - \tau$ 及貝塞爾函數 J_o 與修正貝塞爾函數 I_o 間的關係, 即 $I_o(z) = J_o(iz)$, 則式(29)再簡化為

$$p' = \frac{1}{2k} \int_0^t \frac{e^{-b\mu}}{\mu} d\mu \int_0^R (-w_p^*) e^{-\frac{r^2 + \rho^2}{4k\mu}} \times J_o\left(\frac{ir\rho}{2k\mu}\right) \rho d\rho \dots\dots\dots (30)$$

利用 Weber-Sonine 公式(Poluborinova-Kochina, 1962)

$$e^{-\frac{x^2 + y^2}{4z}} J_o\left(\frac{ixy}{2z}\right) = 2z \int_0^\infty J_o(\lambda x) J_o(\lambda y) e^{-\lambda^2 z} \lambda d\lambda \dots\dots\dots (31)$$

所以, 式(30)轉為

$$p' = \int_0^t e^{-b\mu} d\mu \int_0^R (-w_p^*) \int_0^\infty J_o(\lambda r) J_o(\lambda \rho) \times e^{-\lambda^2 k\mu} \lambda d\lambda \rho d\rho \dots\dots\dots (32)$$

對調積分順序, 且先對 ρ 積分及利用公式, $[x^\nu J_\nu(x)]' = x^\nu J_{\nu-1}(x)$, 則式(32)就可簡化為

$$p' = R \int_0^t e^{-b\mu} d\mu \int_0^\infty (-w_p^*) e^{-\lambda^2 k\mu} J_o(\lambda r) J_1(\lambda R) d\lambda \dots\dots\dots (33)$$

最後, 再對 μ 積分, 並予以無因次化, 即可得

$$\delta_c = - \left[\int_0^\infty \frac{J_o(\mu \xi_c) J_1(\mu)}{1 + D_{oc}' \mu^2 / \tau} d\mu - e^{-\sigma} \int_0^\infty \frac{J_o(\mu \xi_c) J_1(\mu)}{1 + D_{oc}' \mu^2 / \tau} e^{-D_{oc}' \mu^2} d\mu \right] \dots\dots\dots (34)$$

其中 $\delta_c = \frac{p'b}{w_p^*} \dots\dots\dots (35)$

$$D_{oc}' = \frac{kt}{R^2} \dots\dots\dots (36)$$

$$\delta_c = \frac{r}{R} \dots\dots\dots (37)$$

而 J_o 與 J_1 分別為第零階與第一階貝塞爾函數, 另遞減參數 τ 定義於式(23)。 δ_c 與 ξ_c 分別為無因次因變數與無因次空間座標, 參閱式(35)與(36), 另擴散參數改以 D_{oc}' 表之, 類似於式(22), 但管徑改為 R 。在式(34)的被積函數中, D_{oc}' / τ 卻與時間無關, 其值為 $k/(bR^2)$ 。

比較式(34)與(18)及(19), 除了兩分析解都包含指數遞減參數外, 兩者的最大差異在於前者不再以誤差函數為主, 而改以貝塞爾函數為主。此外, 式(34)可同時適用於管內與管外, 不像直角座標分成兩個分析解(式(18)與式(19))予以表之。最後在計算方面, 式(18)與(19)遠較式(32)簡單多。如前所述, 誤差函數的值恆大於 0, 只要其內的引數值大於 0。但是貝塞爾函數較為複雜, 若其內的引數之值大於階次(示於右下註腳), 則貝塞爾函數的值頗類似三角函數, 正負相間, 但以指數之速率遞減。因此, 式(34)之值應可能出現負值之不尋常現象。

三、結果與討論

參閱式(19)與式(34)，不論直角座標或極座標，微滲漏孔隙壓變化的兩個主要參數為擴散參數 D_o' (或 D_{oc}') 與遞減參數 τ ，分別定義於式(22)或(36)與式(23)，其中 k 為擴散係數，而 b 為微滲漏率。如式(5)與(6)所示，除了時間 t 外，這兩參數的值決定於透水係數 K 、水之單位體積重 γ 、顆粒骨架垂直壓縮係數 α 、孔隙率 n 、孔隙壓縮係數 $\partial n / \partial p$ 、水之體積彈性係數 β 、飽和含水層厚度 H 、微滲漏透水層厚度 η 及其儀壓頭 h 。若 $(cn + \partial n / \partial p + \beta n)$ 以 $(1-n)\beta_A$ 計，其中 β_A 為空氣壓縮係數，空氣壓縮係數的值約為水壓縮係數 β 的兩萬倍(Daily et al. 1966)，在這些諸影響因子或因素當中，只有透水係數 K 除外，其餘的都可以單值計。透水係數的幅度相當懸殊，視不同的土層結構與組織而定，往往有好幾千倍，甚至好幾萬倍之差異。本研究採用四個不同的擴散參數之值予以探討，計 10^{-3} 、 10^{-2} 、 10^{-1} 與 1 等值。另外，同時採用三個不同值的遞減參數， $\tau = 0.0001$ 、 0.001 與 0.01 ，其值愈小，則分析解將愈趨近於自受限飽和含水層超抽地下水而導致地層下陷之分析解(施，1997)。

微滲漏地層下陷不同於受限飽和含水層地層下陷，後者可直接由分析解求得沉陷量，但前者是先間接由分析解求得無因次孔隙壓差距，而後再由式(15)求得沉陷量。如式(18)或(19)與式(34)所示，等號右邊均含一負號「-」，計算結果的展示並不考慮負號。因此，無因次孔隙壓差距須大於 0 才不失去其意義。為了便於求得分析解，故採用兩種較簡單的座標：直角座標與極座標。參閱式(16)，直角座標相當於一連串的抽水井置於一條無限長的直線上， x 軸即垂直這一直線，類似於俗稱的 Line source。另一方面，極座標相當於在一廣大的平面中置一抽水井，較直角座標接近實際情況。

(一) 直角座標

分析解示於式(18)與(19)，其邊界條件示於式(13)與(14)。為了解分析解之特徵，分析解須展

示於一般尺度的座標軸，水平與直角座標軸分別為無因次空間座標 ξ 與無因次孔隙壓差距 δ ，均自零起算，僅用以顯示分析解的正確趨勢，即滿足上述之邊界條件。在 $\xi = 0$ 處， $\partial \delta / \partial \xi = 0$ ，相當於曲線趨近於水平；另外，當 $\xi \rightarrow \infty$ ，則 ξ 應趨近於 0。圖 2 的圓形空心符號即為典型之代表，擴散參數 D_o' 與遞減參數 τ 分別等於 0.1 與 0.01，其值愈小愈能顯示其特徵(Magnus et al., 1954)。管內相當於 ξ 的值介於 0 與 1 之間，大於 1 則代表管外，即為所考慮的適用空間。參閱圖 2 圓形空心符號之分佈，無因次孔隙壓差距 δ 均大於 0；同時趨近於水平與趨近於 0，當 ξ 的值分別趨近於 0 與變成較大時。這顯示分析解符合式(13)與(14)的正確趨勢。曲線的分佈非常類似於一般的常態分佈，其圖形以實線表示，因為後者也符合式(13)與(14)的邊界條件。通常，擴散方程式之分析解係由誤差函數所組成的，而式(16)之形式實屬擴散方程式之一類，只不過多含了兩項，其中一項用以代表遞減，另一項則為抽水量。所以，圖 2 圓形空心符號之分佈早在意料中。

如圖 2 圓形空心符號所示，分析解在 $\xi = 1$ 處的附近，其變化相當大。因此，圖 3 與圖 4 的無因次空間座標的範圍只局限於 $\xi = 1$ 處的附近，同時 $\Delta \xi$ 設為 0.02，另無因次孔隙壓差距 δ 的幅度也只著眼於 $\delta = 0$ 之附近。為了瞭解不同的擴散參數 D_o' 與遞減參數 τ 之值對分析解的影響，故座標軸也同樣採用一般尺度。圖 3 與圖 4 分別為不同的擴散參數與遞減參數之值時，曲線之形狀與走向。前者的 τ 值設為 0.01，而 D_o' 值分別取 0.001、0.01、0.1 與 1 等四值；後者的 D_o' 值設為 0.001，另分別取參個不同的 τ 值，即 0.0001、0.001 與 0.01。參數的值增加時，曲線的移動走向以箭頭示於圖上。另外，本論文所探討的問題包含兩個自變數，一是時間 t ，二是空間位置 x 或 r 。空間座標予以無因次化後，即可形成一無因次空間座標軸 ξ 。但時間 t 就不同了，同時出現於擴散參數 D_o' 與遞減參數 τ 的定義裡；前者代表擴散之效應，而後者代表遞減的效果。因此，無法直接以時間增長了後的觀點，

來探討分析解怎麼改變，只能分開探討每一個參數值的改變對分析解的影響，如圖 3 與圖 4 所示。

為了便於討論，定義「影響範圍」為曲線斜率非常小或趨近於 0 之區域。圖 3 顯示，擴散參數 D_0' 的值愈大，則影響範圍也就愈大。擴散方程式適用於描述某一分布不均勻的現象趨近於新的另一均勻的過程，式中的係數俗稱為擴散係數，其值愈大就愈快趨近於另一均勻；易言之，影響範圍愈大。而今，擴散參數 D_0' 又是由擴散係數所組成的，如式(36)所示，所以擴散參數的角色就如擴散係數一般。以圖 3 而言，無因

次孔隙壓差距 δ 介於 0 與 0.01 之間，曲線形狀隨著擴散參數值的增加，而愈趨於平緩；易言之，「影響範圍」也愈大，梯度也就愈平緩。有趣的是，其間的不同曲線似乎都經過中心點，即 $\xi = 1$ 與 $\delta = 0.005$ 。從圖 3 看來，擴散參數 D_0' 趨近於 0 的曲線(分析解)好像是一條折線，從 $\xi = 0$ 至 1 是一條水平線，而於 $\xi = 1$ 處，突然轉為垂直線，最後又回復為水平線。擴散參數的角色就是影響經過中心點的曲線形狀。愈大值的擴散參數將使曲線愈趨平緩，或「影響範圍」愈大。趨近於擴散參數為無窮大的極端情況，曲線將趨近於一條經過中心點之水平線。

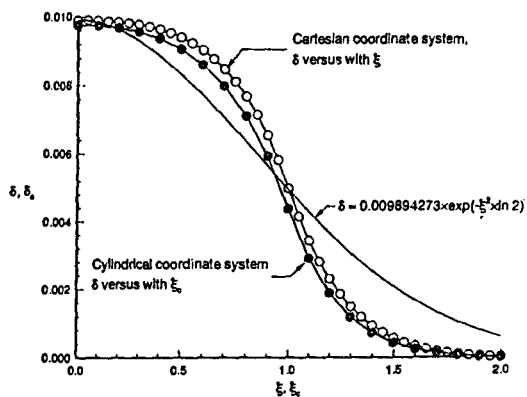


圖 2 分析解之特徵

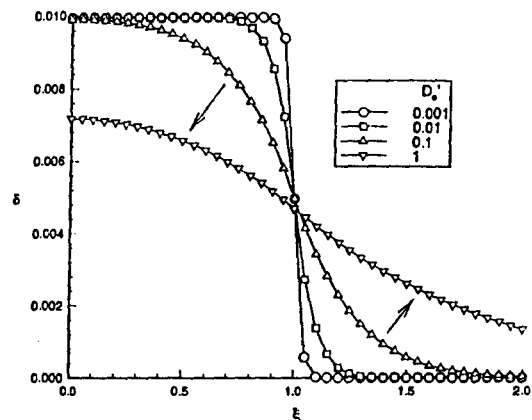


圖 3 直角座標擴散參數對分析解之影響

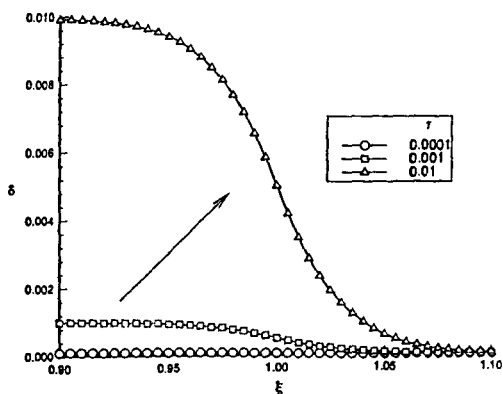


圖 4 直角座標遞減參數對分析解之影響

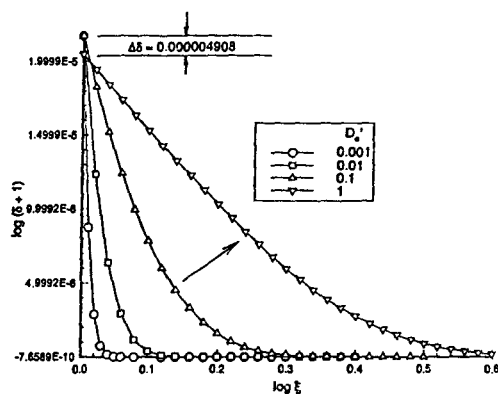


圖 5 直角座標之分析解 ($\tau = 0.0001$)

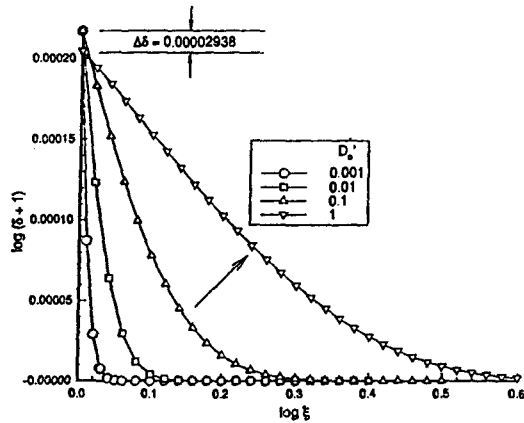


圖 6 直角座標之分析解 ($\tau = 0.001$)

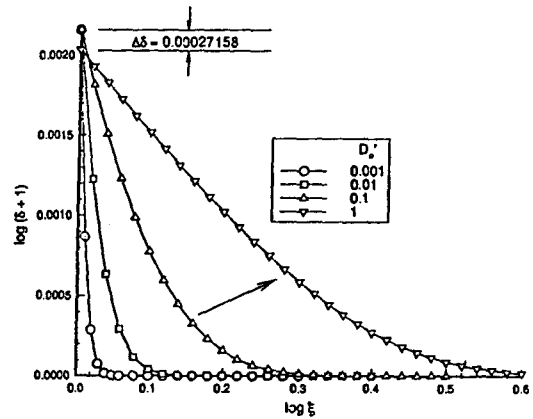


圖 7 直角座標之分析解 ($\tau = 0.01$)

圖 4 為不同的遞減參數 τ 值之影響，比較圖 3 與圖 4 的箭頭指向，即可發現遞減參數的影響適巧與擴散參數的影響相反。為了便於討論，定義「幅度」為無因次孔隙壓差距 δ 在 $\xi = 0$ 處之值。遞減參數的值愈大，「幅度」愈大，即遞減愈快也愈大，所以曲線愈不平緩。同樣地，每一條曲線似乎都通過「幅度」的中心點，即 $\xi = 1$ 與 $\delta = 0.5 \times \delta|_{\xi=0}$ ，但「幅度」並不為一定值，而是隨著遞減參數 τ 值的增加而增加。如果遞減參數 τ 值趨近於 0，則趨近於 $\delta = 0$ 的水平線。相反地，若遞減參數 τ 值趨近於無窮大，那就趨近於圖 3 所述的折線，只不過在 $\xi = 0$ 與 $\xi = 1$ 之間為一水平線，其高度 δ 也將趨近於無窮大，而不是等於 0.01。

由於無因次孔隙壓差距的幅度相當懸殊，故以實用立場而言，式(19)的分析解不能展示於一般尺度的座標軸，須改用對數。水平座標軸仍然為無因次空間座標 ξ ，但取對數；而垂直座標軸為無因次孔隙壓差距 δ 加 1，同樣採用對數。如前所述，無因次孔隙壓差距 δ 值必須大於 0 才具意義；若其值小於 0，則 $\delta + 1 < 1$ ，其對數值將變為負值。這種情況通常出現於 δ 值很小時，在直角座標，情形並不多，但在極座標較為頻繁。計算結果展示於圖 5 至圖 7，遞減參數 τ 值分別為 0.0001、0.001 與 0.01。每一張圖均採用四個不同的擴散參數值，即 $D_0' =$

0.001、0.01、0.1 與 1，並附一箭頭用以標示隨著擴散參數值之增加，曲線之走向。參閱圖 5 至圖 7，所有曲線的形狀與走勢大致相似，隨著無因次空間 δ 值之增加，無因次孔隙壓差距愈劇遞減。易言之，曲線的走勢均為自左上方向右下方下降。但是，跟著擴散參數 D_0' 值的增加，整條曲線都成往右上方移動的走向，如箭頭所示。由於無因次孔隙壓差距 δ 的幅度太大，加上紙張大小的限制，為了展顯整體曲線的變化，也就無法顯示無因次孔隙壓差距太小的變化。所以，這就造成好幾個數據集擠於水平座標軸的附近。實際上，無因次孔隙壓差距小於 0 的情況並不多見，而且其值都已相當小了，大致小於 1.0×10^{-9} 。圖 5 至圖 7 的差異在於不同的遞減參數 τ 值，分別等於 0.0001、0.001 與 0.01，這三張圖在 $\log \xi = 0$ 處的 $\log(\delta + 1)$ 值各為 0.217133×10^{-4} 、 0.2169847×10^{-3} 與 0.2155294×10^{-2} 。如前所述，若以在 $\log \xi = 0$ 處的 $\log(\delta + 1)$ 值定義為「幅度」，則遞減參數的值增加十倍，則其幅度也跟著增加十倍。同時，另以 $\Delta\delta$ 表示擴散參數的值分別等於 1 與 0.001 時的「幅度」差距，則這三張圖的 $\Delta\delta$ 值均相差十倍。

(二) 極座標

分析解展示於式(34)，邊界條件同樣為式(13)與(14)。不同於直角座標之分析解，極座標之

分析解並不是由誤差函數所組成的，而改由第零階貝塞函數 J_0 與第一階貝塞函數 J_1 所構建而得，同時分析解係尚須由瑕積分 (Improper integral) 求得。因此，式(34)的計算遠較式(18)與(19)來得麻煩與複雜。式(34)的積分採用由梯形法 (Extended trapezoidal rule) 演變而得的辛普森法 (Simpson's rule)。後者的誤差為 $O(1/N^2)$ ，其中 N 代表區間內的點數，或是分割成許許多多小區間 (Sub-interval) 的總數。每次細分區間(上下限分別以 a 與 b 表示)都是採用二等分的方式，第一次細分成二個小區間， $n = 1$ ；第二次再細分成四個小區間， $n = 2$ ；第三次又再細分成八個小區間， $n = 3 \dots$ 等等。因此，小區間的總數 N 即為 2^n ， $n = 1、2、3 \dots$ ，小區間大小以 h 表示，其值將隨著一再的細分而愈來愈小。小區間的總數 N 與小區間大小 h 之關係為 $h = (b-a)/N$ 。第一次細分的積分值以 $S(1)$ 表之，其小區間大小為 $h_1 = (b-a)/2$ ，第二次細分的積分值以 $S(2)$ 表之，其小區間大小為本來為 h_1 的一半，而因誤差為 $1/N^2$ ，故改為第一次細分的四分之一，即 $h_2 = (b-a)/2 \times 0.25$ 。每次細分，其小區間大小為前次的四分之一，而不是二分之一。經過 j 次細分後，即可產生 j 個積分值及 j 個對應的小區間大小，即 $S(1)、S(2)、\dots S(j)$ ； $h_1、h_2、\dots h_j$ 。而後，再根據後面 k 組數據 $\{S(i), h_i\}$ ， $i = 1、2、\dots k$ ，利用多項式內插法，以外插方式求小區間大小為 0 的積分值 SS 。如果最後兩次細分的積分值之絕對比值 $|S(j)/S(j-1)|$ 小於 1.0×10^{-6} ，則上述的積分值 SS 就為所欲求的積分值，否則必須再繼續細分下去，直到符合前述條件為止，即絕對比值小於 1.0×10^{-6} 。但是，每次利用多項式內插法求積分值 SS 時，都是只使用最後的 k 組數據。這種方法即為俗稱的 Romberg 積分法，其誤差為 $1/N^{2k}$ ；辛普森法為 Romberg 積分法的特殊情況，相當於 $k = 1$ (Press, 1992)。本研究採用八組數據(即 $k=8$)求積分值 SS ；同時，若最後兩次細分的積分值之絕對比值大於 1.0×10^{-6} 時，頂多再細分七次，總共十五次。多半情況只需八、九次細分就可符合上述要求，只有少數情況經過了十五次細分還無法滿足上述條件，不過，這種

情況的絕對比值大致小於 1.0×10^{-3} 。在 5580 個的瑕積分中，無法符合上述條件的瑕積分共有 294 個，約佔 5.27%。其中，介於 1.0×10^{-6} 至 1.0×10^{-5} 、 1.0×10^{-5} 至 1.0×10^{-4} 、 1.0×10^{-4} 至 1.0×10^{-3} 的個數分別為 99、171、25。參閱式(34)，其積分上、下限分別為 0 與無窮大，為一瑕積分。本研究的處理方式係將自 0 到無窮大的區間分成許許多多區間，但是相鄰的兩個區間都以倍數擴大其大小，第一個小區間設為 $(0,0.1]$ 的半開或半閉區間，第二個小區間就設為 $[0.1,0.2]$ 的閉區間，而後的小區間就以此類推，但都是閉區間 (Gerald et al., 1992)。只有第一個小區間使用中間點積分公式，其餘的均採用辛普森公式。式(34)的瑕積分就以這種方式逐小區間積分，直到最後兩小區間的積分值之絕對比值小於 1.0×10^{-8} 為止。總之，以目前所採用的數據積分技巧而言，不但計算速率快，而且相當準確。

圖 2 用以比較不同座標之分析解，直角座標與極座標之分析解分別以圓型空心符號與圓型實心符號表示。參閱圖 2，圓形實心符號顯示極座標的分析解也滿足式(13)與(14)之邊界條件；同時，圖線形狀也非常類似於直角座標的情形。但是，只能說看起來好像分析解之組成同樣以誤差函數為主，實際上並不如此。一般而言，圖 2 顯示除了在管中心與遠離管等地方外，在其餘的位置上，極座標之分析解所推測的無因次孔隙壓差距均小於直角座標的推測值，可是其間差距並不大。另外，以式(11)而言，在不同的座標系，兩分析解間的差距固然存在。但是，在某些局部情況下，兩不同座標的分析解應該相當吻合。

以式(11)而言，在不同的座標，分析解間的差異甚多，較為特別的，就是分析解的震動現象（或正負相間），如圖 8 所示。不論是直角座標或極座標，分析解呈現振動現象通常都發生於 δ_c 或 δ 值太小的時候，大致小於 1.0×10^{-9} 。這種現象在直角座標並不太明顯；但是，在極座標較為明顯。參閱式(34)，極座標之分析解是由貝塞函數所組成的。如果貝塞函數內的引數值大於階數（示於右下註腳），

貝塞函數非常類似三角函數，正負相間，但是以「指數」速率遞減。以這一點而言，極座標之分析解呈現振動現象是必然的，但是，這種現象並不妨礙應用，因為「值」太小。另外，直角座標之分析解也同樣會出現無因次孔隙壓差距小於 0 的情況；不過，這並不是由於上述的原因，而是方程式本身包含負號，參閱式 (18) 大括弧內的第四項與第五項。

而後的探討順序與直角座標的分析順序完全一致，分析結果依序展示於圖 9 至圖 13，在直角座標的對應圖可分別參閱圖 3 至圖 7。因此，除非是不同之處須特別指出、分析與討論外，其餘的就不再陳述。圖 9 顯示極座標的分析

解並不呈現中心點。由圖 10 可看出。在同一的擴散參數值下，不同的遞減參數值之影響並不因不同的座標而異。但是，相反地，在同一遞減參數值下，不同的擴散參數值卻因不同的座標而異，如圖 11 至圖 13（對應於圖 5 至圖 7）。參閱圖 13，遞減參數 $\tau = 0.01$ ，擴散參數 D_{oc} 等於 0.001 與 1 時，其「幅度」分別為 0.2129677×10^{-2} 與 0.1229393×10^{-2} （幅度定義為 $\log \xi_c = 0$ 處的 $\log(\delta_c + 1)$ 值），兩「幅度」之差距 $\Delta \log(\delta_c + 1) = (0.2129677 - 0.1229393) \times 10^{-2}$ ，故 $\Delta \delta_c = 0.002075131$ 。同樣的情況如圖 7 所示， $\Delta \xi = 0.000271581$ 。前者為極座標，而後者為直角座標，即前者的影響較後者大。

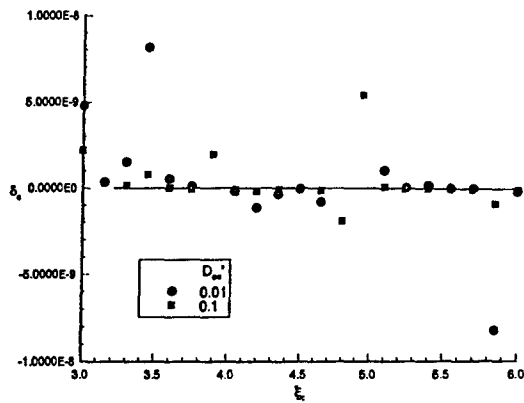


圖 8 極座標分析解之振動現象

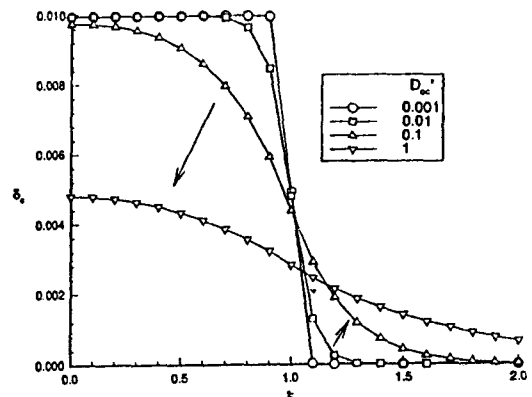


圖 9 極座標擴散參數對分析解之影響

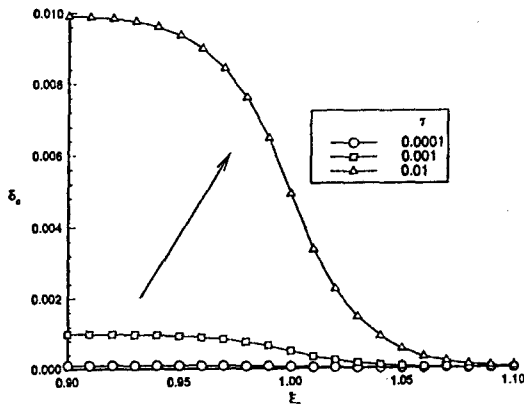


圖 10 極座標遞減參數對分析解之影響

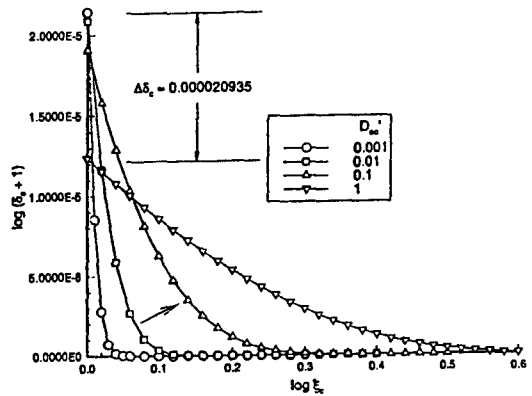


圖 11 極座標之分析解 ($\tau = 0.0001$)

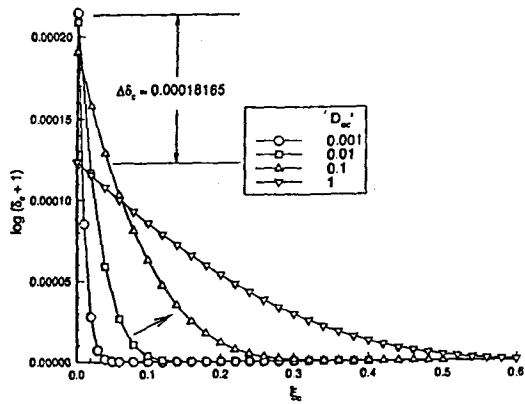


圖 12 極座標之分析解 ($\tau = 0.001$)

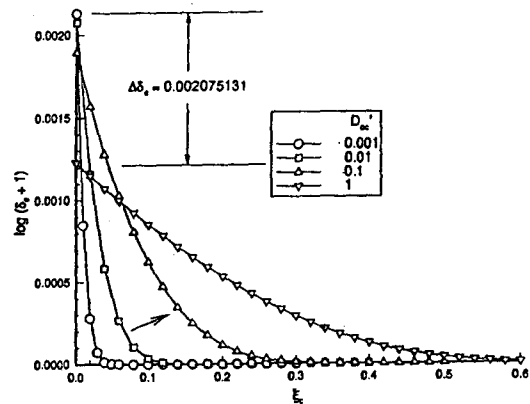


圖 13 極座標之分析解 ($\tau = 0.01$)

四、結 論

飽和含水層的上方與下方土層均為滲漏率非常小的透水層，假設在飽和含水層內的水流動僅限制於平面上，則自飽和含水層抽水而導致的孔隙壓變化受制於式(11)。式(11)為一擴散方程式，但含一常數用以代表抽水量，另一線性項以反應滲漏。直角座標與極座標之分析解分別為式(18)及(19)，與式(34)。若再假設飽和含水層只限於垂直方向的沉陷，如式(15)所示，則配合上述分析解即可間接解得沉陷量。

不論是直角座標或是極座標，分析解規範了四者的相互關係：無因次空間座標、無因次孔隙壓差距、遞減參數與擴散參數。前兩項分別為無因次自、因變數，而後兩項均與時間有關。此外，抽水量反應於無因次孔隙壓差距，無因次空間座標係利用管徑予以無因次化，遞減參數與滲漏率息息相關，最後，擴散參數決定於含水土層組織與結構。

直角座標的分析解可由式(11)直接積分求得，函數結構以誤差函數為主。但是，極座標的分析解無法直接積分求得，只能簡化成一瑕積分，被積函數為第零階與第一階貝塞函數。瑕積分採用 Romber 法，誤差非常小。且在某些局部情況下，兩不同座標之分析解相當一致，足以顯示分析解之正確性。

以分析解展示於圖上的曲線而言，擴散參數的影響反應於曲線的平緩與否，而遞減參數卻控制曲線的幅度。

無論是直角座標或極座標，若無因次孔隙壓差距的值過份小，分析解均可能呈現負值，唯有正值才具意義。只要無因次孔隙壓差距的值大於 1.0×10^{-9} ，就可避免這種現象。雖然分析解可能出現負值，不具意義，但是其值太小了，並不影響分析解之應用。雖然正直才具意義，但分析解呈現無因次孔隙壓差距小於 0 的現象是必然的；不過，形成的原因視不同的座標而異。直角座標是來自分析解本身所含的負號，而極座標體系來自貝塞函數的特性。

以分析解受不同座標的影響而言，遞減參數的影響並不明顯，但幅度受擴散參數的影響較為顯著。

五、致 謝

本研究的進行承蒙經濟部水資源局研究計畫 "地層下陷與超額抽取地下水關係之研討，經(八四)水 84280122 號" 的補助，淡江大學圖書館之鼎力幫忙，尤其是鄭副館長麗敏的積極與耐心，以及研究生林裕凱的耐心與細心打字，在此致上謝意。

六、附錄

令 $\lambda = (-\xi + x) / [2\sqrt{k(t-\tau)}]$ ，則式(15)變為

$$p' = \frac{-w_p^*}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp[-b(t-\tau)] d\tau \int_{L_1}^{L_2} \exp(-\lambda^2) d\lambda \dots\dots\dots (A1)$$

式中， $L_1 = (+L+x) / [2\sqrt{k(t-\tau)}]$ ，
 $L_2 = (-L+x) / [2\sqrt{k(t-\tau)}]$ 。式(A1)的第二個積分，
 由 L_1 至 L_2 分成兩個區間：一是自 L_1 至 0，二是
 自 0 至 L_2 ；同時，利用誤差函數的特性，即
 $\phi(-x) = -\phi(x)$ ，參閱式(24)，則式(A1)改為

$$p' = \frac{+w_p^*}{2} \int_0^t \exp[-b(t-\tau)] \phi(L_1) d\tau \\ + \frac{w_p^*}{2} \int_0^t \exp[-b(t-\tau)] \phi(-L_2) d\tau \dots\dots\dots (A2)$$

首先處理式(A2)的第二個積分。若 $x < L$ ，令
 $\eta = (L-x) / [2\sqrt{k(t-\tau)}]$ ，更改積分變數由 τ 改為
 η 則

$$\frac{w_p^*}{2} \int_0^t \exp[-b(t-\tau)] \phi(-L_2) d\tau \\ w_p^* (-l_2)^2 \int_{-l_2/\sqrt{t}}^{\infty} \exp[-b(-l_2)^2 / \eta^2] / \eta^3 \times \phi(\eta) d\eta \\ \dots\dots\dots (A3)$$

式中， $l_2 = (-L+x) / (2\sqrt{k})$ 。利用部份積分，
 令 $u = \phi(\eta)$ ， $dv = \exp[-b(-l_2)^2 / \eta^2] / \eta^3 d\eta$ ，
 則 $du = 2/\sqrt{\pi} \times \exp(-\eta^2) d\eta$ ，
 $v = \exp[-b(-l_2)^2 / \eta^2] / [2b(-l_2)^2]$ 所以

$$\int_{-l_2/\sqrt{t}}^{\infty} \exp[-b(-l_2)^2 / \eta^2] / \eta^3 \times \phi(\eta) d\eta$$

$$= uv \Big|_{-l_2/\sqrt{t}}^{\infty} - \int v d\eta \\ = uv \Big|_{-l_2/\sqrt{t}}^{\infty} - \int_{-l_2/\sqrt{t}}^{\infty} \frac{1}{2b} \frac{1}{(-l_2)^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \\ \exp[-b(-l_2)^2 / \eta^2 - \eta^2] d\eta \dots\dots\dots (A4)$$

利用公式

$$\int \exp[-a^2 x^2 - b^2 / x^2] dx \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{4a} \left[\exp(2ab) \phi(ax + b/x) \right. \\ \left. + \exp(-2ab) \phi(ax - b/x) \right] \dots\dots\dots (A5)$$

則式(A4)的積分結果為

$$\int_{-l_2/\sqrt{t}}^{\infty} \exp[-b(-l_2)^2 / \eta^2 - \eta^2] \times \phi(\eta) d\eta \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left\{ \exp\left[\sqrt{b}(L-x)/\sqrt{k}\right] \phi\left[\eta + \sqrt{b}(L-x)/(2\sqrt{k}\eta)\right] \right. \\ \left. + \exp\left[-\sqrt{b}(L-x)/\sqrt{k}\right] \phi\left[\eta - \sqrt{b}(L-x)/(2\sqrt{k}\eta)\right] \right\} \Big|_{-l_2/\sqrt{t}}^{\infty} \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left\{ \exp\left[\sqrt{b}(L-x)/\sqrt{k}\right] + \exp\left[-\sqrt{b}(L-x)/\sqrt{k}\right] \right\} \\ - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left\{ \exp\left[\sqrt{b}(L-x)/\sqrt{k}\right] \phi\left[(L-x)/(2\sqrt{kt}) + \sqrt{bt}\right] \right. \\ \left. + \exp\left[-\sqrt{b}(L-x)/\sqrt{k}\right] \phi\left[(L-x)/(2\sqrt{kt}) - \sqrt{bt}\right] \right\} \\ \dots\dots\dots (A6)$$

將式(A6)代入式(A4)，而後再代入式(A3)，則

$$\frac{w_p^*}{2} \int_0^t \exp[-b(t-\tau)] \phi(-L_2) d\tau \\ = \frac{w_p^*}{4b} \left\{ 2 - 2e^{-bt} \phi\left(\frac{L-x}{2\sqrt{kt}}\right) \right. \\ \left. - \exp\left[\sqrt{b/k}(L-x)\right] \left[1 - \phi\left(\frac{L-x}{2\sqrt{kt}} + \sqrt{bt}\right) \right] \right. \\ \left. - \exp\left[-\sqrt{b/k}(L-x)\right] \left[1 - \phi\left(\frac{L-x}{2\sqrt{kt}} - \sqrt{bt}\right) \right] \right\} \dots\dots\dots (A7)$$

同樣的方法，(A2)的第一個積分結果為

$$\begin{aligned} & \frac{w_p^*}{2} \int_0^t \exp[-b(t-\tau)] \phi(L_i) d\tau \\ &= \frac{w_p^*}{4b} \left\{ 2 - 2e^{-bt} \phi\left(\frac{L-x}{2\sqrt{kx}}\right) \right. \\ & \quad - \exp[\sqrt{b/k}(L-x)] \left[1 - \phi\left(\frac{L-x}{2\sqrt{kt}} + \sqrt{bt}\right) \right] \\ & \quad \left. - \exp[-\sqrt{b/k}(L-x)] \left[1 - \phi\left(\frac{L-x}{2\sqrt{kt}} - \sqrt{bt}\right) \right] \right\} \quad (A8) \end{aligned}$$

最後，式(7)與式(8)之和為

$$\begin{aligned} p' &= \frac{w_p^*}{4b} \left\{ 4 - 2e^{-bt} \left[\phi\left(\frac{L-x}{2\sqrt{kt}}\right) + \phi\left(\frac{L+x}{2\sqrt{kt}}\right) \right] \right. \\ & \quad - \exp[\sqrt{b/k}(L-x)] \left[1 - \phi\left(\frac{L-x}{2\sqrt{kt}} + \sqrt{bt}\right) \right] \\ & \quad - \exp[-\sqrt{b/k}(L-x)] \left[1 - \phi\left(\frac{L-x}{2\sqrt{kt}} - \sqrt{bt}\right) \right] \\ & \quad - \exp[\sqrt{b/k}(L-x)] \left[1 - \phi\left(\frac{L+x}{2\sqrt{kt}} + \sqrt{bt}\right) \right] \\ & \quad \left. - \exp[-\sqrt{b/k}(L+x)] \left[1 - \phi\left(\frac{L+x}{2\sqrt{kt}} - \sqrt{bt}\right) \right] \right\} \quad (A9) \end{aligned}$$

式(A9)適用於 $x \leq L$ 。若 $x > L$ ，則式(A2)變為

$$\begin{aligned} p' &= \frac{w_p^*}{2} \int_0^t \exp[-b(t-\tau)] \phi\left(\frac{+L+x}{2\sqrt{k(t-\tau)}}\right) d\tau \\ & \quad + \frac{w_p^*}{2} \int_0^t \exp[-b(t-\tau)] \phi\left(\frac{+L-x}{2\sqrt{k(t-\tau)}}\right) d\tau \\ &= \frac{w_p^*}{2} \int_0^t \exp[-b(t-\tau)] \phi\left(\frac{x+L}{2\sqrt{k(t-\tau)}}\right) d\tau \\ & \quad - \frac{w_p^*}{2} \int_0^t \exp[-b(t-\tau)] \phi\left(\frac{x-L}{2\sqrt{k(t-\tau)}}\right) d\tau \quad (A10) \end{aligned}$$

式(A10)之積分結果相當於式(A8)減去式(A7)，但式(A7)的 $(L-x)$ 須改為 $(x-L)$ 。故

$$\begin{aligned} p' &= \frac{w_p^*}{4b} \left\{ 2e^{-bt} \left[\phi\left(\frac{x-L}{2\sqrt{kt}}\right) + \phi\left(\frac{L+x}{2\sqrt{kt}}\right) \right] \right. \\ & \quad + \exp[\sqrt{b/k}(x-L)] \left[1 - \phi\left(\frac{x-L}{2\sqrt{kt}} + \sqrt{bt}\right) \right] \\ & \quad + \exp[-\sqrt{b/k}(x-L)] \left[1 - \phi\left(\frac{x-L}{2\sqrt{kt}} - \sqrt{bt}\right) \right] \\ & \quad - \exp[\sqrt{b/k}(x+L)] \left[1 - \phi\left(\frac{x+L}{2\sqrt{kt}} + \sqrt{bt}\right) \right] \\ & \quad \left. - \exp[-\sqrt{b/k}(x+L)] \left[1 - \phi\left(\frac{x+L}{2\sqrt{kt}} - \sqrt{bt}\right) \right] \right\} \quad (A11) \end{aligned}$$

七、參考文獻

1. Amosov, S. I., "Some Problems of Heat Conductivity Connected with Electric Welding", Transaction of the Leningrad Industrial Institute, no. 4 (Section of Physics and Mathematics), pp. 39-44, 1937.
2. Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., Conduction of Heat in Solids, 2nd ed., Oxford University Press, London, pp. 353-357, 1969.
3. Daily, James W. and Harleman, Donald, R., F., Fluid Dynamics, Addison-Wesley Pub. Co., Inc. Reading, Mass., 1966.
4. Gerald, C. F. and Wheatley, P. O., Applied Numerical Analysis, Addison-Wesley Pub. Co., New York, pp. 326-328, 1992.
5. McLachlan, N. W., Bessel Functions for Engineers, Oxford University Press, London, pp. 202, 1954.
6. Polubarinova-Kochina, P. Ya., Theory of Ground Water Movement, translated from the Russian by J. M. Roger DeWiest, Princeton University Press, Princeton, N. J., pp. 550-551, 1962.

7. Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P., Numerical Recipes in Fortran, Cambridge University Press, pp. 102-104, 123-127, 1992.
8. Sowers, G. B. and Sowers, G. F., Introductory Soil Mechanics and Foundations, 1970.
9. 施清吉, 「地盤下陷與超額地下水抽取量間之關係」, 土木水利季刊, 第三卷, 第二期, pp. 1-16, 1976。
10. 施清吉, 「地盤下陷與超額地下水抽取量間關係之探討」, 經濟部水資源局, 1995。
11. 施清吉, 「地盤下陷之理論探討」, 農業工程學報, 第四十三卷, 第二期, pp. 1-10, 1997。

收稿日期：民國 87 年 4 月 15 日

修正日期：民國 87 年 6 月 10 日

接受日期：民國 87 年 6 月 23 日