

線性入滲問題於不飽和有地下水位之解析解

Analytical Solution of Infiltration Problem of Unsaturated Soil with Groundwater Level without Gravitation

國立台灣大學農業工程研究所
博士生

陳建謀

Jiann-Mou Chen

國立台灣大學農業工程研究所
碩士生

黃漢誠

Han-chen Hwang

私立中國工商專科學校土木工程科
副教授

陳主惠

Chu-Hui Chen

國立台灣大學農業工程研究所教授
暨國立台灣大學水工試驗所研究員

譚義績

Yih-Chi Tan

摘要

入滲曲線之求法傳統上可利用數值解、經驗公式及解析解，數值解會有質量平衡的問題產生誤差，有些經驗公式則是忽略臨前水文條件之影響，而前人所探討之解析解均未考慮於產生漫地流前後不同的起始條件進行求解，本文假設 Diffusivity 為常數情況下，考慮一維及二維有地下水位之情形下，針對積水前後求解 Richards equation，並以台北地區十年及一百年頻率之降雨強度下求出壤土及砂土之積水時間、入滲曲線及土壤體積含水比剖面。基本上一維及二維之結果變化趨勢相同，相同土壤其積水時間隨土壤的 D 值之增大而增大，隨降雨強度之增大而減少，隨地下水位深度之增大而增大，臨前水文條件越乾燥則積水時間越長；相同土壤於不同降雨強度下，降雨強度越小積水時間越長，但整個含水層達飽和之時間尺度則相近；而地下水位對整個含水層達飽和之時間之影響則是地下水位越深所需之時間越久。不同土壤其入滲曲線除了積水時間不一樣外，其變化則以砂土較快達入滲率為零，壤土較慢。本文二維部分之研究可供應用於模擬大樓開挖前，打入鋼版樁或連續壁施工後降雨之狀況，推估其初始積水時間及未積水前之體積含水比分佈。

關鍵詞：積水時間，入滲曲線，土壤體積含水比剖面。

ABSTRACT

Traditionally, solutions of infiltration curve have, numerical solution, experienced formula and analytical solution. Numerical solution and experienced formula may not be so correct because of mass balance and neglect the antecedent condition. Previous analytical solutions have neglected the difference of initial condition during overland flow happened and before. In this paper, we will solve one dimensional and two dimensional problems of unsaturated soil with groundwater level and assumption of constant diffusivity. Considering the differences of initial condition the Richards equation is adopted as governing equation to get the analytical solution of ponding time, infiltration curve and water content profile. The trend of results in both one dimensional and two dimensional problem are similar. For the same soil, ponding time is proportional to diffusivity, distance of ground water level and initial water content. Ponding time is inverse proportional to rainfall intensity. The time needed to get the whole aquifer saturated have similar order for same soil and initial water content with different rainfall intensity. For different soil, take sand and silty loam as examples, it takes longer time for silty loam to have the infiltration rate close to zero. The result of two dimensional problem can be applied to predict the ponding time and water content profile before ponding when foundation of a building is digging.

Keywords: Ponding time, Infiltration curve, Water content profile.

一、前言

入滲問題長久以來備受水文學家之關切，對於入滲方程式之求解可用三種方式，一為解析解，二為數值解，三為經驗公式解。解析解之求法大多利用 Richards equation 為控制方程式，考慮簡化之邊界條件及起始條件，如 Philips [1957] 利用 Boltzmann transformation 解 Richards equation，Eagleson [1970] 由 Richards equation 解出與經驗公式 Horton's equation [1940] 相近之入滲公式。Guido [1996] 採用與 Philips 相似之推導方式，利用時間變數作轉換(transform) 求出級數型式之解析解。數值解則利用控制方程式考慮邊界條件及起始條件求解，如許少華等 [1995] 採用 Crank-Nicolson 有限差分法亦求出數值解。經驗公式最著名為 Horton's infiltration equation。前述之解未曾考慮於產生漫地流前後不同的起始條件下求解。而 Celia et al. [1990] 指出數值解求解未飽和土壤中水流問題通常有會有質量平衡的

問題，造成所求之準確性降低。Horton's equation 對同一土壤而言，是一固定之入滲曲線，並未考慮土壤臨前水文條件及降雨強度均會影響入滲曲線。

本文利用 Richards equation 為控制方程式，考慮一維及二維有地下水位時降雨產生漫地流前後不同的起始條件所推導出的解析解。對於一維的問題可求出不同降雨強度及臨前水文條件下產生漫地流所需之時間(以下簡稱積水時間， tp)、含水比剖面及入滲曲線，對於二維的問題可求出地表最潮濕之處即將產生漫地流所需之時間(以下簡稱起始積水時間， $tp0$)及 $t \leq tp0$ 以前之含水比分佈圖。

二、入滲問題數學模式

2.1 一維有地下水位之入滲問題

考慮一維不飽和地下水流場如圖 2.1 所示，控制方程式採用 Richards [1931] 所推導之 Richards equation 如下：

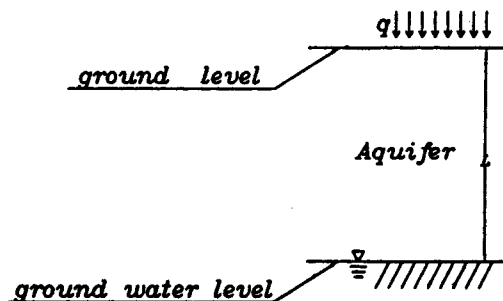


圖 2.1 一維地下水流示意圖

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} + k(\theta) \right] = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

上式中 θ 表體積含水比(水體積/土體總體積), $D(\theta) = k(\theta) \frac{\partial h}{\partial \theta}$ 為 Diffusivity, 其中 h 表水頭, $k(\theta)$ 表 z 方向之水力傳導係數。Egaleson[1970]指出, 當 $k(\theta)$ 不隨深度而變或 $\frac{\partial}{\partial z} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]$ 相對 $\frac{\partial}{\partial z} [k(\theta)]$ 而言為甚大(即 $\frac{\partial h}{\partial z} \gg 1$), 則就因次尺度(order)比較而言, (2.1) 式中 $\frac{\partial}{\partial z} [k(\theta)]$ 可忽略, 且假設 $D(\theta)$ 為常數, 則(2.1) 式可表為:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

上式之求解需配合邊界條件及起始條件, 今假設降雨發生後所產生之漫地流不會造成積水深度且可即時排除, 因此考慮此積水時間前後不同的邊界條件及起始條件分別求解如后。

2.1.1 降雨完全入滲情況($t \leq tp$)

剛開始降雨時, 雨水可完全滲入地表, 今考慮一維有限區間之入滲問題, 當未達積水之前, 即 $t \leq tp$ 時, 降雨完全滲入土壤, 未降雨前之土壤含水比為 $\phi(z)$, 則可列方程式如下:

P.D.E. $\theta_t = D\theta_{zz}, \quad 0 \leq z < L \quad \dots\dots\dots (2.3)$

B.C.S $-D\theta_z|_{z=0} = q, \quad 0 \leq t \leq tp \quad \dots\dots\dots (2.4)$

$\theta(L,t) = \theta_s, \quad 0 \leq t \leq tp \quad (2.5)$

I.C. $\theta(z,0) = \phi(z) \quad \dots\dots\dots(2.6)$

上式中 θ_t 表 θ 對時間 t 的一次微分, θ_{zz} 表 θ 對深度 z 的二次微分, L 表地下水位距地表之距離, q 表降雨強度, θ_s 表飽合之體積含水比, $\phi(z)$ 表起始含水比。

令 $\theta(z,t) = \theta_s + \frac{q}{D}(L-z) + U(z,t) \quad \dots\dots (2.7)$

將(2.7)式代入(2.3)~(2.6)式, 利用變數變換可將上列之方程式轉變成為以 $U(z,t)$ 取代 $\theta(z,t)$ 之方程式如下:

P.D.E. $U_t = DU_{zz}, \quad 0 \leq z \leq L \quad \dots\dots\dots(2.8)$

B.C.S. $U(L,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq tp \quad \dots\dots\dots(2.9)$

$U_z(0,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq tp \quad \dots\dots\dots(2.10)$

I.C. $U(z,0) = \varphi(z) \quad \dots\dots\dots(2.11)$

其中 $\varphi(z) = \phi(z) - \theta_s - \frac{q}{D}(L-z)$

(2.8)~(2.11)式利用分離變數法可解得:

$$U(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L \varphi(\bar{z}) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi\bar{z}}{2L}\right) d\bar{z} \right) e^{-\left(\frac{2n-1}{2L}\pi\right)^2 Dt} \cos\left(\frac{2n-1}{2L}\pi z\right) \quad \dots\dots\dots(2.12)$$

將(2.12)式代入(2.7)式得

$$\theta(z,t) = \theta_s + \frac{q}{D}(L-z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L \varphi(\bar{z}) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi\bar{z}}{2L}\right) d\bar{z} \right) e^{-\left(\frac{2n-1}{2L}\pi\right)^2 Dt} \cos\left(\frac{2n-1}{2L}\pi z\right) \quad \dots\dots\dots(2.13)$$

當 $z=0$, 可得地表含水比為

$$\theta(0,t) = \theta_s + \frac{q}{D}L + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L \varphi(\bar{z}) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi\bar{z}}{2L}\right) d\bar{z} \right) e^{-\left(\frac{2n-1}{2L}\pi\right)^2 Dt} \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

當 $t = tp$, $\theta(0, tp) = \theta_s$, 即

$$\theta_s = \theta_s + \frac{q}{D}L + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L \varphi(\bar{z}) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi\bar{z}}{2L}\right) d\bar{z} \right) e^{-\left(\frac{2n-1}{2L}\pi\right)^2 Dtp} \quad (2.15)$$

上式利用試誤法可求得積水時間。

2.1.2 降雨部分入滲情況 ($t \geq tp$)

當降雨經過一段時間地表開始產生漫地流時 ($t \geq tp$) , 則降雨部分滲入土壤且地表之含水比維持飽和, 此為本求解時段之邊界條件。設 $\bar{t} = t - tp$, 當 $\bar{t} = 0$ 時, 即 $t = tp$, 由上節之推導結果(2.13)式可得土壤之體積含水比如下所示, 此式可視為本求解時段之起始條件。

$$\theta(z, tp) = g(z) \quad (2.16)$$

其中

$$g(z) = \theta_s + \frac{q}{D}(L-z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L \varphi(\bar{z}) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi\bar{z}}{2L}\right) d\bar{z} \right) e^{-\left(\frac{2n-1}{2L}\pi\right)^2 Dtp} \cos\left(\frac{2n-1}{2L}\pi z\right) \quad (2.17)$$

則可列出方程式如下:

$$\text{P.D.E.} \quad \theta_{\bar{t}} = D\theta_{zz}, \quad 0 \leq z \leq L \quad (2.18)$$

$$\text{B.C.S.} \quad \theta(0, \bar{t}) = \theta_s, \quad 0 \leq \bar{t} < \infty \quad (2.19)$$

$$\theta(L, \bar{t}) = \theta_s, \quad 0 \leq \bar{t} < \infty \quad (2.20)$$

$$\text{I.C.} \quad \theta(z, \bar{t} = 0) = g(z) \quad (2.21)$$

上列方程式利用分離變數法可解得:

$$\theta(z, \bar{t}) = \theta_s + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L [g(\bar{z}) - \theta_s] \sin\left(\frac{m\pi\bar{z}}{L}\right) d\bar{z} \right) e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 D\bar{t}} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \quad (2.22)$$

將 $\bar{t} = t - tp$ 帶入上式得

$$\theta(z, t) = \theta_s + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L [g(\bar{z}) - \theta_s] \sin\left(\frac{m\pi\bar{z}}{L}\right) d\bar{z} \right) e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 D(t-tp)} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)$$

$$\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \quad (2.23)$$

綜合以上討論可得 θ 之解為:

$t \leq tp$

$$\theta(z, t) = \theta_s + \frac{q}{D}(L-z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L \varphi(\bar{z}) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi\bar{z}}{2L}\right) d\bar{z} \right) e^{-\left(\frac{2n-1}{2L}\pi\right)^2 Dt} \cos\left(\frac{2n-1}{2L}\pi z\right) \quad (2.13)$$

$t \geq tp$

$$\theta(z, t) = \theta_s + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L [g(\bar{z}) - \theta_s] \sin\left(\frac{m\pi\bar{z}}{L}\right) d\bar{z} \right) e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 D(t-tp)} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \quad (2.23)$$

定義 $f(z, t)$ 為 $-D\theta_z$, 地表入滲率為 $f(0, t)$, 則地表入滲率可求得如下:

$$t \leq tp \quad f(0, t) = q \quad (2.24)$$

$t \geq tp$

$$f(0, t) = (-D) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L [g(\bar{z}) - \theta_s] \sin\left(\frac{m\pi\bar{z}}{L}\right) d\bar{z} \right) e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 D(t-tp)} \left(\frac{m\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \quad (2.25)$$

2.2 二維有地下水位之入滲問題

考慮二維不飽和地下水流場如圖 2.2 所示, 控制方程式亦採用 Richards equation 且假設與一維之入滲問題相同, $\frac{\partial}{\partial z}[k(\theta)]$ 可忽略而 $D(\theta)$ 為常數, 則控制方程式可表為:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (2.26)$$

上式之求解需配合邊界條件及起始條件,

今假設降雨發生後所產生之漫地流不會造成積水深度且可即時排除，因此考慮此積水時間前後不同的邊界條件及起始條件分別求解如后。

2.2.1 降雨完全入滲情況($t \leq tp$)

剛開始降雨時，雨水可完全滲入地表，今考慮二維有限區間之入滲問題如圖 2.2 所示，當未達積水之前，即 $t \leq tp$ 時，降雨完全滲入土壤，未降雨前之土壤含水比為 $h(x,z)$ ，則可列方程式如下：

$$\text{P.D.E. } \theta_t = D(\theta_{xx} + \theta_{zz}), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq z \leq b \quad \dots\dots\dots (2.27)$$

$$\text{B.C.S. } -D\theta_z|_{z=0} = q, \quad 0 \leq t \leq tp \quad \dots\dots\dots (2.28)$$

$$\theta(x, b, t) = \theta_s, \quad 0 \leq t \leq tp \quad \dots\dots\dots (2.29)$$

$$\theta_x(0, z, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq tp \quad \dots\dots\dots (2.30)$$

$$\theta_x(a, z, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq tp \quad \dots\dots\dots (2.31)$$

$$\text{I.C. } \theta(x, z, 0) = h(x, z) \quad \dots\dots\dots (2.32)$$

上式中 θ_t 表 θ 對時間 t 的一次微分， θ_{xx} 表 θ 對水平方向 x 的二次微分， θ_{zz} 表 θ 對深度 z 的二次微分， a 表求解區間之水平距離， b 表地下水位距地表之距離， q 表降雨強度， $h(x, z)$ 表起始含水比。

$$\text{令 } \theta(x, z, t) = S(x, z, t) + V(x, z, t) \quad \dots\dots\dots (2.33)$$

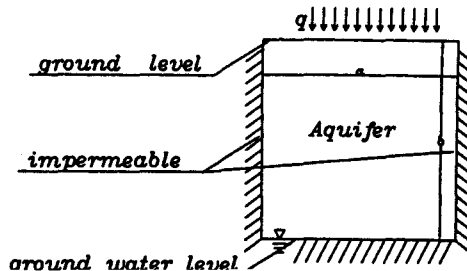


圖 2.2 二維地下水流示意圖

為使(2.27)~(2.32) 式之非齊次邊界條件之 P.D.E 轉換成齊次邊界條件之 P.D.E，假設 $S(x, z, t) = A(t) \left(1 - \frac{z}{b}\right) + B(t) \frac{z}{b} \quad \dots\dots\dots (2.34)$

將(2.33)及(2.34)兩式代入(2.27)~(2.32)式可解得：

$$A(t) = \theta_s + \frac{bq}{D}$$

$$B(t) = \theta_s$$

$$\text{則 } S(x, z, t) = \theta_s + \frac{q}{D}(b - z) \quad \dots\dots\dots (2.35)$$

同時使得 $V(x, z, t)$ 滿足下列方程式，接下來只須再求解 $V(x, z, t)$ 即可求得 $\theta(x, z, t)$ 。

$$\text{P.D.E. } V_t = D(V_{xx} + V_{zz}), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq z \leq b \quad \dots\dots\dots (2.36)$$

$$\text{B.C.S. } V_z(x, 0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq tp \quad \dots\dots\dots (2.37)$$

$$V(x, b, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq tp \quad \dots\dots\dots (2.38)$$

$$V_x(0, z, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq tp \quad \dots\dots\dots (2.39)$$

$$V_x(a, z, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq tp \quad \dots\dots\dots (2.40)$$

$$\text{I.C. } V(x, z, 0) = \eta \quad \dots\dots\dots (2.41)$$

$$\text{其中 } \eta(x, z) = h(x, z) - \theta_s + \frac{f}{D}(z - b) \quad \dots\dots\dots (2.42)$$

(2.37)~(2.41)式利用分離變數法可解得：

$$V(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_{0n}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2b}\right) e^{-\lambda_{mn}^2 Dt} \quad \dots\dots\dots (2.43)$$

$$\text{其中 } \lambda_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{(2n+1)\pi}{2b}\right)^2 \quad \dots\dots\dots (2.44)$$

A_{0n}, A_{mn} 為待定係數

利用起始條件(即(2.41)式)求待定係數 A_{0n}, A_{mn} 。

$$\text{令 } B_n(x) = \frac{A_{0n}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \dots (2.45)$$

則(2.43)式可表為：

$$V(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2b}\right) e^{-\lambda_{mn}^2 Dt} \dots (2.46)$$

將(2.46)式代入(2.41)式可得：

$$\eta(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2b}\right) e^{-\lambda_{mn}^2 Dt} \dots (2.47)$$

上式可求得：

$$B_n(x) = \frac{2}{b} \int_0^b \eta(x, z) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2b}\right) dz \dots (2.48)$$

將(2.48)式代入(2.45)式利用 Fourier 級數展開可得：

$$A_{0n}(x) = \frac{2}{a_0} \int_0^b B_n(x) dx \dots (2.49)$$

$$A_{mn}(x) = \frac{2}{a_0} \int_0^b B_n(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \dots (2.50)$$

由以上之推導可得：

$$\theta(x, z, t) = \theta_s + \frac{q}{D}(b-z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_{0n}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2b}\right) e^{-\lambda_{mn}^2 Dt} \dots (2.51)$$

其中 λ_{mn}^2 如(2.44)式所示， $A_{0n}(x)$ 及 $A_{mn}(x)$ 如(2.49)及(2.50)式所示。

當 $t = tp(x)$ ， $\theta(x, 0, tp) = \theta_s$ ，即

$$\theta_s = \theta_s + \frac{q}{D}b + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_{0n}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right) e^{-\lambda_{mn}^2 Dtp(x)} \dots (2.52)$$

上式利用試誤法可求得積水時間 $tp(x)$ ，就二維的問題而言，當起始含水比隨地表位置改變時，積水時間會隨地表位置不同而改變，因此會造成 $t \geq tp$ 之時段的起始條件為位置 x 的函數，無法再利用解析解求解。

設 $x = x_p$ ， $z = 0$ 之位置其地表起始含水比最大，令該位置發生積水之時間為 tp_0 ，代入(2.52)式可得：

$$\theta_s = \theta_s + \frac{q}{D}b + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_{0n}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x_p}{a}\right) \right) e^{-\lambda_{mn}^2 Dtp_0} \dots (2.53)$$

由(2.53)式利用試誤法可求得地表起始含水比最大之位置發生積水之時間 tp_0 ，而就本求解問題而言，(2.53)式之有效時段為 $t \leq tp_0$ ，即土壤體積含水比為：

$$t \leq tp_0$$

$$\theta(x, z, t) = \theta_s + \frac{q}{D}(b-z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_{0n}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2b}\right) e^{-\lambda_{mn}^2 Dt} \dots (2.51)$$

三、結果與討論

3.1 一維之入滲問題之結果與討論

假設起始條件為：

$$\phi(z) = c_1 z^3 + c_2 z^2 + c_3 z + \theta_r \dots (3.1)$$

其中 $c_1 = \frac{2(\theta_s - \theta_r)}{3L^3}$ ， θ_s 為 saturated

moisture content

$$c_2 = \frac{\theta_r - \theta_s}{2L^2}$$

content

$$c_3 = \frac{5(\theta_s - \theta_r)}{6L}$$

應用上節推導之結果，將(3.1)式代入(2.13)及(2.23)兩式可得 $\theta(z, t)$ 之解如下：

$$t \leq tp$$

$$\theta(z, t) = \theta_s + \frac{q}{D}(L-z) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\left(\frac{2n-1}{2L}\pi\right)^2 Dt} \cos\left(\frac{2n-1}{2L}\pi z\right) \dots (3.2)$$

其中

$$E_n = \frac{2}{L} \left[c_1 \frac{96L^4 + (48n\pi - 24\pi + \pi^3 - 6n\pi^3 + 12n^2\pi^3 - 8n^3\pi^3) 2L^4 (-1)^n}{(2n-1)^4 \pi^4} + c_2 \frac{(8 - \pi^2 + 4n\pi^2 - 4n^2\pi^2) 2L^3 (-1)^n}{(2n-1)^3 \pi^3} \right]$$

$$+ \left(c_3 + \frac{q}{D} \right) \frac{2L^2(-1)^n \pi(1-2n) - 4L^2}{(2n-1)^2 \pi^2} - \left(\theta_r - \theta_s - \frac{Lq}{D} - \frac{2L(-1)^n}{(2n-1)\pi} \right) \dots \dots \dots (3.3)$$

$$t \geq tp \quad \theta(z,t) = \theta_s + \sum_{m=1}^{\infty} F_m e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 D(t-tp)} \text{SIN}\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \dots \dots \dots (3.4)$$

$$\text{其中 } F_m = \frac{2}{L} \left[\frac{qL^2}{Dm\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\left(\frac{2n-1}{2L}\pi\right)^2 Dtp} \frac{4Lm}{(4m^2-1+4n-4n^2)\pi} \right] \dots \dots \dots (3.5)$$

同理，地表入滲率可求得如下：

$$t \leq tp \quad f(0,t) = q \dots \dots \dots (3.6)$$

$$t \geq tp \quad f(0,t) = (-D) \sum_{m=1}^{\infty} F_m e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 D(t-tp)} \left(\frac{m\pi}{L}\right) \dots \dots \dots (3.7)$$

應用上節推導之結果，首先將(3.1)式代入(2.15)式利用試誤法計算積水時間，以壤土及砂土為例，採用水利局所推導之台北市降雨強度公式[1988]，計算不同土壤之降雨強度、地下水位及臨前水文條件之積水時間列表 3.1~3.4，由表 3.1 砂土與壤土之比較可知於相同降雨強度及地下水位下土壤之積水時間砂土較長而壤土較短；由表 3.2 可知不同降雨強度下，相同土壤及地下水位下之積水時間則是降雨強度越大積水時間越短；由表 3.3 可知不同地下水位時，相同臨前水文條件的土壤及相同頻率的降雨強度，則是地下水位越深所需的積水時間越長；由表 3.4 可知不同的臨前水文條件下，相同的土壤、降雨強度及地下水位下，則是土壤越乾燥所需積水時間越長。其次利用(3.2)及(3.4)兩式計算各種土壤之土壤體積含水比剖面，利用(3.6)及(3.7)兩式計算土壤之入滲曲線。相同地下水位及臨前水文條件下，不同降雨強度下各種土壤之土壤體積含水比剖面變化如圖 3.1 ~ 3.4 所示，其對應之入滲曲線如圖 3.5 ~ 3.6 所示，綜觀其結果可知不同降雨強度下同一土壤雖然積水時間差異甚大，但其達積水時間後所需使整個含水層飽和之時間尺度卻是非常接近，而不同土壤於相同降雨強度

下達積水時間後所需使整個含水層飽和之時間，以砂土較快而壤土較慢，由此亦可得知其對應之入滲曲線呈現砂土之變化較陡而壤土則較緩和；相同降雨強度及起始條件分佈(3.1 式)，不同地下水位下砂土之體積含水比剖面變化如圖 3.1 及 3.7 所示，其對應之入滲曲線如圖 3.8 所示，由其結果可知同一土壤其地下水位對含水比剖面變化趨勢影響不大，主要差異仍為 tp 以及達積水時間後所需使整個含水層飽和之時間隨地下水位與地表距離之增加而增加；相同降雨強度及地下水位下，不同起始條件分佈(3.1 式及 $\theta(z) = 0.15$)砂土之體積含水比剖面變化如圖 3.1 及 3.9 所示，其對應之入滲曲線如圖 3.10 所示，其主要差異仍為 tp 。另外本節所使用土壤之 D 值乃參考 Rafael[1990]一書中所提之公式求其平均值所得。今將結果之驗證及討論說明如下數節。

表 3.1 十年頻率下不同土壤之積水時間

組別 參數	單位	壤土	砂土
q	cm/s	0.00036	0.00036
D	cm ² /s	0.018101	0.119444
θ_r	cm ³ /cm ³	0.15	0.15
θ_s	cm ³ /cm ³	0.25	0.25
L	cm	60	60
$\theta(z)$	cm ³ /cm ³	如(3.1)式	如(3.1)式
tp	s	957	3421

表 3.2 砂土於不同頻率下之積水時間

組別 參數	單位	十年頻率	一百年頻率
q	cm/s	0.00036	0.00082
D	cm ² /s	0.119444	0.119444
θ_r	cm ³ /cm ³	0.15	0.15
θ_s	cm ³ /cm ³	0.25	0.25
L	cm	60	60
$\theta(z)$	cm ³ /cm ³	如(3.1)式	如(3.1)式
tp	s	3421	994

表 3.3 砂土於不同地下水位下之積水時間

組別 參數	單位	砂土	砂土	砂土
q	cm/s	0.00036	0.00036	0.00036
D	cm ² /s	0.119444	0.119444	0.119444
θ_r	cm ³ /cm ³	0.15	0.15	0.15
θ_s	cm ³ /cm ³	0.25	0.25	0.25
L	cm	60	300	1000
$\theta(z)$	cm ³ /cm ³	如(3.1)式	如(3.1)式	如(3.1)式
tp	s	3421	6140	6564

表 3.4 砂土於不同臨前水文條件下之積水時間

組別 參數	單位	砂土	砂土
q	cm/s	0.00036	0.00036
D	cm ² /s	0.119444	0.119444
θ_r	cm ³ /cm ³	0.15	0.15
θ_s	cm ³ /cm ³	0.25	0.25
L	cm	60	60
$\theta(z)$	cm ³ /cm ³	如(3.1)式	$\theta(z)$ 0.15
tp	s	3421	5028

3.1.1 驗證

利用數值方法求解 2.3 式~ 2.6 式及 2.18 式~ 2.21 式與解析解比較，採用 Crank-Nicolson 有限差分法求解，今以砂土十年降雨強度下之結果進行驗證，在 $t < tp$ 之部份取 2052.6 秒，在 $t > tp$ 之部份取 10266.8 秒，今將這兩個時間的體積含水比剖面之解析解及數值解繪出如圖 3.11 所示，由圖中發現解析解及數值解之結果均非常接近。

3.1.2 積水時間

不同土壤於相同降雨條件下，其積水時間差異甚大，以台北地區十年降雨強度下之壤土及砂土為例，其結果如表 3.1 所示，積水時間以砂土較大而壤土次之。若考慮相同的土壤，則是降雨強度越大積水時間越短，以砂土為例，比較十年頻率及一百年頻率降雨強度下之積水時間，如表 3.2 所示，呈現 $(tp)_{10} > (tp)_{100}$ 之趨勢。若考慮在相同的土壤於相同頻率的降雨強度下，不同的

地下水位下，以砂土為例考慮十年降雨頻率下，比較三種不同地下水位深度下之情形如表 3.3 所示，由表中發現地下水位越深則所需之積水時間則越長，但水位越深時則差異越少。若考慮在相同的土壤於相同頻率的降雨強度下，不同的臨前水文條件則是土壤越乾燥則所需積水時間則越長，以砂土為例考慮十年降雨頻率下，比較 $\phi(z) = c_1z^3 + c_2z^2 + c_3z + 0.15$ 及 $\phi(z) = 0.15$ 之情形如表 3.4 所示，因後者之臨前水文條件較乾燥故其積水時間較長。

3.1.3 體積含水比剖面及入滲曲線

相同地下水位及臨前水文條件下，不同降雨強度下各種土壤之體積含水比剖面變化如圖 3.1~ 3.4 所示，其對應之入滲曲線如圖 3.5~ 3.6 所示，其中砂土於降雨強度十年及一百年之體積含水比剖面變化如圖 3.1~ 3.2 所示，對應之入滲曲線變化如圖 3.5 所示；壤土則如圖 3.3~ 3.4 所示，對應之入滲曲線變化如圖 3.6 所示。

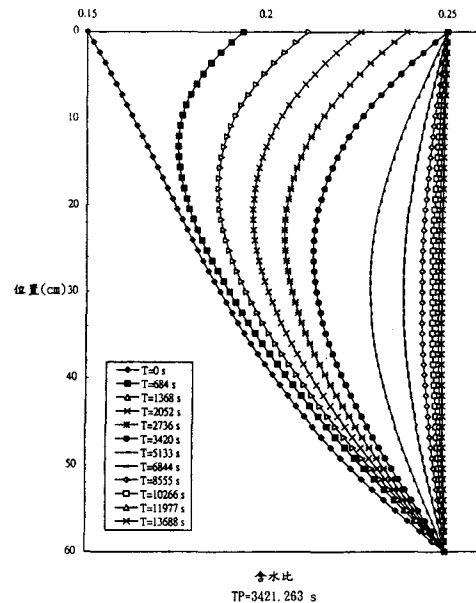


圖 3.1 砂土十年降雨強度之體積含水比剖面

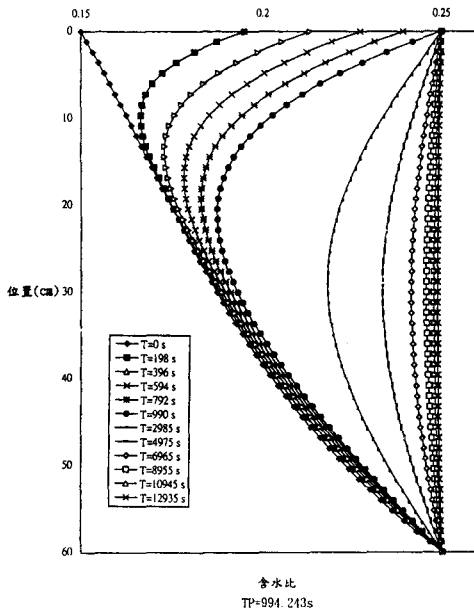


圖 3.2 砂土一百年降雨強度之體積含水比剖面

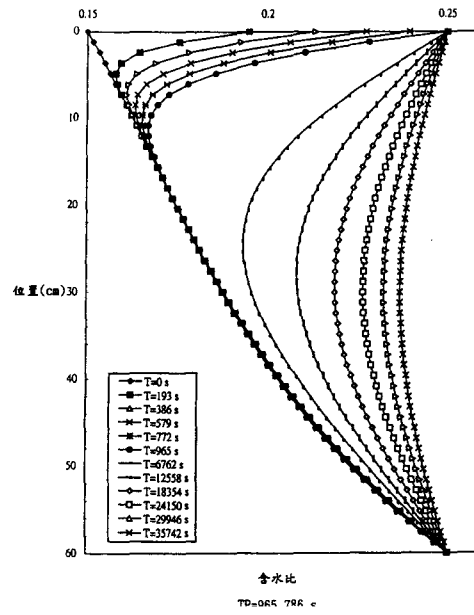


圖 3.4 壤土一百年降雨強度之體積含水比剖面

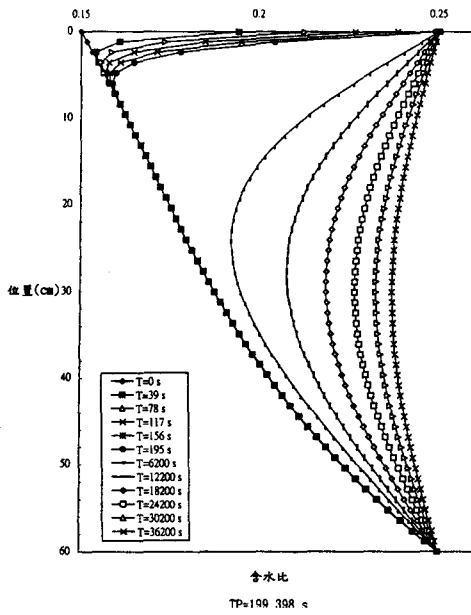


圖 3.3 壤土十年降雨強度之體積含水比剖面

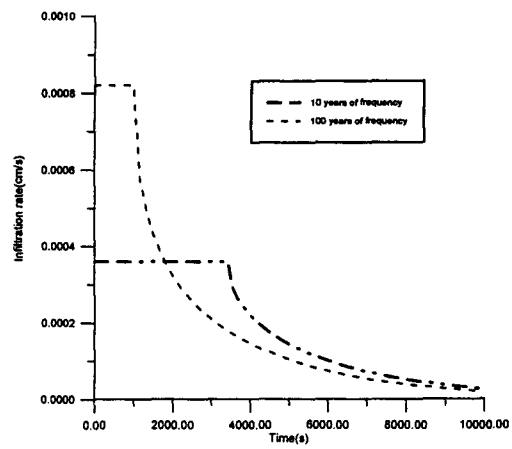


圖 3.5 砂土之入滲曲線

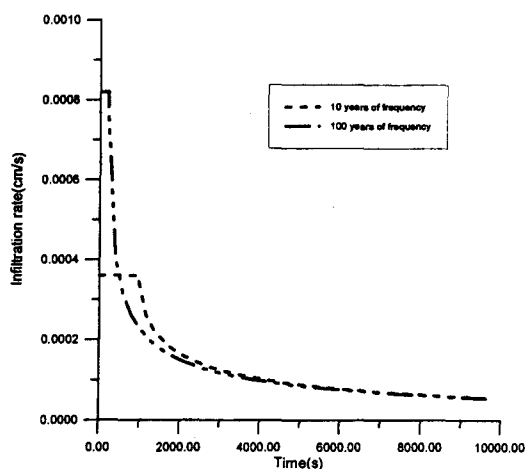


圖 3.6 壤土之入滲曲線

就其變化趨勢而言，相同土壤不同降雨強度下其體積含水比、入滲曲線之變化趨勢相近，除了積水時間差異較大外，由圖 3.1 及 3.2 亦可發現其整個土體於 13,000 秒時均非常接近飽和，不同土壤間於相同降雨強度下由於 D 值以壤土較小而砂土較大因此造成在 $t \leq t_p$ 前整個含水層砂土較接近飽和，壤土較不接近飽和，因此土壤達積水時間後所需使整個含水層飽和之時間，以砂土較快而壤土較慢，也因此而造成在 $t \geq t_p$ 後入滲曲線隨時間之變化呈現砂土較陡而壤土則較緩和。

3.1.4 地下水位

相同降雨強度下及起始條件分佈(3.1 式)，以砂土為例考慮十年降雨頻率下(其參數詳表 3.3)，於六十公分及三百公分地下水位之土壤體積含水比剖面變化如圖 3.1 及 3.7 所示，其對應之入滲曲線如圖 3.8 所示。同一土壤其積水時間隨地下水位而增大，當達積水時間後所需使整個含水層飽和之時間隨地下水位與地表距離之增加而增加且尺度差異甚大，由圖中發現地下水位距地表六十公分約費時 13,000 秒而地下水位距地表三百公分時約費時 227,000 秒。

3.1.5 起始條件

若考慮在相同的地下水位之土壤於相同頻率的降雨強度下，不同的臨前水文條件呈現土

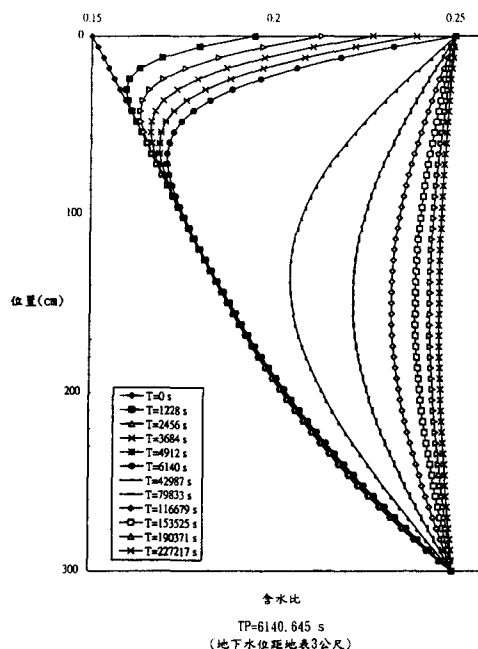


圖 3.7 砂土十年降雨強度之體積含水比剖面

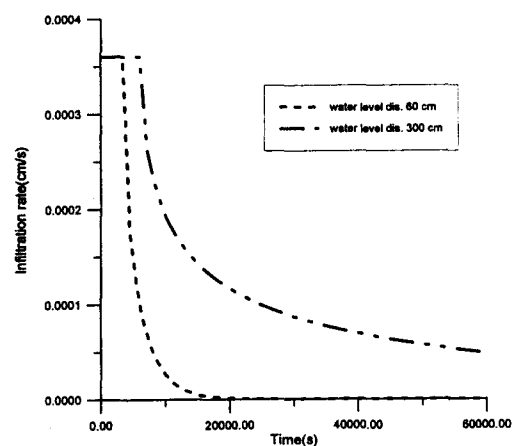


圖 3.8 壤土之入滲曲線

壤越乾燥則所需積水時間及整個含水層達飽和之時間均越長。以砂土為例考慮十年降雨頻率下(其參數詳表 3.4)，臨前水文條件為 $\phi(z) = 0.15$ 之土壤的體積含水比對時間及空間之變化則如圖

3.9 所示，入滲曲線則如圖 3.10 所示，將圖 3.1(臨前水文條件為 3.1 式)與圖 3.9 比較可知其體積含水比及入滲曲線之變化趨勢均很相似，但整個含水層達飽和之時間前者約費時 13,000 秒而後者約費時 20,000 秒。

3.2 二維入滲問題之結果與討論

為便於描述各種情況變更之起始條件，今假設起始條件為：

$$h(x, z) = \theta_a - \alpha \left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] \quad (3.8)$$

其中， $\theta_a, \alpha, x_0, z_0$ 為常數

應用上節推導之結果，將(3.8)式代入(2.49)，(2.50)及(2.51)三式可得 $\theta(x, z, t)$ 之解如下：

$$\theta(x, z, t) = \theta_s + \frac{q}{D}(b - z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_{0n}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2b}\right) e^{-\lambda_{mn}^2 Dt} \right) \quad (3.9)$$

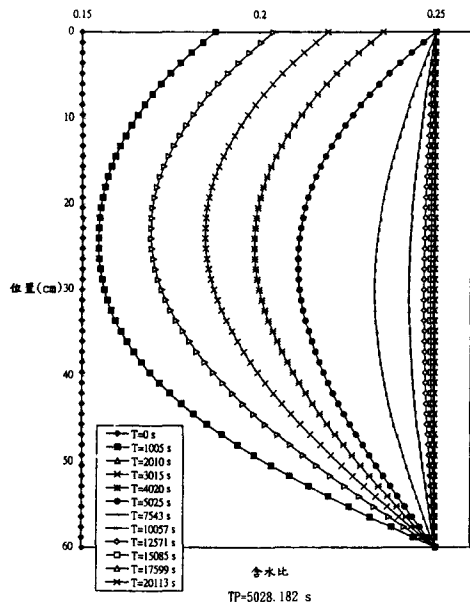


圖 3.9 砂土十年降雨強度之體積含水比剖面

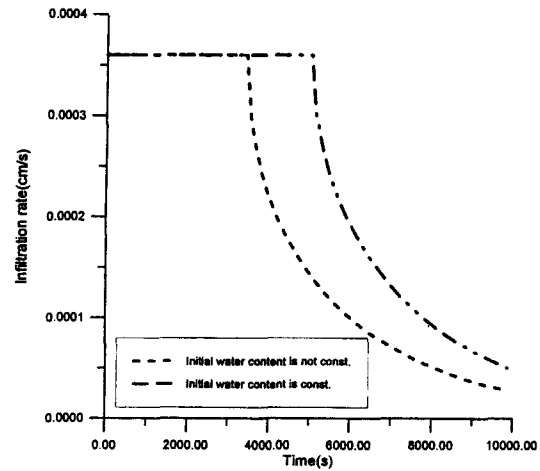


圖 3.10 砂土十年降雨強度下不同起始條件之入滲曲線

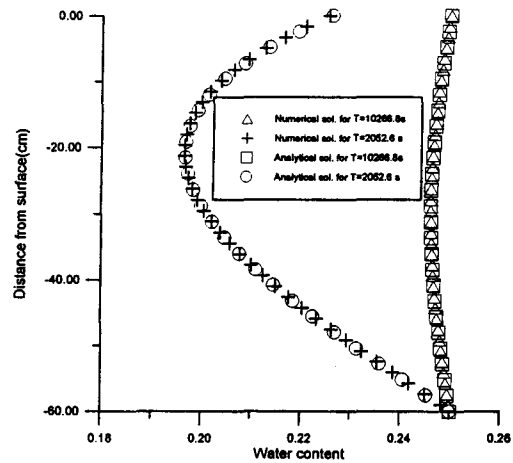


圖 3.11 砂土十年降雨強度下解析解及數值解之比較

其中

$$A_{0n} = 2k1(n) + ak2(n) + \frac{2}{3}a^2k3(n) \quad (3.10)$$

$$A_{mn} = \frac{2k2(n)a \left[(-1)^m - 1 \right] + 4k3(n)a^2(-1)^m}{m^2 \pi^2} \quad (3.11)$$

$$k1(n) = \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi} \left(\theta_a - \theta_s - \frac{qb}{D} - \alpha x_0^2 - \alpha z_0^2 \right) \quad (3.12)$$

$$k2(n) = \frac{8\alpha x_0(-1)^n}{(2n+1)\pi} \quad \dots\dots\dots (3.13)$$

$$k3(n) = \frac{-4\alpha(-1)^n}{(2n+1)\pi} \quad \dots\dots\dots (3.14)$$

應用上節推導之結果，首先將(3.8)式代入(2.53)式利用試誤法計算地表起始含水比最大之位置 $(x_p, 0)$ 的初始積水時間 $tp0$ ，以壤土及砂土為例，採用水利局所推導之台北市降雨強度公式，計算不同土壤、降雨強度、臨前水文條件及地下水位之初始積水時間 $tp0$ 列表 3.5~3.8，由表 3.5 砂土與壤土之比較可知於相同降雨強度及地下水位下土壤之初始積水時間砂土較長而壤土較短；由表 3.6 可知不同降雨強度下，相同土壤及地下水位下不同降雨強度下之初始積水時間則是降雨強度越大初始積水時間越短；由表 3.7 可知不同地下水位時，相同臨前水文條件的土壤及降雨強度下，則是地下水位越深所需的初始積水時間越長；由表 3.8 可知不同的臨前水文條件下，相同的土壤、降雨強度及地下水位，則是土壤越乾燥則所需初始積水時間越長。其次利用(3.9) ~ (3.14)式計算各種土壤之土壤體積含水比剖面。整體而言，二維之變化趨勢一維之結果相同，今以砂土為主，壤土為輔考慮相同地下水位及臨前水文條件下，不同降雨強度下不同土壤之土壤體積含水比剖面變化如圖 3.12 ~ 3.17 所示，兩種土壤之初始含水比分佈如圖 3.18 所示，綜觀其結果可知對同一土壤於各種降雨強度下其含水比分佈之變化趨勢均一致，唯不同土壤間則差異較大，砂土因其 D 值最大因此當時間接近 $tp0$ 時整個區域均很接近飽和，而壤土則是靠近地表附近較接近飽和；相同降雨強度及起始條件分佈，不同地下水位下以砂土為例之體積含水比剖面變化如圖 3.19 ~ 3.20 所示，地下水位對含水比剖面變化趨勢影響不大，其主要差異仍為

$tp0$ ；相同降雨強度及地下水位下，不同起始條件分佈以砂土為例之體積含水比剖面變化如圖 3.21 ~ 3.23 所示，起始條件分佈對含水比剖面變化趨勢影響不大，其主要差異仍為 $tp0$ 。今將結果之驗證及討論說明如下數節。

表 3.5 十年頻率下不同土壤之初始積水時間

參數 \ 組別	單位	壤土	砂土
q	cm/s	0.00036	0.00036
D	cm ² /s	0.018101	0.119444
θ_a	cm ³ /cm ³	0.25	0.25
θ_s	cm ³ /cm ³	0.25	0.25
a	cm	60	60
b	cm	60	60
α		0.000002	0.000002
x_0	cm	30	30
z_0	cm	250	250
x_p	cm	30	30
$h(x,z)$	cm ³ /cm ³	如(3.8)式	如(3.8)式
$tp0$	s	1570	5349

表 3.6 砂土於不同頻率下之初始積水時間

參數 \ 組別	單位	十年頻率	一百年頻率
q	cm/s	0.00036	0.00082
D	cm ² /s	0.119444	0.119444
θ_a	cm ³ /cm ³	0.25	0.25
θ_s	cm ³ /cm ³	0.25	0.25
a	cm	60	60
b	cm	60	60
α		0.000002	0.000002
x_0	cm	30	30
z_0	cm	250	250
x_p	cm	30	30
$h(x,z)$	cm ³ /cm ³	如(3.8)式	如(3.8)式
$tp0$	s	5349	1687

表 3.7 砂土於不同地下水位下之初始積水時間

組別 參數	單位	砂土	砂土	砂土
q	cm/s	0.00036	0.00036	0.00036
D	cm ² /s	0.119444	0.119444	0.119444
θ_a	cm ³ /cm ³	0.25	0.25	0.25
θ_s	cm ³ /cm ³	0.25	0.25	0.25
a	cm	60	60	60
b	cm	60	100	200
α		0.000002	0.000002	0.000002
x_0	cm	30	30	30
z_0	cm	250	250	250
x_p	cm	30	30	30
$h(x,z)$	cm ³ /cm ³	如(3.8)式	如(3.8)式	如(3.8)式
tp_0	s	5349	6651	6774

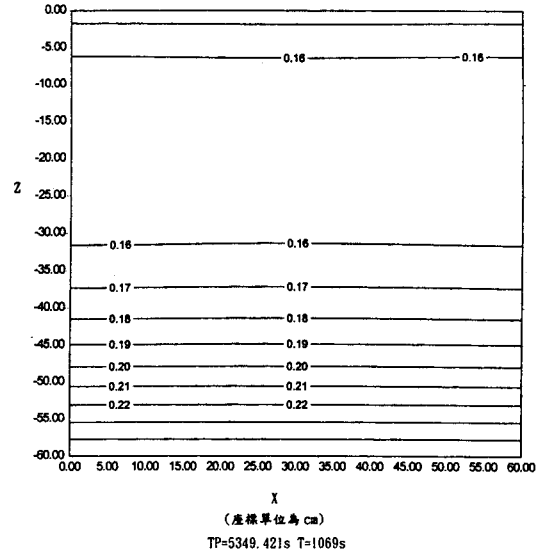


圖 3.12 砂土於十年降度下之體積含水比分佈圖

表 3.8 砂土於不同臨前水文條件下之初始積水時間

組別 參數	單位	砂土	砂土
q	cm/s	0.00036	0.00036
D	cm ² /s	0.119444	0.119444
θ_a	cm ³ /cm ³	0.25	0
θ_s	cm ³ /cm ³	0.25	0.25
a	cm	60	60
b	cm	60	60
α		0.000002	-0.000002
x_0	cm	30	30
z_0	cm	250	250
x_p	cm	30	30
$h(x,z)$	cm ³ /cm ³	如(3.8)式	如(3.8)式
tp_0	s	5349	7365

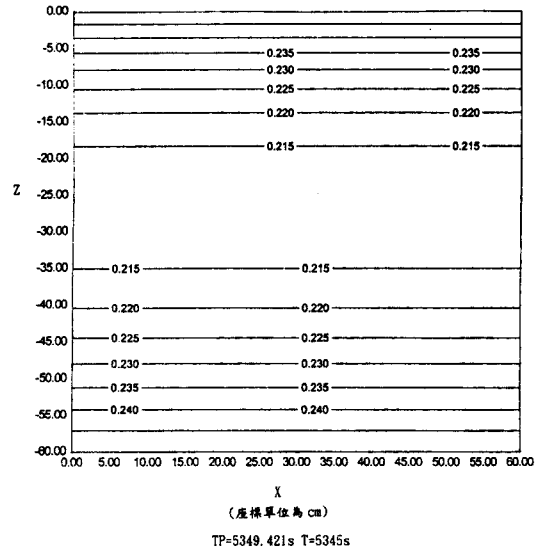


圖 3.13 砂土於十年降雨強度下之體積含水比分佈圖

3.2.1 驗證

利用數值方法求解 2.27 式~ 2.32 式與解析解比較，採用 Alternating Direction Implicit 有限差分法求解，今以砂土十年降雨強度下之結果進行驗證，在 $t < tp$ 之部份取 1069 秒，今將這此

時間的體積含水比剖面之數值解繪出如圖 3.24 所示，與圖 3.12 比較發現解析解及數值解之結果均非常接近。

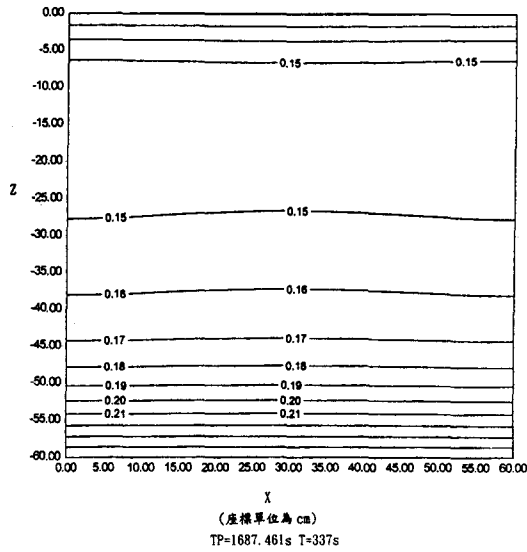


圖 3.14 砂土於一百年降雨強度下之體積含水比分布圖

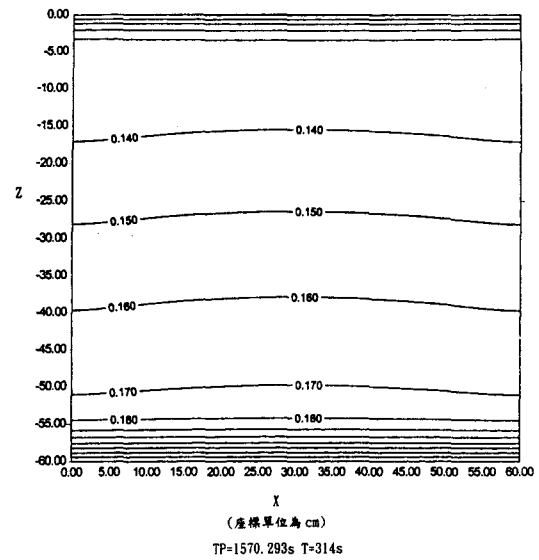


圖 3.16 壤土於十年降雨強度下之體積含水比分布圖

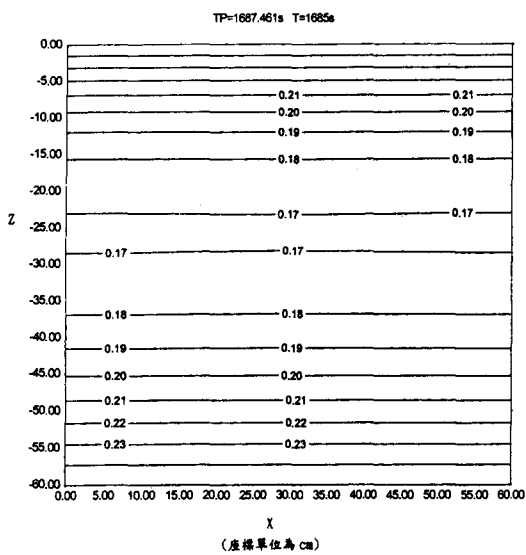


圖 3.15 砂土於一百年降雨強度下之體積含水比分布圖

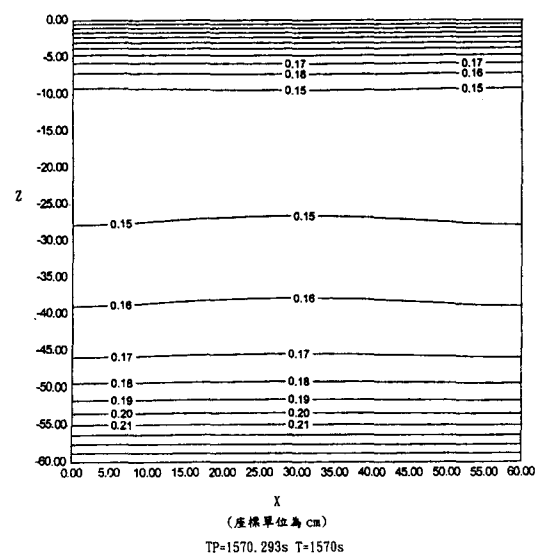


圖 3.17 壤土於十年降雨強度下之體積含水比分布圖

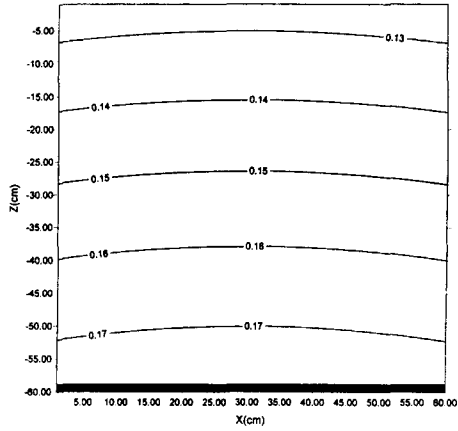


圖 3.18 土壤之初使始體積含水比分佈圖

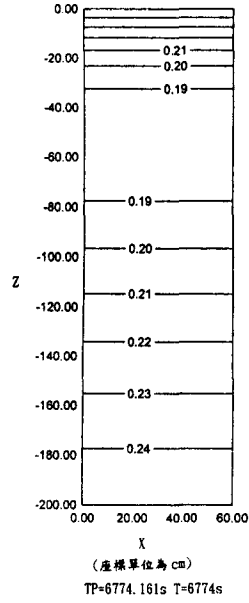


圖 3.20 砂土於十年降雨強度下之體積含水比分佈圖 (地下水位 2M)

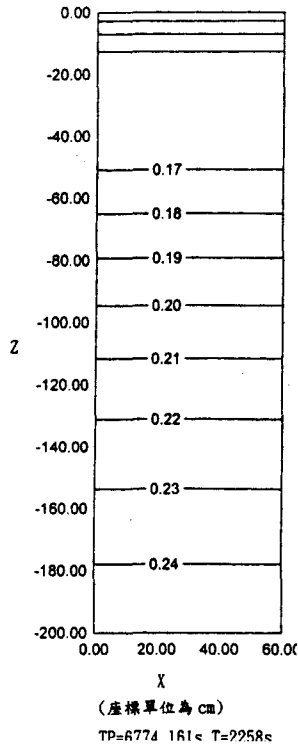


圖 3.19 砂土於十年降雨強度下之體積含水比分佈圖 (地下水位 2M)

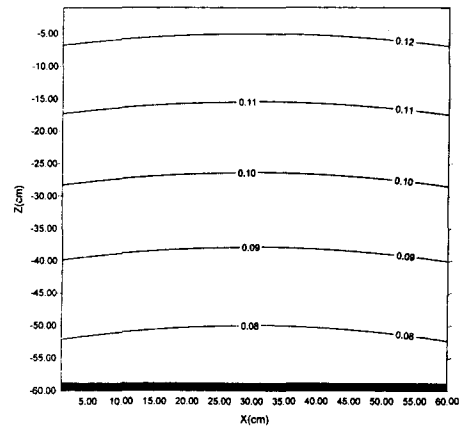


圖 3.21 不同起始條件之初使始體積含水比分佈圖

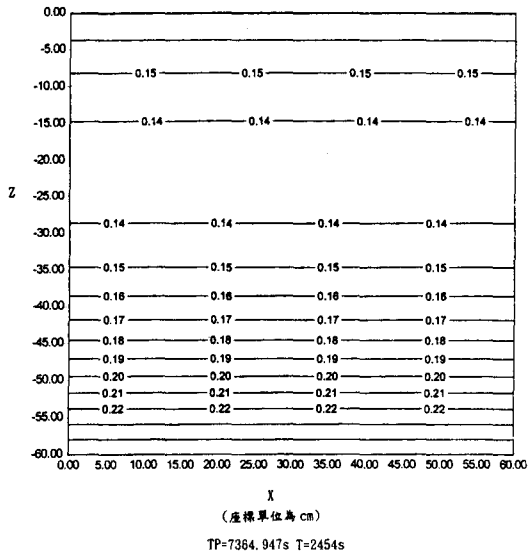


圖 3.22 砂土於十年降雨強度下之體積含水比分佈圖 (不同起始條件)

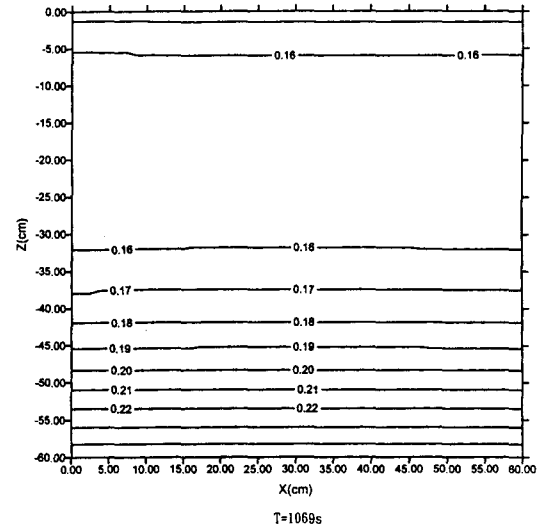


圖 3.24 砂土十年降雨強度下之體積含水比分佈圖 (數值解)

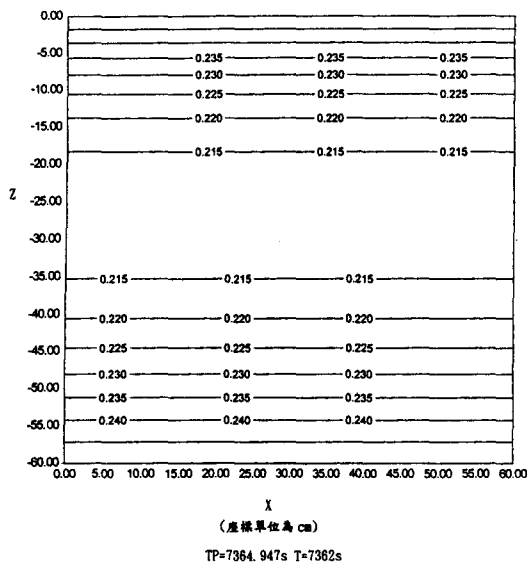


圖 3.23 砂土於十年降雨強度下之體積含水比分佈圖 (不同起始條件)

3.2.2 初始積水時間

不同土壤於相同降雨條件下，其初始積水時間差異甚大，以台北地區十年降雨強度下之壤土及砂土為例，其結果如表 3.5 所示，初始積水時間以砂土最大，壤土次之而黏土最小。若考慮相同的土壤，則是降雨強度越大積水時間越短，以砂土為例，比較十年頻率及一百年頻率降雨強度下之積水時間，如表 3.6 所示，呈現 $(tp0)_{10} > (tp0)_{100}$ 之趨勢。若考慮在相同的土壤於相同頻率的降雨強度下，不同的地下水位下，以砂土為例考慮十年降雨頻率下，比較三種不同地下水位深度下之情形如表 3.7 所示，由表中發現地下水位越深則所需之初始積水時間則越長，但水位越深時則差異越少。若考慮在相同的土壤於相同頻率的降雨強度下，不同的臨前水文條件則是土壤越乾燥則所需積水時間則越長，以砂土為例考慮十年降雨頻率下，比較起始含水比分佈如圖 3.18 及如圖 3.21 之情形如表 3.8 所示，因後者之臨前水文條件較乾燥故其初始積水時間較長。

3.2.3 體積含水比剖面

相同地下水位及臨前水文條件下，不同降雨強度下各種土壤之體積含水比剖面變化如圖 3.12 ~ 3.17 所示，其中砂土於降雨強度十年及一百年之體積含水比剖面變化如圖 3.12 ~ 3.15 所示；壤土於降雨強度十年之體積含水比剖面變化如圖 3.16 ~ 3.17 所示。就其變化趨勢而言，相同土壤的體積含水比之變化趨勢均一致，不同土壤間則略有差異，由於 D 值以壤土較小而砂土較大因此造成在 $t \leq tp_0$ 前砂土較接近飽和，而壤土較不接近飽和。

3.2.4 地下水位

相同降雨強度下及起使條件分佈(3.8 式)，以砂土為例考慮十年降雨頻率下(其參數詳表 3.7)，不同地下水位之土壤體積含水比剖面變化如圖 3.16 ~ 3.17 及 3.19 ~ 3.20 所示，就其變化趨勢而言，地下水位對含水比剖面變化趨勢影響不大，其主要差異仍為 tp_0 。

3.2.5 起始條件

若考慮在相同的地下水位之土壤於相同頻率的降雨強度下，不同的臨前水文條件呈現土壤越乾燥則所需積水時間則越長。以砂土為例考慮十年降雨頻率下(其參數詳表 3.8)，比較圖 3.18 及圖 3.21 之初始體積含水比分佈，其對應之體積含水比如圖 3.16 ~ 3.17 及圖 3.22 ~ 3.23，其體積含水比之變化趨勢均很相似，主要差異仍為 tp_0 。

四、結 論

本文假設土壤之 D 值為常數且不考慮重力影響之前提下，並假設降雨達積水時即瞬間排除，利用 Richards equation 解出土壤之含水比剖面、入滲曲線及積水時間，今將結論說明如下：

4.1 一維之入滲問題

1. 積水時間 tp 隨土壤的 D 值之增大而增大，隨降雨強度之增大而減少，隨地下水位深度之增大而增大但地下水位越深則相差越少，臨前水文條件越乾燥則積水時間越長。
2. 不同土壤之入滲曲線除了 tp 位置不一樣外，其變化則以砂土較快達入滲率為零，壤

土較慢。

3. 相同土壤於不同降雨強度下，其入滲曲線之變化趨勢均一致，唯降雨強度越小積水時間越長，但整個含水層達飽和之時間尺度則相近；而地下水位對整個含水層達飽和之時間之影響則是地下水位越深所需之時間越久。
4. 本研究方法對於起始條件並無嚴格之限制，因此相當具有變化之彈性，藉由控制起始條件之改變來模擬初始體積含水比為均勻不變或是剛降雨過後或是很久沒降雨之各種不同狀況。

4.2 二維之入滲問題

1. 初始積水時間 tp_0 隨土壤的 D 值之增大而增大，隨降雨強度之增大而減少，隨地下水位深度之增大而增大但地下水位越深則相差越少，臨前水文條件越乾燥則初始積水時間越長。
2. 對二維的問題而言，若地表面之初始含水比條件隨位置變化時則無法訂出一確切的積水時間，因積水時間隨位置均不同。
3. 同樣地，起始條件相當具有變化之彈性，可用來模擬各種不同狀況之臨前水文條件。
4. 二維部分之研究可供應用於模擬大樓開挖前，打入鋼版樁或連續壁施工後降雨之狀況，推估其初始積水時間及未積水前之體積含水比分佈。

五、誌 謝

本研究承蒙國科會(計畫編號：NSC 87-2621-P-002-036)補助研究經費，在此特致謝忱，此外感謝台大農業工程研究所劉振宇教授、廖中明教授及陳瑞昇博士之修正意見，在此一併申謝。

六、參考文獻

1. Celia, A. M., E. T. Bouloutas and R. L. Zarba, "A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation",

- Water Resource Res., Vol. 26, No.7, p.1483-1496, 1990.
2. Chow , Maidment , Applied Hydrology, Mc Graw-Hill, 1970.
 3. Eagleson P.S. Dynamic Hydrology, Mc Graw-Hill, 1970.
 4. Green, W. H., and G. A. Ampt, "Studies on soils physics, I, Flow of air and water through soils", J. Agric. Sci., 1-24, 1911.
 5. Guido D. S., "Series solution for Richards equation under concentration boundary conditions and uniform initial conditions" Water Resources Res. Vol. 32, No. 8, pp.2401-2407, 1996.
 6. Horton, R. E., "An Approach toward a Physical Interpretation of Infiltration-Capacity", Soil Sci. Soc. Am. Proc., Vol. 5, p.399-417, 1940.
 7. Philip, J. R., "The theory of infiltration, 1, The infiltration equation and its solution", Soil Sci., 84, p.345-357, 1957.
 8. Parlange, J.-Y., "The theory of water movement in soils, 2, One-dimensional infiltration", Soil Sci., 111(3), p.170-174, 1971.
 9. Parlange, J.-Y., "Water transport in soils", Annu. Rev. Fluid Mech., 12, p.77-102, 1980.
 10. Rafael L. B., Hydrology An Introduction to Hydrologic Science, Massachusetts Institute of Technology, p. 351-353 , 1990.
 11. Richards,L. A., "Capillary conduction of liquids through porous mediums", Physics, vol. 1, p.318-313, 1931.
 12. Sander,G., C.,J.-Y. Parlange, V. Kuhnel, W.L. Hogarth, D. Lock-ington, and J. P. J. O'Kane, "Exact nonlinear solution for constant flux infiltration", J.Hydrol.,vol. 97, p.341-346, 1988.
 13. 許少華, 倪春發, 洪碧方, 「 Richards 氏方程式之數值解及解析解」,逢甲學報,第二十八期,第 197-210 頁,1995 。
 14. 台灣省水利局,「台灣水文資料電腦檔應用之研究(3):台灣地區各雨量測站物部公式之適用性研究」,第 71-81 頁,1988 。

收稿日期：民國 87 年 3 月 3 日

修正日期：民國 87 年 5 月 6 日

接受日期：民國 87 年 5 月 19 日