農業工程學報　第 44 卷第 2 期
中華民國 87 年 6 月出版

Journal of Chinese Agricultural Engineering
Vol. 44, No. 2, June 1998

流域降雨-逕流串聯集塊模式序率微分方程理論分析

The Analysis of Stochastic Lumped Rainfall-Runoff Model for Watershed in Series

國立台灣大學農業工程學研究所博士班研究生
李繼尊
Ji-Tsun Lee

私立中國工商專科學校土木工程科副教授
陳主惠
Chu-Hui Chen

國立台灣大學農業工程學系教授兼水工試驗所研發組長
譚義績
Yih-Chi Tan

摘　要

本文目的在建立流域降雨—逕流串聯集塊序率微分方程模式，主要重點在於將流域中每一流量站控制的面積視爲一次流域，每一次流域即爲一集塊系統，各有其降雨輸入及流量輸出，而一個次流域流量輸出亦可能爲另一次流域之輸入，以次流域串聯情況爲例，說明整個流域降雨-逕流模擬機構；同時，對於水文系統輸出輸入之不確定性，將以包含平均項及隨機項的變數帶入模式中，轉換成序率微分方程式，再利用序率微分方程式理論及拉普拉司轉換求出各次流域出流量序率歷程，並推演第二階動差歷程，以模擬出具有隨機性質之出流量。

關鍵詞：步階函數，序率微分方程式，拉普拉司轉換。

ABSTRACT

The purpose of this paper is to establish a stochastic differential equations of lumped rainfall-runoff model for a watershed in series that is consisted of a number of sub-watersheds, The arrangement of the sub-watersheds and their inter-connections will also be a series structure. Each modeled sub-watershed unit is composed of two elements-one for converting rainfll excess on the sub-watershed area into outflow at the sub-watershed outlet and the other is converted outflow of the sub-watershed into inflow at another sub-watershed inlet. The measured data of rainfall excess with random variables was input to the rainfall-runoff model and develop the moment equations of simulated outflow is based on stochastic differential equation. The Laplace transform of rainfall excess was taken and substituted into the watershed system equation to obtain the Laplace transform of the outflow hydrograph of the watershed.

Keywords: Unit step function, Stochastic differential equation, Laplace transform.

一、前言

Sherman (1932)提出單位歷線之理論後，集塊(Lumped)降雨-逕流模式就被廣泛應用於流域降雨-逕流過程之模擬。以集塊降雨-逕流模式分析流域之降雨-逕流過程時，通常假設流域之降雨輸入在某特定時間是空間的平均值，亦即模式之降雨輸入值在已知之任一瞬間均等於整個流域在某特定時刻之平均降雨強度;這種假設在很小的流域是合理的，但是在中型或大型流域中，因爲流域形狀、降雨類型、地貌變化等因素的影響，使得集塊系統模擬輸出的流量，產生誤差。嚴格而言，任一雨量站所收集的資料，僅能代表該空間點或附近某範圍內的降雨特性並不能夠代表整個地區的降雨情形(鄭克聲等， 1997)。同時，因爲流域複雜的氣象、水文因素及地文因子，使得降雨-逕流過程的模擬，具有不確定性。爲了使集塊降雨-逕流模式亦能應用於中型或大型流域中， Dooge (1959)首先提出地表逕流之流動架構以多個不同之線性水庫及線性渠道組成多個不同核胞元件之半分布模式(Semi-Distributed Model)，模式中以不同之線性水庫有不同之輸入，並將各核胞元件串聯作線性系統演算。隨後，有些學者亦致力於半分布模式之發展(Laurenson, 1964; Boyd, 1978, 1981; Diskin and Simpson, 1978; Diskin, 1994)，建立了許多降雨-逕流系統空間分布模式，王如意等（ 1994 ）更以區域化變數理論及區塊克利金法（ Block Kriging Method ）估算平均雨量，並結合含分佈概念之多層核胞模式（ Manifold Cell Model ），進行降雨-逕流模式之研析。上述之模式均以數值褶合（ Numerical Convolution ）進行一核胞或次流域輸入及輸出之轉換； Guang-Te Wang and Shulin Chen （ 1996 ）將流域分割成多個假設超滲降雨及地表情況近似均勻之次流域，以質量守恆及貯蓄量-出流量方程式推導出每一個次流域輸入、輸出關係之常微分方程；一個次流域之輸出可能成爲另一個次流域之輸入或兩個以上次流域之輸出共同成爲另一個次流域之輸入，以此種方式構成整體流域之常微分方程式，並將每一個次流域之超滲降雨以步階函數表示代入常微分方程式中，以 Laplace 轉換及反 Laplace 轉換求得流域輸出流量之解析解。

流域又常因氣象水文因素及地文因子之擾動，往往使得降雨-逕流模式之輸入量不容易獲得確定的估算，進而造成水文系統輸出呈現不確定性，亦即有隨機的成分存在，爲了使模式的模擬及預測，更臻準確，實有必要考量以序率觀點探討流域水文系統輸出輸入的序率性。序率微分方程式是研究序率過程的方法之一，其理論可提供於處理白噪音之積分問題，而且，其於控制、濾波或通訊領域中已有完善的發展（如 Soon, 1973; Schuss 1980; Jazwinski, 1970 等）。就序率微分方程式於降雨-逕流之研究而言， Unny and Karmeshu (1984)最先考量概念線性水庫之輸入具序率性，引用序率微分方程式於解析研究上；之後 Unny (1984)提出相隨的數值模式;Bodo and Unny (1987)又將其延伸到 n 個串連線性水庫之輸入具序率性的解析研究上。另外， Unny (1987)又曾探討非線性水文系統降雨-逕流模式之降雨量具序率性之研究，但只限於理論上之推導，林國峰等（ 1995 ）將線性水文系統降雨-逕流序率微分方程模式應用於實際流域降雨-逕流之模擬，以數值方法求得序率微分方程之近似解。

本研究之理論分析，主要重點在於將流域中每一流量站控制的面積視爲一次流域（ Subwatershed ），每一次流域即爲一集塊系統，各有其降雨輸入及流量輸出，而其流量輸出亦可能爲另一次流域之輸入，如此，由多個不同的次流域串聯或並聯即構成整個流域降雨-逕流

的模擬機構；同時，爲了使模式的模擬及預測更臻準確，對於水文系統輸出輸入之不確定性，將以包含平均項及隨機項形式的變數帶入模式中，轉換成序率微分方程式（ Stochastic Differential equations ），再利用序率微分方程式理論（ Soong, 1973 ）求出各次流域出流量序率歷程，並推演第二階動差歷程，以便模擬出具有隨機性質之出流量，並以統計學中可信賴區間的觀念，提供具統計意義的出流量，作爲未來水資源管理及開發時的依據。

二、降雨-逕流串聯集塊模式

一流域中常因地形變化而在局部有不同之水文及地文特性，若流域中各流量站之位置是根據流域中局部不同之水文及地文特性設置，則各流量站所控制之範圍可視爲一次流域，從質量守衡的觀點，可以一水平衡模式對此水文系統進行模擬，亦即此一次流域之進流量與出流量之差值，等於次流域概念貯蓄量之變化率，以微分方程表示爲：

$$\frac{dS}{dt}=I-Q \quad (1)$$

S ：次流域單位面積概念貯蓄量[L]

I ：次流域之單位面積輸入量（進流量或有效降雨量）[L/T]

Q ：次流域之單位面積出流量[L/T]

假設次流域之出流量與次流域概念貯蓄量成線性比例關係，即：

$$S=KQ \quad (2)$$

K ：特性參數[T]

將(2)式代入(1)式，則得下式：

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{1}{K}(I-Q) \quad (3)$$

因流域中設有多個流量站，每個流量站控制的範圍彼此相鄰，亦即可將流域分割成數個相鄰的次流域，又假設每個次流域的入流量只從次流域上游一個點流進及出流量只從次流域下游一個點流出，那麼數個次流域即能以串聯的方式構成整個流域降雨-逕流進行之模式(如圖 1 所示)。

現以 n 個次流域串聯的模式，說明本研究的分析方法(如圖 2 所示)。由圖 2 及方程式(3):

$$\frac{dQ_1}{dt}=\frac{1}{K_1}(I_1-Q_1) \quad (4)$$

$$\frac{dQ_2}{dt}=\frac{1}{K_2}(I_2-Q_2) \quad (5)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dQ_n}{dt}=\frac{1}{K_n}(I_n-Q_n) \quad (6)$$

又次流域 1 之輸入量只有有效降雨 P_1，次流域 2 之輸入量則包括有效降雨 P_2 及次流域 1 之出流量 Q_1 ，而次流域 3 之輸入量則包括有效降雨 P_3 及次流域 2 之出流量 Q_2 ，同理，次流域 n 之輸入量則包括有效降雨 P_n 及次流域 n-1 之出流量 Q_{n-1} 即：

$$I_1=P_1 \quad (7)$$

$$I_2=P_2+Q_1 \quad (8)$$

$$\vdots$$

$$I_n=P_n+Q_{n-1} \quad (9)$$

將(7)至(9)式代入(4)至(6)式中，則得：

$$\frac{dQ_1}{dt}=\frac{1}{K_1}(P_1-Q_1) \quad (10)$$

$$\frac{dQ_2}{dt}=\frac{1}{K_2}(P_2+Q_1-Q_2) \quad (11)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dQ_n}{dt}=\frac{1}{K_n}(P_n+Q_{n-1}-Q_n) \quad (12)$$

(10)至(12)式即爲降雨-逕流串聯集塊模式。

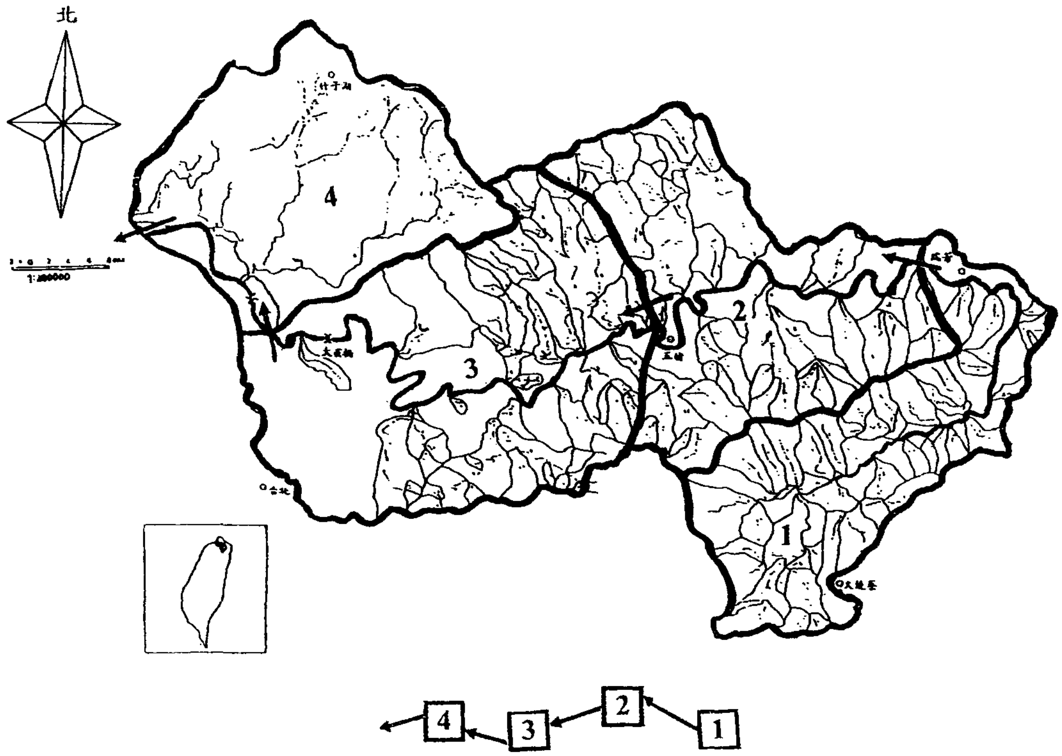

圖 1　流域及各次流域進流和出流示意圖

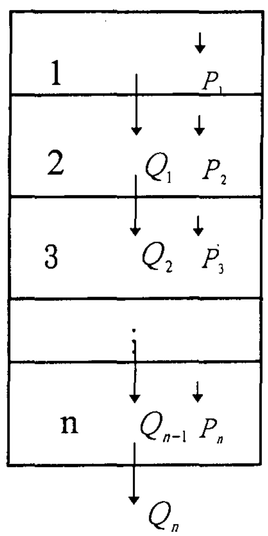

圖 2　次流域串聯模式示意圖

三、序率微分方程

流域複雜的氣象水文因素及地文因子往往使得水平衡模式之輸入量不容易獲得確定的估算，進而造成水文系統輸出呈現不確定性，因此為反應此一序率性，本研究將(10)至(12)式中之降雨量視為隨機變數，此一隨機變數為一定率部份平均量 $\overline{P}_1$、$\overline{P}_2$、…、$\overline{P}_n$ 與一序率部份之擾動量 P_1'、P_2'、…、P_n' 之組合，如下式所示：

$$P_1 = \overline{P_1} + P_1' \quad \text{........................(13)}$$

$$P_2 = \overline{P_2} + P_2' \quad \text{........................(14)}$$

$$\vdots$$

$$P_n = \overline{P_n} + P_n' \quad \text{........................(15)}$$

將(13)至(15)式代入(10)至(12)式：

$$\frac{dQ_1}{dt}=\frac{1}{K_1}(\overline{P}_1-Q_1)+\frac{1}{K_1}\ P_1' \text{ .... (16)}$$

$$\frac{dQ_2}{dt}=\frac{1}{K_2}(\overline{P_2}+Q_1-Q_2)+\frac{1}{K_2}\ P_2' \text{ ...... (17)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dQ_n}{dt}=\frac{1}{K_n}(\overline{P_n}+Q_{n-1}-Q_n)+\frac{1}{K_n}\ P_n' \text{ .... (18)}$$

以矩陣形式表示爲：

$$\begin{bmatrix}\frac{dQ_1}{dt}\\ \vdots\\ \frac{dQ_n}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{K_1}(\overline{P_1}-Q_1)\\ \vdots\\ \frac{1}{K_n}(\overline{P_n}+Q_{n-1}-Q_n)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{K_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \frac{1}{K_n}\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}P_1'\\ \vdots\\ P_n'\end{bmatrix}$$

爲使上式中 P_1'、P_2'、…、P_n' 序率部份之處理，能適用於實際，並使方程式(16)至(18)式容易求解，可將 P_1'、P_2'、…、P_n' 序率部份視爲波譜結構平坦之白噪音過程(White Noise Process)；再者，上述不確定量乃是水文量受到環境中眾多因素擾動所引起之結果，根據中央極限定理，其所有擾動的效果均遵守高斯定律。因此，上述序率部份可視爲符合高斯分佈且均值爲零之白噪音過程，如此的白噪音過程 W(t)可表示如下（T.E. Unny, 1984）：

$$E\left[W(t)\right]=0 \text{ .... (19)}$$

$$E\left[W(t)W^T(t-\tau)\right]=D\delta(\tau) \text{ .... (20)}$$

其中 $W(t)$定義爲 $\begin{bmatrix}P_1'\\ \vdots\\ P_n'\end{bmatrix}$，$\delta$（$\tau$）爲 Dirac delta function，$D$ 則被定義爲 $D=\begin{bmatrix}\sigma_{P_1'}^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \sigma_{P_n'}^2\end{bmatrix}$，$\sigma_{P_1'}^2$、…、$\sigma_{P_n'}^2$ 表示 P_1'、…、P_n' 之變方。

因爲白噪音 $W(t)$並不是時間 t 的普通函數，而在型式上，白噪音是可用在 dt 時間內具有獨立增量 dB 之布朗運動過程(Brownian motion process)之時間導數來近似，至於布朗運動過程可描述如下：

$$E\left[dB(t)\right]=\left[0\right] \text{ ....(21)}$$

$$E\left[dB(t)dB^T(t)\right]=\vec{D}dt \text{ ....(22)}$$

其中 $dB^T(t)=W^T(t)dt=\left[P_1' \ \cdots \ P_n'\right]dt$

因此布朗運動過程與白噪音過程之關係爲：

$$\frac{dB(t)}{dt}=W(t) \text{ ....(23)}$$

將(16)至(18)式重新改寫爲：

$$dQ=F(Q,t)dt+G(Q,t)dB(t) \text{ ....(24)}$$

$$dQ=\begin{bmatrix}\frac{dQ_1}{dt}\\ \vdots\\ \frac{dQ_n}{dt}\end{bmatrix}, \quad F(Q,t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{K_1}(\overline{P_1}-Q_1)\\ \vdots\\ \frac{1}{K_n}(\overline{P_n}+Q_{n-1}-Q_n)\end{bmatrix},$$

$$G(Q,t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{K_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \frac{1}{K_n}\end{bmatrix}, \quad dB(t)=\begin{bmatrix}P_1'\\ \vdots\\ P_n'\end{bmatrix}dt$$

因此，(24)式便爲描述線性水文系統之序率微分方程模式。

(24)式的通解可以表示如下：

$$Q(t)=Q_0+\int_0^t F(Q(\tau),\tau)d\tau+\int_0^t G(Q(\tau),\tau)dB(\tau)$$

$$\text{..................................(25)}$$

其中 Q_n 爲起始條件 t=0 時之 Q 值。上式右邊第二式是均方黎曼積分（Mean square Rieman integral），第三式則爲所謂序率積分（Stochastic integral）。對於該序率積分之定義，能以 Riemann-Stieltijes 和的極限表示（圖 3）：

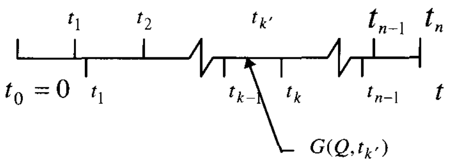

圖 3　序率積分之定義(T.E. Unny, 1984)

$$\int_0^t G(Q(\tau),\tau)dB(\tau) = \underset{\substack{n\to\infty \\ \Delta_n \to 0}}{l.i.m}\ I_n \quad \text{..............} (26)$$

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} G(Q,t_{k'})\left(B(t_k) - B(t_{k-1})\right)$$

$$\Delta_n = \underset{k}{MAX}\left(t_k - t_{k-1}\right)$$

$l.i.m$ 表示均方極限（ Mean Square Limit ）

由於布朗運動過程不規則的特性，(26)式的極限值將因被積函數 $G(Q,\ t_{k'})$在區間$(t_{k-1},\ t_k)$ 內估算點位置的不同而不同。由上述序率積分的定義，一般對於序率積分的計算可有兩種方式，其一爲伊藤積分(It$\hat{o}$ integral)，另一爲 Stratonovich 積分(Wong and Zakai, 1965; Ariaratnam and Graefe, 1965; Stratonovich, 1967; Jazwinski, 1970; Arnold, 1974)。就伊藤積分而言，被積函數 $G(Q,\ t_{k'})$在區間$(t_{k-1},\ t_k)$內估算點的位置，位於時間點 t_{k-1} 上，被積函數 $G(Q,\ t_{k'})$與布朗運動過程增量 $B(t_k)-B(t_{k-1})$相互獨立，故伊藤序率積分之期望值爲零；而 Stratonovich 積分則不爲相互獨立，兩種積分如(圖 4)所示。在(19)式中 $G(Q,\ t_{k'})$之估算與流域概念貯蓄量有關，而概念貯蓄量又與有效降雨有關，故有效降雨的序率部份在 dt 時間內的積分 $dB(t)$與 $G(Q,\ t_{k'})$不應完全相互獨立，故應視爲 Stratonovich 序率積分較爲合理(林國峰、王育民， 1995)。然而，伊藤序率積分與 Stratonovich 序率積分有下述之關係(Wong and Zakai, 1965; Stratonovich, 1967)：

$$\underset{\text{Stratonovich}}{\underset{\uparrow}{\int_0^t G(Q,t)d\bar{B}(t)}} = \underset{\text{Riemann}}{\underset{\uparrow}{\int_0^t G(Q,t)Q(t)\frac{\partial G^T(Q,t)}{\partial Q}dt}} + \underset{\text{Itô}}{\underset{\uparrow}{\int_0^t G(Q,t)dB(t)}} \quad (27)$$

因爲本文中 $G(Q,\ t_{k'})$是一常數矩陣，使得 $\dfrac{\partial G^T(Q,t)}{\partial Q}$ 爲零，故在本文中之序率積分仍以伊藤積分表示。

基本上，(25)式是屬於線性伊藤微分方程式的解，在預期上應爲時變性，以實用觀點，求取 $Q(t)$之第一、二階動差往往已能滿足一般應用的需求。

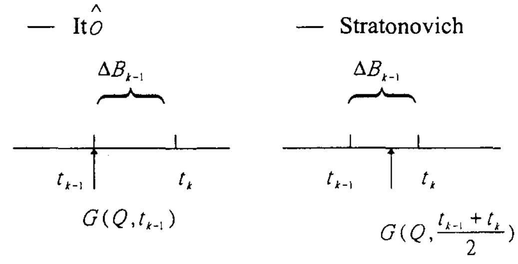

圖 4 It$\hat{o}$ 積分及 Stratonovich 積分(T.E. Unny, 1984)

四、動差方程式

考慮一實函數$\phi\ (\zeta(t),t)$（ Soong, 1973 ），其定義如下：

$$\phi(Q(t),t) = \prod_{i=1}^{N} Q^{a_i}(t)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = m$$

其中a_i爲常數，m爲動差階數，N爲變數個數。假設該函數對 t 爲連續且可微分，同時$\phi(Q\ (t),t)$對於 $Q\ (t)$存在連續兩階偏導數，則在微量時間δt內，$\phi(Q\ (t),t)$的微量變化$\delta\phi(Q,t)$可寫爲：

$$\delta\phi(Q,t) = \phi(Q+\delta Q, t+\delta t) - \phi(Q,t) \quad \text{......}(29)$$

若對做$\delta\phi(Q,t)$泰勒展開，則可得：

$$\delta\phi = \sum_{j=1}^{n}\delta Q_j \frac{\partial\phi}{\partial Q_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\delta Q_i\delta Q_j \frac{\partial^2\phi}{\partial Q_i \partial Q_j} + \delta t\frac{\partial\phi}{\partial t} + o(\delta Q\delta Q^T) + o(\delta t) \quad \text{..................................}(30)$$

其中 $o(\delta Q\delta Q^T)$ 與 $o(\delta t)$ 分別表示δQ 與$\delta\ t$ 之微量高次項。另外，對於(24)式之伊藤微分方程式可取 $\delta Q(t)$ 與 $\delta Q(t)\delta Q^T(t)$ 之期望值：

$$E\left[\delta Q_j(t)\middle|Q\right] = F_j(Q,t)\delta t + o\left(\delta t\right) \quad \text{.........}(31)$$

$$E\left[\delta Q_i(t)\delta Q_j(t)\middle|Q\right] = 2(GDG^T)_{ij}\delta t + o\left(\delta t\right) \quad \text{..}(32)$$

對(30)式取在給於 Q 時之條件期望值 $E\left[\delta\phi\middle|Q\right]$，並將(31)式與(32)式代入，可得如下：

$$E\left[\delta\phi \middle| Q\right]=\sum_{j=1}^{N} F_j(Q,t)\left(\frac{\partial\phi}{\partial Q_j}\right)\delta t+\sum_{i,j=1}^{N}\left(GDG^T\right)_{ij}\frac{\partial^2\phi}{\partial Q_i \partial Q_j}\delta t$$
$$+\frac{\partial\phi}{\partial t}\delta t+o(\delta t) \quad \text{.................................} (33)$$

由於 $E\left[\delta\phi \middle| Q\right]$ 仍爲一隨機變數，因此再對上式取期望值，可得 $\delta\phi(Q,t)$ 之期望值如下：

$$E[\delta\phi]=E\left[E\left[\delta\phi \middle| Q\right]\right]=\sum_{j=1}^{N} E\left[F_j(Q,t)\frac{\partial\phi}{\partial Q_j}\right]\delta t$$
$$+\sum_{i,j=1}^{N} E\left[\left(GDG^T\right)_{ij}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial Q_i \partial Q_j}\right)\right]\delta t$$
$$+E\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]\delta t+o(\delta t) \quad \text{................} (34)$$

再將上式除以 δt，並使 $\delta t \to 0$，則可得如下之微分方程式：

$$\frac{dE[\phi]}{dt}=\sum_{j=1}^{N} E\left[F_j\frac{\partial\phi}{\partial Q_j}\right]+\sum_{i,j=1}^{N} E\left[\left(GDG^T\right)_{ij}\frac{\partial^2\phi}{\partial Q_i \partial Q_j}\right]+E\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}\right] \quad (35)$$

將(28)式代入(35)，則上式爲 a_i 階動差之微分方程式。

五、動差方程式之求解

關於降雨-逕流串聯模式動差方程式之求解，現以圖二爲例來說明。因爲有 n 個次流域，其出流量分別爲 Q_1、…、Q_n，首先就各次流域特性參數 K 均相同時（即 $K_1=K_2=\cdots=K_n$）之第一動差而言：

在(28)式中，N=n，$\sum_{i=1}^{n} a_i=1$，$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，

$\phi(Q(t),t)=Q_1^{a_1}Q_2^{a_2}\cdots Q_n^{a_n}$

當 $a_1=1$，$a_2=\cdots=a_n=0$ 時，$\phi(Q(t),t)=Q_1$

當 $a_2=1$，$a_1=\cdots=a_n=0$ 時，$\phi(Q(t),t)=Q_2$

⋮

當 $a_n=1$，$a_1=\cdots=a_{n-1}=0$ 時，$\phi(Q(t),t)=Q_n$

代入(35)式，得各次流域之第一動差微分方程式爲：

$$\frac{dE[Q_1]}{dt}=\frac{1}{K}\overline{P}_1-\frac{1}{K}E[Q_1]$$

$$E[Q_1]=\frac{1}{\left(D+\frac{1}{K}\right)}\frac{\overline{P}_1}{K} \quad \text{.................} (36)$$

$$\frac{dE[Q_2]}{dt}=\frac{1}{K}\overline{P}_2+\frac{1}{K}E[Q_1]-\frac{1}{K}E[Q_2]$$

$$E[Q_2]=\frac{1}{\left(D+\frac{1}{K}\right)^2}\frac{\overline{P}_1}{K^2}+\frac{1}{\left(D+\frac{1}{K}\right)}\frac{\overline{P}_2}{K} \quad \text{......................} (37)$$

⋮

$$E[Q_n]=\frac{1}{\left(D+\frac{1}{K}\right)^n}\frac{\overline{P}_1}{K^n}+\frac{1}{\left(D+\frac{1}{K}\right)^{n-1}}\frac{\overline{P}_2}{K^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{\left(D+\frac{1}{K}\right)}\frac{\overline{P}_n}{K}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(D+\frac{1}{K}\right)^j}\frac{\overline{P}_{n-j+1}}{K^j} \quad \text{.................................} (38)$$

其中 D 爲微分運算子 $\frac{d(\ )}{dt}$

同理，可得各次流域之第二動差微分方程式爲：

$$\frac{dE[Q_1^2]}{dt}=\frac{2\overline{P}_1}{K}E[Q_1]-\frac{2}{K}E[Q_1^2]+\frac{2\sigma_{P_1'}^2}{K^2}$$

$$E[Q_1^2]=\frac{1}{\left(D+\frac{2}{K}\right)\left(D+\frac{1}{K}\right)}\frac{2\overline{P}_1^2}{K^2}+\frac{1}{\left(D+\frac{2}{K}\right)}\frac{2\sigma_{P_1'}^2}{K^2} \quad \text{........} (39)$$

$$\frac{dE[Q_2^2]}{dt}=\frac{2\overline{P}_2}{K}E[Q_2]+\frac{2}{K}E[Q_1Q_2]-\frac{2}{K}E[Q_2^2]+\frac{2\sigma_{P_2'}^2}{K^2}$$

$$E[Q_2^2]=\left[\frac{2}{\left(D+\frac{2}{K}\right)^3\left(D+\frac{1}{K}\right)}+\frac{1}{\left(D+\frac{2}{K}\right)^2\left(D+\frac{1}{K}\right)^2}\right]\frac{2\overline{P}_1^2}{K^4}+\left[\frac{2}{\left(D+\frac{2}{K}\right)^2\left(D+\frac{1}{K}\right)}+\frac{1}{\left(D+\frac{2}{K}\right)\left(D+\frac{1}{K}\right)^2}\right]\frac{2\overline{P}_1\ \overline{P}_2}{K^3}$$
$$+\left[\frac{1}{\left(D+\frac{2}{K}\right)\left(D+\frac{1}{K}\right)}\right]\frac{2\overline{P}_2^2}{K^2}+\left[\frac{1}{\left(D+\frac{2}{K}\right)^3}\right]\frac{4\sigma_{P_1'}^2}{K^4}+\left[\frac{1}{\left(D+\frac{2}{K}\right)}\right]\frac{2\sigma_{P_2'}^2}{K^2} \quad \text{....} (40)$$

$\vdots$

$$E\left[Q_n^2\right]=\sum_{s=1}^{n}\sum_{x=0}^{n-x}\frac{2\overline{P}_s\overline{P}_{x+s}}{K^{2(n-s+1)-x}}\left[\sum_{w=1}^{n-s+1}\frac{1}{\left(D+\frac{2}{K}\right)^{2(n-s+1)-w-x}\left(D+\frac{1}{K}\right)^{w}}Z_{nsxw}\right]$$

$$+\sum_{y=1}^{n}\left[\frac{1}{\left(D+\frac{2}{K}\right)^{(2y-1)}}\right]\frac{2R_{ny}\sigma^2_{P_{n-y+1}}}{K^{2y}} \quad \text{..............................} (41)$$

其中 Z_{nsxw} 、 R_{ny} 爲常數，會隨著 n 值改變， n=1 時， Z_{1101}=1 、 R_{11}=1 ， n=2 時， Z_{2101}=2 、 Z_{2102}=1 、 Z_{2111}=2 、 Z_{2112}=1 、 Z_{2201}=1 、 R_{21}=1 、 R_{22}=2 ， n=3 時， Z_{3101}=6 、 Z_{3102}=3 、 Z_{3103}=1 、 Z_{3111}=6 ……… 。

$\overline{P}_1$ 、 $\overline{P}_2$ 、…、 $\overline{P}_n$ 雖然爲平均項，但在實際自然現象中，一場暴雨是連續時間的函數，若是以整個歷程時間之平均值表示，顯然與實際有很大之誤差，但是欲瞭解眞正降雨歷程是屬於何種函數關係，卻有其實際上之困難；步階函數（ Unit-Step Function ）雖然不是眞正降雨歷程的表示函數，但是較整個歷程時間之平均值更爲近似降雨歷程。步階函數的定義爲：

$$U(t-a)=\begin{cases}0 & t\le a\\ 1 & t>a\end{cases} \quad \text{................} (42)$$

其 Laplace Transform 爲：

$$L\left[U(t-a)\right]=\frac{\exp(-as)}{s} \quad \text{............} (43)$$

根據步階函數的觀念，可將每一次流域之降雨歷程分割成相等時間之間距，每一時間間距內之値以一平均值表示，因此，每一個次流域之降雨輸入平均項可表示爲（ Guang-Te Wang and Shulin Chen, 1996 ）：

$$\overline{P}_1(t)=\overline{p}_{01}U(t)+(\overline{p}_{11}-\overline{p}_{01})U(t-\Delta t)+\cdots$$
$$+(\overline{p}_{m1}-\overline{p}_{(m-1)1})U(t-m\Delta t)-\overline{p}_{m1}U(t-(m+1)\Delta t$$
$$=\sum_{i=0}^{m+1}C_{i1}U(t-i\Delta t) \quad \text{..............................} (44)$$

$$\overline{P}_2(t)=\overline{p}_{02}U(t)+(\overline{p}_{12}-\overline{p}_{02})U(t-\Delta t)+\cdots$$
$$+(\overline{p}_{m2}-\overline{p}_{(m-1)2})U(t-m\Delta t)-\overline{p}_{m2}U(t-(m+1)\Delta t$$
$$=\sum_{i=0}^{m+1}C_{i2}U(t-i\Delta t) \quad \text{..............................} (45)$$

$\vdots$

$$\overline{P}_n(t)=\overline{p}_{0n}U(t)+(\overline{p}_{1n}-\overline{p}_{0n})U(t-\Delta t)+\cdots$$
$$+(\overline{p}_{mn}-\overline{p}_{(m-1)n})U(t-m\Delta t)-\overline{p}_{mn}U(t-(m+1)\Delta t$$
$$=\sum_{i=0}^{m+1}C_{in}U(t-i\Delta t) \quad \text{..............................} (46)$$

其中 $\overline{p}_{mn}$: 第 n 個次流域第 m 個時間間距內之降雨平均值

m ：時間間距數目

n ：次流域標號

Δt ：時間間距

$C_{0n}=\overline{p}_{0n}$

$C_{1n}=\overline{p}_{1n}-\overline{p}_{0n}$

$\vdots$

$C_{mn}=\overline{p}_{mn}-\overline{p}_{(m-1)n}$

$C_{(m+1)n}=-\overline{p}_{mn}$

擾動項 $\overline{P}_1$ 、 $\overline{P}_2$ 、…、 $\overline{P}_n$ 之變方爲 $\sigma^2_{P_1'}$ 、 $\sigma^2_{P_2'}$ 、…、 $\sigma^2_{P_n'}$ 。

將(44)至(46)式代入(36)至(38)式，並以 Laplace Transform 法解微分方程則得：

$$E\left[Q_1(t)\right]=\sum_{i=0}^{m+1}C_{i1}U(t-i\Delta t)\left[1-e^{-\frac{1}{K}(t-i\Delta t)}\right] \quad \text{.............} (47)$$

$$E\left[Q_2(t)\right]=\sum_{i=0}^{m+1}C_{i2}U(t-i\Delta t)\left[1-e^{-\frac{1}{K}(t-i\Delta t)}\right]$$
$$+\sum_{i=0}^{m+1}C_{i1}U(t-i\Delta t)\left[1-e^{-\frac{1}{K}(t-i\Delta t)}-\frac{(t-i\Delta t)}{K}e^{-\frac{1}{K}(t-i\Delta t)}\right] \quad ..(48)$$

$\vdots$

$$E\left[Q_n(t)\right]=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{m+1}C_{i(n-j+1)}U(t-i\Delta t)\left[1-\sum_{w=0}^{j-1}(w!)^{-1}\left(\frac{t-i\Delta t}{K}\right)^{w}e^{-\frac{1}{K}(t-i\Delta t)}\right] (49)$$

同理，各次流域特性參數 K 均相同時輸出流量之第

二階動差亦可由 Laplace Transform 法解得：

$$E\left[Q_1^2(t)\right]=\sum_{i=0}^{m+1}C_{i1}\sum_{i=0}^{m+1}C_{i1}U(t-i\Delta t)\left[1-2e^{-\frac{1}{K}(t-i\Delta t)}+e^{-\frac{2}{K}(t-i\Delta t)}\right]$$

$$+\frac{\sigma_{P_1'}^2}{K}\left[1-e^{-\frac{2}{K}t}\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (50)$$

$$\begin{aligned}E\left[Q_2^2(t)\right]=&\sum_{i=0}^{m+1}C_{i1}\sum_{i=0}^{m+1}C_{i1}U(t-i\Delta t)\left[1-2e^{-\frac{1}{K}(t-i\Delta t)}-2\frac{(t-i\Delta t)}{K}e^{-\frac{1}{K}(t-i\Delta t)}+e^{-\frac{2}{K}(t-i\Delta t)}\right]\\
&+\sum_{i=0}^{m+1}C_{i1}\sum_{i=0}^{m+1}C_{i1}U(t-i\Delta t)\left[2\frac{(t-i\Delta t)}{K}e^{-\frac{2}{K}(t-i\Delta t)}+\frac{(t-i\Delta t)^2}{K^2}e^{-\frac{2}{K}(t-i\Delta t)}\right]\\
&+\sum_{i=0}^{m+1}C_{i1}\sum_{i=0}^{m+1}C_{i2}U(t-i\Delta t)\left[2-4e^{-\frac{1}{K}(t-i\Delta t)}-2\frac{(t-i\Delta t)}{K}e^{-\frac{1}{K}(t-i\Delta t)}\right]\\
&+\sum_{i=0}^{m+1}C_{i1}\sum_{i=0}^{m+1}C_{i2}U(t-i\Delta t)\left[2e^{-\frac{2}{K}(t-i\Delta t)}+2\frac{(t-i\Delta t)}{K}e^{-\frac{2}{K}(t-i\Delta t)}\right]\\
&+\sum_{i=0}^{m+1}C_{i2}\sum_{i=0}^{m+1}C_{i2}U(t-i\Delta t)\left[1-2e^{-\frac{1}{K}(t-i\Delta t)}+e^{-\frac{2}{K}(t-i\Delta t)}\right]\\
&+\frac{\sigma_{P_1'}^2}{2K}\left[1-e^{-\frac{2}{K}t}-\frac{2t}{K}e^{-\frac{2}{K}t}-\frac{2t^2}{K^2}e^{-\frac{2}{K}t}\right]+\frac{\sigma_{P_2'}^2}{K}\left[1-e^{-\frac{2}{K}t}\right] \quad \cdots (51)\end{aligned}$$

$\vdots$

$$\begin{aligned}E\left[Q_n^2(t)\right]=&\sum_{w=1}^{n}\left\{\sum_{i=0}^{m+1}C_{iw}\sum_{i=0}^{m+1}C_{iw}U(t-i\Delta t)\left[1-\sum_{a=0}^{n-w}\frac{2}{a!K^a}(t-i\Delta t)^a e^{-\frac{1}{K}(t-i\Delta t)}\right]\right\}\\
&+\sum_{w=1}^{n}\left\{\sum_{i=0}^{m+1}C_{iw}\sum_{i=0}^{m+1}C_{iw}U(t-i\Delta t)\left[\sum_{b=0}^{n-w}\frac{2^b}{b!K^b}(t-i\Delta t)^b e^{-\frac{2}{K}(t-i\Delta t)}+\sum_{c=n-w+1}^{2(n-w)}R_{nwc}(n-w)\frac{(t-i\Delta t)^c}{K^c}e^{-\frac{2}{K}(t-i\Delta t)}\right]\right\}\\
&+\sum_{w=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{m+1}C_{iw}\sum_{x=1}^{n-w}\sum_{i=0}^{m+1}C_{i(w+x)}U(t-i\Delta t)\left\{2-2\left[\sum_{a=0}^{n-(w+x)}\frac{2}{a!K^a}(t-i\Delta t)^a+\sum_{b=(n-w-x)+1}^{n-w}\frac{1}{b!K^b}(t-i\Delta t)^b\right]e^{-\frac{1}{K}(t-i\Delta t)}\right\}\\
&+\sum_{w=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{m+1}C_{iw}\sum_{x=1}^{n-w}\sum_{i=0}^{m+1}C_{i(w+x)}U(t-i\Delta t)\left\{\left[2+\sum_{d=1}^{2(n-w)ux}O_{nwxd}\frac{(t-i\Delta t)^d}{K^d}\right]e^{-\frac{2}{K}(t-i\Delta t)}\right\}\text{，}n>1\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (52)$$

其中 R_{nwc} 、 O_{nwxd} 爲常數，會隨著 n 値改變， n=2 時， R_{212}=1 、 O_{2111}=2 ， n=3 時， $R_{313}=\frac{1}{2}$ 、 $R_{314}=\frac{1}{8}$ 、 R_{322}=1 、 O_{3111}=4 、 O_{3112}=3 、 O_{3113}=1 、 O_{3121}=2 、 O_{3122}=1 ………。

然而，眞實流域中各局部常有不同之水文及地文特性，因此，各次流域之特性參數應不相同。不同特性參數之分析方法比照上述特性參數相同時之步驟，可得出流量第一動差微分方程式之通式：

$$E[Q_n]=\frac{1}{\left(D+\frac{1}{K_n}\right)\cdots\left(D+\frac{1}{K_1}\right)}\frac{\overline{P}_1}{K_nK_{n-1}\cdots K_1}+\frac{1}{\left(D+\frac{1}{K_{n-1}}\right)\cdots\left(D+\frac{1}{K_1}\right)}\frac{\overline{P}_2}{K_{n-1}K_{n-2}\cdots K_1}+\cdots+\frac{1}{\left(D+\frac{1}{K_n}\right)}\frac{\overline{P}_n}{K_n}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\prod_{w=1}^{j}\left(D+\frac{1}{K_{n-w+1}}\right)}\frac{\overline{P}_{n-j+1}}{\prod_{w=1}^{j}K_{n-w+1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (53)$$

將上式以 Laplace Transform 法求解，得解之通式爲：

$$E\left[Q_n(t)\right]=\sum_{w=1}^{n}\left\{\sum_{i=0}^{m+1}C_{iw}U(t-i\Delta t)\left[1-\sum_{j=w}^{n}\frac{K_j^{n-w}}{\prod_{y=w}^{n}(K_j-K_y)}e^{-\frac{(t-i\Delta t)}{K_j}}\right]\right\}\text{，}K_j\neq K_y$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (54)$$

特性參數不同時，出流量第二動差微分方程式之求解，因其推演過程中各次流域之特性參數彼此互相影響，甚難歸納出通式，只能逐一求得各次流域第二動差的解。如下列所示爲第一及第二次流域第二動差的解：

$$E\left[Q_1^2(t)\right]=\sum_{i=0}^{m+1}C_{i1}\sum_{i=0}^{m+1}C_{i1}U(t-i\Delta t)\left[1-2e^{-\frac{1}{K_1}(t-i\Delta t)}+e^{-\frac{2}{K_1}(t-i\Delta t)}\right]$$

$$+\frac{\sigma_{P_1'}^2}{K_1}\left[1-e^{-\frac{2}{K_1}t}\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (55)$$

$$\begin{aligned}E\left[Q_2^2(t)\right]=&\sum_{i=0}^{m+1}C_{i1}\sum_{i=0}^{m+1}C_{i1}U(t-i\Delta t)\left[1-\frac{2K_1}{K_1-K_2}e^{-\frac{1}{K}(t-i\Delta t)}-\frac{2K_2}{K_2-K_1}e^{-\frac{1}{K_2}(t-i\Delta t)}\right]\\
&+\sum_{i=0}^{m+1}C_{i1}\sum_{i=0}^{m+1}C_{i1}U(t-i\Delta t)\left[\frac{K_1^2}{(K_1-K_2)^2}e^{-\frac{2}{K_1}(t-i\Delta t)}+\frac{K_2^2}{(K_1-K_2)^2}e^{-\frac{2}{K_2}(t-i\Delta t)}-\frac{2K_1K_2}{(K_1-K_2)^2}e^{-\left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}\right)(t-i\Delta t)}\right]\\
&+\sum_{i=0}^{m+1}C_{i1}\sum_{i=0}^{m+1}C_{i2}U(t-i\Delta t)\left[2-\frac{2K_1}{K_1-K_2}e^{-\frac{1}{K_1}(t-i\Delta t)}-\left(\frac{2K_2}{K_2-K_1}+2\right)e^{-\frac{1}{K_2}(t-i\Delta t)}-\left(\frac{2K_2}{K_1-K_2}\right)e^{-\frac{2}{K_2}(t-i\Delta t)}+\frac{2K_1}{K_1-K_2}e^{-\left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}\right)(t-i\Delta t)}\right]\\
&+\sum_{i=0}^{m+1}C_{i2}\sum_{i=0}^{m+1}C_{i2}U(t-i\Delta t)\left[1-2e^{-\frac{1}{K_2}(t-i\Delta t)}+e^{-\frac{2}{K_2}(t-i\Delta t)}\right]\\
&+\sigma_{P_1'}^2\left[\frac{1}{K_1+K_2}-\frac{K_1}{(K_1-K_2)^2}e^{-\frac{2}{K}t}-\frac{K_2}{(K_1-K_2)^2}e^{-\frac{2}{K_2}t}+\frac{4K_1K_2}{(K_1-K_2)^2(K_1+K_2)}e^{-\left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}\right)t}\right]\end{aligned}$$

$$+\frac{\sigma_{P_2'}^2}{K_2}\left[1-e^{-\frac{2}{K_2}t}\right] \qquad \cdots\cdots\cdots (56)$$

由變異數（ Variance ）公式，可知：

$$Var[Q_1]=E\left[Q_1^2\right]-\{E[Q_1]\}^2 \cdots\cdots (57)$$

$$Var[Q_2]=E\left[Q_2^2\right]-\{E[Q_2]\}^2 \cdots\cdots (58)$$

$$\vdots$$

$$Var[Q_n]=E\left[Q_n^2\right]-\{E[Q_n]\}^2 \cdots\cdots (59)$$

將(47)至(56)式代入(57)至(59)式，如此，則可得各出流量之變異數，亦即是模擬出流量之可信賴區間。

六、結　論

本文目的在於建構流域降雨-逕流串聯模式之序率微分方程式，將流域依據流量站控制面積分割爲多個次流域，因考慮降雨在空間分佈之特性，將有助於降雨-逕流關係之分析。

串聯集塊模式以序率微分方程式表示，是因爲將流域複雜的氣象水文因素及地文因子擾動所產生的序率性，以第一階、第二階動差表現出來，並代入模式中，以改善定率模式未考慮擾動項之假設。序率微分方程理論中之動差方程式，其第一階動差方程式的解，是輸出流量的平均項，其實，就相當於定率微分方程式的解，而第二階動差方程式的解，則可求出輸出流量的變異，亦即是模擬流量可能的變動範圍，此爲以序率微分方程理論分析降雨-逕流關係之特色。

在序率微分方程式的求解過程中，以步階函數表示降雨輸入的過程，雖然不能顯示眞正降雨的歷程，但在欲求得眞正降雨歷程有其實際困難的前提下，則不失爲一適當之方法，並以 Laplace Transform 之方式求得解析解，更增加了求解之便利性。雖然序率微分方程式的求解過程較定率微分方程式複雜，但可提供輸出流量的變異範圍，故能以統計學中可信賴區間的觀念，作爲水資源規畫時的依據。

七、參考文獻

王如意、何輔仁, 1994, ‘區域平均雨量估計方法之比較及其與降雨-逕流模式串聯之應用’, 國立台灣大學農業工程研究所碩士論文.

林國峰、王育民, 1996, ‘序率微分方程及其於降雨-逕流模擬之應用’, 第八屆水利工程研討會, 台北市.

鄭克聲、葉惠中、鄭彥斌, 1997,‘台灣北部地區設計暴雨深度等値現之建立’, 台灣水利, 第 45 卷, 第 3 期, pp. 42-54.

Ariaratnam, S.T. and P.W.U. Graefe, 1965, ‘Linear systems with stochastic coefficients’, Int. J. Contr., 2, 2.

Arnold, L, 1974, ‘Stochastic differential equations: theory and applications’, John Wiley, New York.

Bodo, B.A. and Unny, T.E., 1987, ‘On the ouputs of the stochasticized Nash-Dooge linear reservoir cascade,’ In: Macneill, I.B.; Umphrey, G.J. (eds) Stochastic Hydrology, pp. 131-147.

Boyd, M.J., 1978, ‘A storage routing model relating drainage basin hydrology and geomorphology.’ Water Resour. Res. Vol. 14, No. 5, pp. 921-928.

Boyd, M.J., 1981, ’A linear branched network model for storm rainfall and runoff ‘,Proc. Int. Symp. On Rainfall-Runoff Modeling. Water Resources Publications, Littleton, CO, pp. 111-124.

Diskin, M.H. and Simpson, E.S., 1978, ‘A quasi-linear spatially distributed cell model for the surface runoff system.’, Water Resour. Bull., 14: 903-908.

Diskin, M.H., 1994, ‘A rational routing element for watershed cell methods.’ J. Hydrol., 155: 93-101.

Dooge, J.C.I.,1959,’A general theory of the unit hydro-grapph ‘, J. Geophys. Res., Vol.64, No.2, pp. 241-256.

Guang-Te Wang and Shulin Chen, 1996, 'Alinear spatiality distributed model for a surface rainfall-runoff system', Journal of Hydrology, 185: 183-198.

Jazwinski, A.H., 1970, 'Stochastic processes and filtering theory', Academic Press, New York.

Laurenson, E.M., 1964, 'A catahment storage model for runoff routing', J. of the Htdrology, II(2), pp.141-163.

Schuss, Z., 1980, 'Theory and applications of stochastic differential equations', John Wiely Sons, New York.

Sherman, L.K., 1932, 'Stream-flow from rainfall by the Unit Graph Method.', Eng. News Rec., 108: 501-505.

Soong,T.T.,1973,'Random differential equations in science and engineering, Academic Press, New York.

Stratonovich, R.L.,1967, 'Topics in the theory of random noise.' Vol. 2, translated from Russian by R.A. Solverman, Gordon Breach, New York.

Unny, T.E., and Karmeshu, 1984,'Stochastic nature of outputs from conceptual reservoir model cascades', J. of Hydrology, vol.33, pp.161-180.

Unny, T.E., 1984, 'Numerical integration of stochastic differential equation in catchment modeling,' Water Resources Resarch, Vol. 20, No. 3, pp. 360-368.

Unny, T.E., 1987, 'Solutions to non-linear stochastic differential equation in catchment', In: MacNeill, I.B.; Umphery, G.J. (eds) Stochastic Hydrology, pp. 87-110.

Wong, E., and M. Zakai, 1965,'On the relation between ordinary and stochastic differential equations', Int. J. Eng. Sci., 3, pp. 213-222.

收稿日期：民國 87 年 3 月 3 日
修正日期：民國 87 年 5 月 22 日
接受日期：民國 87 年 6 月 2 日