

摩擦因子對引用SMAC方法模擬水躍之影響

Effects of Friction Factor on Application of SMAC Method in Simulating Hydraulic Jump

淡江大學水資源及環境工程學系教授

施 清 吉
Ching-chi Shih

摘 要

利用 SMAC 方法，模擬水躍本體的自由面，控制式為雷諾與連續等方程式，渦度粘滯係數採用 Fischer 的經驗公式，並改為深度、斷面平均速度與摩擦因子的函數式，但摩擦因子為定值。為配合水躍自由面的特徵，前端採用較小的摩擦因子 f_1 ，而末端改採用較大的摩擦因子 f_2 ，其範圍分別為 $0.0001 \leq f_1 \leq 0.003$ ， $0.03 \leq f_2 \leq 0.06$ 。模擬自由面與 Rajaratnam 所提的水躍平均（對時間）剖面比較，其間的差距分為傾向差距與精度差距（約為標準偏差的二倍）。標準偏差愈小代表模擬自由面愈趨近於水躍平均剖面的形狀，但不計傾向差距；同時也顯示模擬自由面愈穩定。故本文探討標準偏差為最小時，相關參數的值並分析其現象，而上游福祿數的範圍為自 2 到 8，間距為 0.2。

關鍵詞：水躍，SMAC 方法，自由面。

ABSTRACT

The free surface profile of the body of the hydraulic jump is simulated by the SMAC method, based upon the Reynolds equations of motion and the continuity equation. The eddy viscosities are calculated from the Fischer's empirical formula which are changed to a functional relationship of the sectional mean velocity, the depth and the friction factor, and in the course of simulation the friction factor is kept constant. In order to reflect the main characteristics of the hydraulic jump a smaller value of the friction factor f_1 is adopted around the toe of the jump, while a much greater value of the friction factor f_2 is utilized from the rest of the jump, and the ranges of f_1 and f_2 are $0.0001 \leq f_1 \leq 0.003$ and $0.03 \leq f_2 \leq 0.06$ respectively. Simulated free surfaces are compared with the mean free surface profile (taken average with respect to time) as proposed by Rajaratnam of which the deviation consists two parts: the tendency deviation and precision deviation that is approximately two times of the

standart deviation. The less the standard deviation, the more agreement of simulated free surfaces with the shape of the mean free surface profile nothing to do with the tendency deviation, and the more stable of simulated free surfaces. Therefore, in the present study, values of the appropriate parameters and their phenomena are analyzed and investigated when the standard deviation is the minimum; and the upstream Froude number ranges from 2 to 8 with an increment of 0.2.

Keyword : Hydraulic jump, SMAC method, Free surface.

一、前言

在渠流中 (Open channel Flow) 水躍代表流動由超臨界流 (Supercritical flow) 轉變成次臨界流 (Subcritical flow)，其主要特徵為在水躍發生之前與之後，自由面 (free surface) 有明顯的變化，同時導致大量的能量損失。水躍為極具熟悉的自然現象，也是在水利工程上設計不可缺少與無法避免的課題。因此，相當多學者，投入這一方面的研究。此外，水躍又是古典的水利問題。故水躍經常成為各不同數值技巧的模擬對象。本文利用由傳統的 MAC (Marker and Cell) 方法演變而得的 SMAC (Simplified Marker and Cell) 方法來模擬水躍 (Welch et al., 1966; Amsden et al., 1970)。水躍為一頗具複雜的流動，數值模擬技巧的恰當與否，應以自由面 (Free surface) 為首要的比較對象；因為，水躍本體 (Body) 的自由面及其共軛深度早為一相當定型的共識。其次，引用數值技巧模擬含自由面的流動時須提高粘度係數的值，或引進一人工粗糙度。以水躍而言，過於簡單的阻力模式往往無法獲得理想的模擬結果，必須引進較複雜的阻力模式，例如 $k-\epsilon$ 模式 (Liu et al., 1994)。可是 $k-\epsilon$ 模式的普遍性遠不如摩擦因子 (Friction factor)。所以，本研究以水躍本體的自由面及其共軛深度為比較對象，廣泛探討摩擦因子的適當範圍以獲得較佳的模擬結果。

二、理論基礎

採用雷諾運動方程式 (Reynolds equations of motion) 與連續方程式 (Continuity equation) 做為統御方程式 (governing equations)，且以前人的

經驗公式並配合摩擦因子為阻力模式。

2.1 統御方程式

考慮一個二維流場 (Two dimensional flow field)，其流向與垂直座標軸分別以 x 與 y 表示，對應的速度分量 (Velocity components) 分別為 u 與 v ，後兩者都是對時間取平均，例如 $u = \frac{1}{T} \int_0^T$ (瞬時水平速度) dt ，其中 T 為總時間。若流體為不可壓縮 (Incompressible)，則連續方程式為

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

如果分子運動所導致的粘滯效應可略而不計，並配合式(1)，則描述平均速度 (Mean velocity) u 與 v 的 Reynolds 運動方程式變為 (Daily et al., 1966; Chippda et al., 1994)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{p}{\rho} \right\} + g_x + \epsilon_x \nabla^2 u \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{p}{\rho} \right\} + g_y + \epsilon_y \nabla^2 v \quad (3)$$

式中 t 為時間； ρ 為密度； g_x 與 g_y 分別為 x 與 y 軸的重力加速度； p 為壓力，如 u 與 v 一般，同樣都是對時間取平均；而 ϵ_x 與 ϵ_y 分別為沿 x 與 y 軸的渦度粘滯係數 (Eddy viscosity)，採用 Fischer et al. (1975) 的經驗公式，即

$$\epsilon_x = 0.45 u_* h \quad (4)$$

$$\epsilon_y = 0.007 u_* h \quad (5)$$

式中 u_* 為摩擦速度 (Friction velocity)，定義為 $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ ，其中 τ_0 為作用於渠底的剪應力，而 h 為自由面高度，其對應的斷面平均速度為 V 。利用渠流與管流的相通性，式(4)與(5)分別變為

$$\varepsilon_x = 0.45 \sqrt{\frac{f}{8}} v h \quad (6)$$

$$\varepsilon_y = 0.067 \sqrt{\frac{f}{8}} v h \quad (7)$$

式(6)與(7)的渦度粘滯係數是沿深度 h 的平均值，但沿流向而異；以這樣的模式來計算阻力應該遠勝過於以單一值來代表整個水躍本體的阻力。另一方面，吾人對摩擦因子的了解相當透徹，而且摩擦因子的應用也極具普通性。式(1)、(2)與(3)並配合式(6)與(7)為本研究模擬水躍之統御方程式，計算之範圍為一矩形，俗稱為計算網格 (Computational mesh)，其邊界條件述於下。

2.2 邊界條件

(一)左側入流邊界條件 (Left inflow boundary condition)

計算網格之左側為一已知的超臨界流，其深度與斷面平均速度分別為 h_1 與 v_1 。所以左側的入流邊界條件為速度 U_L 與深度 y_L 分別等於 v_1 與 h_1 。這兩個值也是模擬的初始值，不因不同的時段 (Time step) 或循環 (Cycle) 而改變。

(二)渠底邊界條件

計算網格之底邊剛好為渠底，所以其上的水平速度 u 與垂直速度 v 須分別滿足下列兩條件：

$$u_{bottom} = 0 \quad (8)$$

$$v_{bottom} = 0 \quad (9)$$

(三)右側出流邊界條件 (Right continuative outflow boundary condition)

為允許計算網格內的流體能繼續流出網格，但對上游之影響以最小計。所以在計算網格之右邊界，沿 x 方向的速度梯度均假設為 0，即

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{right} = 0 \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{right} = 0 \quad (11)$$

(四)自由面邊界條件 (Free surface boundary condition)

自由面的位置為未知數，位於計算網格上邊之下，其間的空間必須足以容納在不同時刻之水位變化。在自由面上的邊界條件，傳統 MAC 是採用連續方程式與應力消散 (Stress Vanishment) (Hirt et al., 1968; Nichols et al., 1971)。前者是指式(1)，而後者又分剪應力與正應力消散等兩種。剪應力消

散為

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

而正應力 (Normal stress) 消散為

$$\sigma_x = -p + 2\rho\varepsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

$$\sigma_y = -p + 2\rho\varepsilon_y \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

式(13)與(14)中， σ_x 與 σ_y 分別為 x 與 y 軸之正應力。

SMAC 將速度視為速度勢能函數 (Velocity potential function) Φ 的梯度。由此，利用速度勢能函數的修正以滿足連續方程式，而與動量方程式無關。速度勢能函數與速度分量間的關係為

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (15)$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (16)$$

在自由面上由於無剪應力，所以

$$\Phi_{free\ surface} = 0 \quad (17)$$

而在固體邊界上，則法線速度必須等於 0，故

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (18)$$

式中， n 代表法線。

三、數值計算

數值計算之架構，先引用式(2)與(3)之差分式計算下時段 (Advanced time step) 或下循環 (advanced cycle) 的暫時速度 (temporary velocity) 或猜測值；但是此速度並無法滿足連續方程式，必須一再迭代與修正，直到代入連續方程式後的殘餘值或發散量 (Dilation) 小於容許誤差，才可求得下時段的真正速度。接著利用上述所得之真正速度計算顆粒的新位置，由顆粒之分佈即可曉得下時段的自由面。SMAC 方法係採用交錯格點 (Staggered grid point)，如圖 1 所示：相關的因變數並不是定義於格點上。晶格的四邊只有法線速度，而無切線速度。定義於晶格中心的因變數與參數計有大壓力 p 。速度勢能函數 Φ 與重力加速度 g 。

為了便於執行，計算網格通常採用長方形，其間的水平線與垂直線將之分割成許多晶格。沿 x 軸與 y 軸之晶格尺寸 (Size) 分別以 Δx 與 Δy 表示，同時其晶格總數分別以 IBAR 與 JBAR 表示。因此，計算網格共有 IBAR \times JBAR 個晶格。由於晶格只

有法線速度沒有切線速度；因此，任何須引用切線速度的邊界條件必須以另一方式表示之。此外，針對每一晶格，由式(2)與(3)求得的速度，以及其修正與迭代均與鄰近的四個晶格有關。基於上述的理由，在計算網格之外再圍繞一圈虛擬晶格 (Phantom Cell) 或稱邊界晶格 (Boundary Cell)。加上虛擬晶格後，全部的晶格數為 $(IBAR + 2) \times (JBAR + 2)$ 。其次，為便於認識，另定義 $IP1 = IBAR + 1$ ， $JP1 = JBAR + 1$ ， $IP2 = IBAR + 2$ ， $JP2 = JBAR + 2$ ，以 i 與 j 代表晶格位置之指標 (Index)，前者代表沿 x 軸，而後者代表沿 y 軸。所以計算網格的範圍為 I 自 2 至 $IP1$ ， J 自 2 至 $JP1$ 。

3.1 下時段速度的猜測值

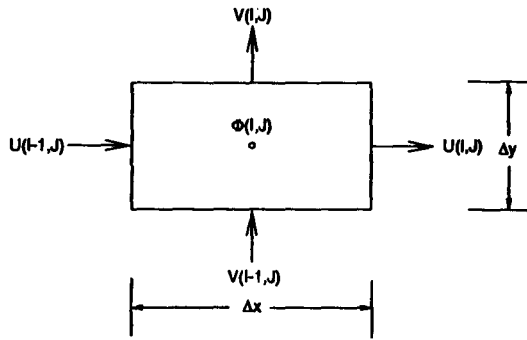


圖 1. 晶格示意圖

時段以右上註腳表示， n 與 $n+1$ 分別代表現時段 (Current time step) 與下時段；正上方 \wedge 代表迭代值；‘右上註腳的括弧表迭代階段，示於其內的 0 為猜測值，由式(4)與(5)求得

$$\begin{aligned} (\hat{u}_{i,j}^{n+1})^{(0)} = & u_{i,j}^n + \Delta t \left\{ -FUX^n - FUY^n + VISX^n \right. \\ & \left. + g_x + \frac{\theta_{i,j}^n - \theta_{i+1,j}^n}{\Delta x} \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} (\hat{v}_{i,j}^{n+1})^{(0)} = & v_{i,j}^n + \Delta t \left\{ -FVX^n - FVY^n + VISY^n \right. \\ & \left. + g_y + \frac{\theta_{i,j}^n - \theta_{i,j+1}^n}{\Delta y} \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

式中， $\theta = p/\rho$ ； FUX^n 、 FUY^n 、 FVX^n 與 FVY^n 代表對流加速度 (Convective acceleration) 之差分式，而 $VISX^n$ 與 $VISY^n$ 則代表摩擦力之差分式，其詳式可參閱周，1994。對流項差分式均含一上游權重參數

(Upstream weighting factor) α 。其次，為了避免摩擦力項內的粘滯係數所造成之數值不穩定，本研究採用 (Golafshani, 1988) 所用之微分方程式。

3.2 迭代與修正

利用中央差分法即可由式(15)與(16)導出速度分量與速度勢能函數的差分式，即

$$u_{i,j} = \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta x} \quad (21)$$

$$v_{i,j} = \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}}{\Delta y} \quad (22)$$

任何階段的速度迭代值都無法滿足連續方程式 (1)；因此，將速度分量代入連續方程式將產生一發散量 \hat{D}

$$\hat{D}_{i,j}^{n+1} = \frac{\hat{u}_{i,j}^{n+1} - \hat{u}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\hat{v}_{i,j}^{n+1} - \hat{v}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} \quad (23)$$

由於流場須滿足連續方程式，所以式(23)恆等於 0。將式(21)、(22)代入式(23)得

$$\begin{aligned} (\hat{D}_{i,j}^{n+1})^{(h+1)} = & (\hat{D}_{i,j}^{n+1})^{(h)} - \frac{1}{(\Delta x)^2} \left(\hat{\Phi}_{i+1,j}^{(h)} + \hat{\Phi}_{i-1,j}^{(h)} \right. \\ & \left. - 2\hat{\Phi}_{i,j}^{(h)} \right) - \frac{1}{(\Delta y)^2} \left(\hat{\Phi}_{i,j+1}^{(h)} + \hat{\Phi}_{i,j-1}^{(h)} \right. \\ & \left. - 2\hat{\Phi}_{i,j}^{(h)} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

式中，括弧右上註腳 $h+1$ 與 h 代表下階段與現階段的迭代值。但 $h=0$ 時的速度迭代值是由式(19)與(20)求得。若下階段的速度迭代值滿足連續方程式，則式(24)等號左邊等於 0；由此，此式即可提供速度勢能函數的下次迭代值。故由式(24)得

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{i,j}^{(h+1)} = & \frac{(1+\beta)}{\left[\frac{2}{(\Delta x)^2} + \frac{2}{(\Delta y)^2} \right]} \left\{ -(\hat{D}_{i,j}^{n+1})^{(h)} + \frac{\hat{\Phi}_{i+1,j}^{(h)} - \hat{\Phi}_{i-1,j}^{(h)}}{(\Delta x)^2} \right. \\ & \left. - \frac{\hat{\Phi}_{i,j+1}^{(h)} - \hat{\Phi}_{i,j-1}^{(h)}}{(\Delta y)^2} \right\} - \beta \hat{\Phi}_{i,j}^{(h)} \end{aligned} \quad (25)$$

式(25)含一鬆弛因子 (Relaxation factor) β ，其值介於 0 於 1 間，用以增加數值穩定與加快收斂速度。停止迭代的條件為

$$\left| \frac{\hat{\Phi}_{i,j}^{(h+1)}}{\hat{\Phi}_{i,j}^{(h)}} - \frac{\hat{\Phi}_{i,j}^{(h)}}{\hat{\Phi}_{i,j}^{(h-1)}} \right| < 1 \times 10^{-5} \quad (26)$$

若不滿足式(26)，則須回到式(24)與(25)，直到滿足式(26)為止。如果符合式(26)，即由其與速度勢能函數

的關係式計算下時段的速度，即

$$u_{i,j}^{n+1} = \left(\tilde{u}_{i,j}^{n+1} \right)^{(0)} - \frac{\tilde{\Phi}_{i+1,j}^{(h+1)} - \tilde{\Phi}_{i,j}^{(h+1)}}{\Delta x} \quad (77)$$

$$v_{i,j}^{n+1} = \left(\tilde{v}_{i,j}^{n+1} \right)^{(0)} - \frac{\tilde{\Phi}_{i,j+1}^{(h+1)} - \tilde{\Phi}_{i,j}^{(h+1)}}{\Delta y} \quad (78)$$

3.3 邊界條件

在程式開始運算之前，必須在虛擬晶格上設定符合所求問題的初始與邊界條件（Initial and boundary conditions），同時也須於計算網格內設定諸變數與參數的初始值。此外，當程式開始運算第一個新循環或時段後，以及在每一個新循環或新時段的開始等情況，除了左側入流邊界外，其它的邊界條件皆須重新設定之。數值模擬所需之邊界條件包括左側入流邊界、渠底邊界、右側出流邊界與自由面邊界等四種。自由面所位於之晶格，稱為表面晶格（Surface cells）；充滿水之晶格為充斥晶格（Full cells）；而沒有水之晶格則稱為空晶格（Empty cells）。

除了引進速度勢能函數 Φ 用以修正下時段速度外，對邊界條件之執行 SMAC 法也不同於傳統 MAC 方法。SMAC 方法並不像傳統 MAC 法，每次修正下時段速度後就緊接著處理邊界條件，而是在求得下時段的真正速度後，才處理邊界條件。

自由面邊界條件計有三：剪應力等於零、符合連續方程式與正應力等於零。傳統 MAC 法只引用前兩者，而 SMAC 方法再引用第三者。利用剪應力等於零來設置空晶格的水平速度，兩表面晶格間的垂直速度則用連續方程式求得。至目前為止能處理的自由面邊界只有兩種：一是只有一個空晶格，二是兩個相鄰空晶格（仍然與表面晶格為鄰），參閱施，1994。

3.4 下時段之質點位置

當程式開始運算，流場內的質點便會隨著流場內的速度及壓力，做適當的移動。下時段的速度場經由上述前三節的執行後，就成為下時段的真正值；接著，就可計算下時段之質點新位置，以便設定各晶格的新旗號。最後，再根據晶格的新旗號，又可曉得下時段的自由面。

SMAC 方法採用面積—權重方法（Area weighting scheme），由晶格速度來計算已知位置的質點速度，這包括水平與垂直兩速度分量。然

後就可根據前時段的水平座標與垂直座標求得下時段的新座標及其所在的晶格。最後，再檢查此晶格四周相鄰的晶格狀況，充斥晶格或表面晶格或空晶格，就可訂定此晶格在下時段的旗號。含任何質點的晶格可能為充斥晶格，也可能為表面晶格，但不可能為空晶格，只有不含任何質點的晶格才能宣稱為空晶格。在前時段的充斥晶格於下時段其四週有一個空晶格與它相鄰，此晶格在下時段的旗號就改為表面晶格。相反地，若一晶格原為表面晶格，但在下時段就不再與任何空晶格為鄰，則此晶格在下時段旗號就改為充斥晶格。

SMAC 方法為一顯性技巧，任何定量流（Steady flow）之分析須以變量流之觀點予以處理與趨近。採用的方法頗類似於判斷停止疊代的方式，而改以針對兩個相鄰時段（或循環），同時只考慮深度。所以由式(78)得知

$$\Delta H = \text{Max} \left\{ \left| \frac{H_{i,j}^{n+1}}{H_{i,j}^{n+1}} - \frac{H_{i,j}^{n+1}}{H_{i,j}^{n+1}} \right| \right\} \quad (79)$$

式中， $2 \leq i \leq IP1$ ， $2 \leq j \leq JP1$ 。 ΔH 須小於多少才能視為已足夠趨近於定量流，這往往因不同的問題而異。

四、結果與討論

晶格尺寸 $\Delta x'$ （ $= \Delta x/h_1$ ）與 $\Delta y'$ （ $= \Delta y/h_1$ ）均為無因次。在模擬過程中， $\Delta x'$ 與 $\Delta y'$ 均採用 0.5，所以計算網格為均勻晶格。其次，速度均以超臨界流之斷面平均速度 V_1 予以無次化，而深度尺度為 h_1 ；故左側入流邊界條件均為 1，即 $U'_i = U_i/V_1 = 1$ 與 $y'_l = y_l/h_1 = 1$ ，不因不同的福祿數而改變。沿 x 軸與 y 軸的晶格數 IBAR 與 JBAR 視上游福祿數 Fr_1 的多寡而定。兩側的左右虛擬晶格分別位於與 $i = 1$ 與 $i = IP2$ ，且 j 自 1 至 JP2；上、下邊界晶格所在之列分別為 $j = 1$ 與 JP2；同時 i 自 1 至 2。

初始流場相當於一空流場，一已知水深 h_1 與斷面平均速度 V_1 的超臨界流自計算網格左邊界流入。易言之，左側虛擬晶格維持一均勻（垂直方向）的已知超臨界流。

利用 SMAC 方法或其他類似方法模擬洩水閘門後的超臨界流，均發現閘門下游的水位先呈現

壅高而後再下降的趨勢，可是水位無法沿流向一直遞增，且趨近於某一明顯高於 h_1 的水位（Harlow et al., 1965）。為了使閘門下游的水位能一直上升，甚至趨近於水躍共軛深度 h_2

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2} \right) \quad (30)$$

作者曾嘗試過不同的方法，例如在計算網格右邊另設一洩流閘門，並配合不同的閘門間隙，以達到提高粘滯係數的效果，但模擬結果均不甚理想（施，1995）。過去的模擬結果顯示水躍本體的前半部適宜於採用較小的粘滯係數，而後半部則須使用較大的粘滯係數。若前半部採用較大的粘滯係數，則水躍往往很快淹沒了，因而形成一淹沒流。淹沒與否的判斷依據為計算網格最左邊一行（ $I = 2$ ）的水位不能大於已知深度 h_1 的1.5倍，即 $H(2)/h_1 \leq 1.5$ 。而後半部卻是為了提高水位並促其沿流向遞增，故須採用較大的黏度係數。參閱式(6)與(7)，故計算網格的前半部晶格須採用較小的摩擦因子 f_1 ，而後半部晶格改採用較大的摩擦因子 f_2 。如式(6)與(7)所示，黏度係數並不為定值，而是沿流向改變的，其變化係來自各斷面的

平均速度 V 與水位 h ，這兩值是沿流向改變的；但是，摩擦因子的值並不沿流向改變，而是一個定值。基於上述的探討，本研究採用二個定值的摩擦因子 f_1 與 f_2 ，其分界點述於下。如前段所述，初始流場為一空流場，而且為了避免過早形成淹沒流因而停止模擬，故先使用一個較小的摩擦因子 f_1 予以模擬。一直等到流體抵達計算網格右邊界時，才檢視該時之瞬時自由面，如圖2所示，最高水位的位置以 X_{max} 表示，而水躍範圍或長度以 L_j 表示，則摩擦因子 f_1 與 f_2 分界點之位置 X_{divide} 就定為 $X_{max} + (L_j - X_{max})/2$ 。參閱圖2，以不同摩擦因子的分界線為準，計算網格分成左右兩區，分別以 CM_1 與 CM_2 表示。自流體抵達計算網格右邊界起一直到停止模擬，左邊計算網格 CM_1 的摩擦因子之值仍然為 f_1 ；但右邊 CM_2 自 f_1 改為 f_2 。摩擦因子 f_1 的值自0.0001至0.003，間距為0.0001；而 f_2 的值自0.03至0.06，間距為0.002。上游福祿數 Fr_1 自2至8，間距為0.2。計算時間TWFIN（ $= tV_1/h_1$ ）視 Fr_1 而定，最長為550，最短為150。

發生水躍時，最明顯的現象為流況由超臨界流轉變為次臨界流，水位突然之間由淺變深，而

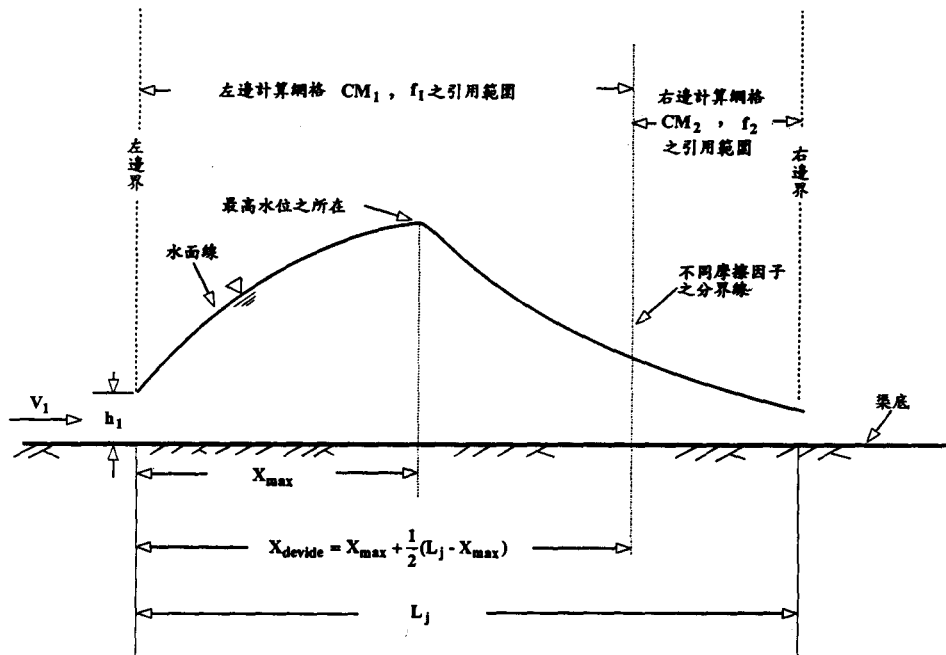


圖 2. 流體抵達計算網格右邊界之瞬時自由面

且是大幅度的上升，其深度比示於式(30)，所以這一現象就成為模擬水躍之首要重點。易言之，若上游福祿數 Fr_1 為已知時，則水躍深度應接近式(30)的推測值。此外，水躍長度 L_j 也為少數的共識之一，一般採用 $L_j=6h_2$ 。除了水躍長度與共軛深度外，水躍本體的種種現象是一直隨著時間在改變；自由面的情況也不例外。但是以長時間平均而言，水躍本體內的種種現象應呈現某些蛛絲馬跡可言。以目前情況而言，只有水躍自由面較為多人探討，同時它兼具上述的共識。因此本文以Rajaratnam et al. (1968)的研究結果為判斷相關因子對模擬水躍的影響之依據。無因次的平均水躍剖面 (Mean jump profile) 可表示為

$$\eta = f(\lambda) \quad (31)$$

式中， λ 與 η 為無因次距離與深度， $\lambda = x/X$ ， x 軸原點設於水躍起點， $X = h_1 [5.08Fr_1 - 7.82]$ ， h 為各斷面的深度，原點設於渠底。 $h = 0.75\eta \times (h_2 - h_1) + h_1$ ，式(31)的函數關係示於文獻Subramanya (1985)。模擬水位 H 與 h 間的差距 Δh 為

$$\Delta h_i = H_i/h_1 - h_i/h_1 \quad (32)$$

式中，右下註腳 i 代表第 i 行晶格。因此模擬水位 H 與式(31)的推測水位 h 之吻合程度可部份反映於水位差距 Δh_i 之標準偏差 HSD 上 (i 自2到IP1)。

4.1 自由面

參閱式(32)，在未淹沒或未停止計算之前，水位差距 Δh_i 的標準偏差 HSD 是隨著時間或循環的增加而一直改變的。在這一段時間內標準偏差為最小時的模擬自由面展示於圖3至圖9。參閱圖3至圖9，模擬自由面 H/h_1 以實心點表示，而式(31)所推測的自由面 h/h_1 則以實線表示。為了比較這兩者之間的差距，本研究採用探討儀器誤差的概念予以分析 (Mill, 1983)。誤差來源可分成兩方面：偏向誤差 (Bias error) 與精度誤差 (Precision error)。前者代表儀器本身測得真值 (True value) 或真關係 (True relationship) 的能力，必須藉助於同真值與真關係比較後，才可瞭解這些誤差。而後者代表儀器顯示同一值與同一關係的能力。精度誤差可利用統計方法求得，其值為 $\sqrt{1+1/n}$ 、標準偏差與 Two-Tailed students Values for

95 - Percent Confidence 等三項之乘積，其中 n 代表讀數個數或組數。因此，精度誤差的來源係以標準偏差為主。利用同一概念可大致瞭解模擬自由面 H/h_1 與式(31)所推測的自由面 h/h_1 間的差距，但是用詞須加修改，偏向誤差改為傾向差距 (Tendency deviation)，精度誤差改為精度差距 (Precision deviation)，但後者以標準偏差為代表。

傾向差距的衡量方式頗多。然而，由於模擬自由面 H/h_1 均小於式(31)的推測值 h/h_1 。本研究採用兩者間的最小差距做為傾向差距 ϵ ，但最左邊斷面 ($x/h_1 = 0$) 除外，因在此斷面上兩者之差距等於0 (h/h_1 與 H/h_1 均等於1)。故傾向差距就相當於實線與空心點間的最小垂直距，其值與上游福祿數 Fr_1 間的關係示於圖10。圖3至9的虛線就是由實線扣掉傾向差距 ϵ 而求得的。如圖10所示，傾向差距先隨著上游福祿數 Fr_1 的增加而遞增，直到 $Fr_1 = 4$ 時，而後就逐漸趨近於一定值，約為0.4。傾向差距為無因次，係相對於上游超臨界流深度 h_1 ；在模擬過中，左邊界入流深度均設為 h_1 。當 $Fr_1 = 4$ 時， h_2/h_1 約等於5， h_2 為共軛深度。因此，以共軛深度而言，傾向差距的幅度並不大，約為10%。依目前傾向差距的定義，模擬自由面小於式(31)的推測值。

4.2 標準偏差

如式(32)所示的水位差距 Δh_i ，其標準偏差 HSD 只代表模擬自由面針對式(31)所描述自由面形狀的散佈 (Scattering) 情形，與後者 (整條) 之上下位置無關。因此，相對於實線以及虛線，展示於圖3至圖9的模擬自由面 (實心點) 的標準偏差幾乎相等，因為除了最左邊斷面外，在其餘斷面上，實線與虛線都是等垂直差距 ϵ 。各不同時間或循環的標準偏差 HSD 均不相同。在未停止計算與未淹沒之前，標準偏差之最小值 HSD_{min} 隨著不同的上游福祿數 Fr_1 而異，其變化展示於圖11。如圖所示，最小標準偏差隨著上游福祿數 Fr_1 的增加而遞增， Fr_1 的值自2到8， HSD_{min} 值約自0.1增至0.8。參閱文獻 (施, 1995) 圖3，其時的過度係數 ϵ_s 與 ϵ_p 均以常數計，且於下游設置一閘門以提高模擬自由面的水位，同樣地最小標準偏差也隨著上游福祿數的增加而遞增， Fr_1 的值自2到8， HSD_{min} 自

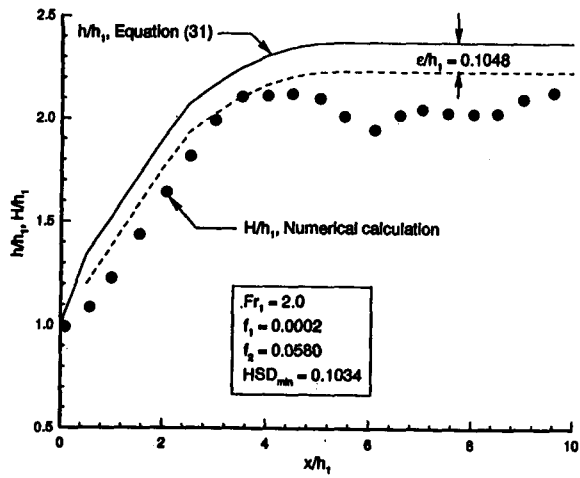


圖 3. 模擬水躍 ($Fr_1=2$)

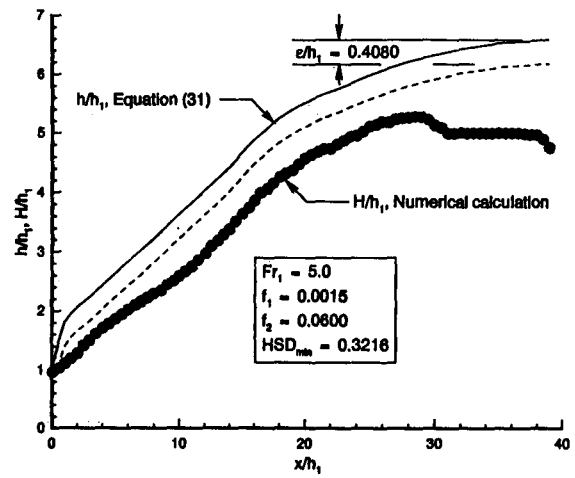


圖 6. 模擬水躍 ($Fr_1=5$)

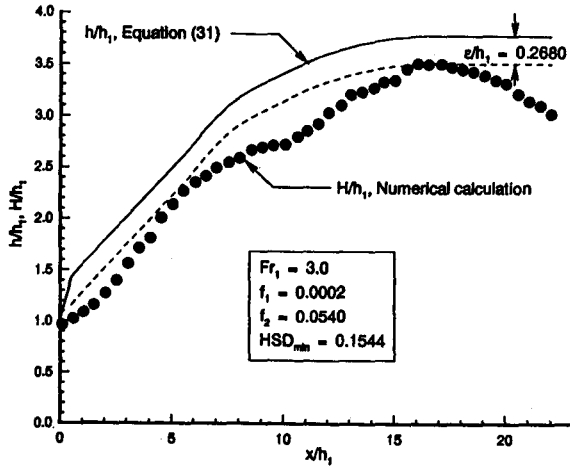


圖 4. 模擬水躍 ($Fr_1=3$)

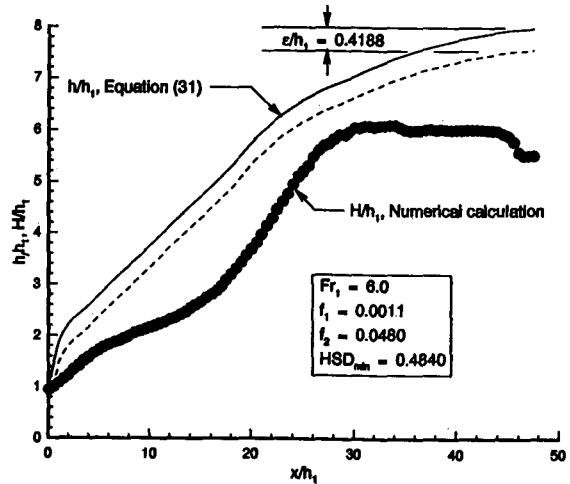


圖 7. 模擬水躍 ($Fr_1=6$)

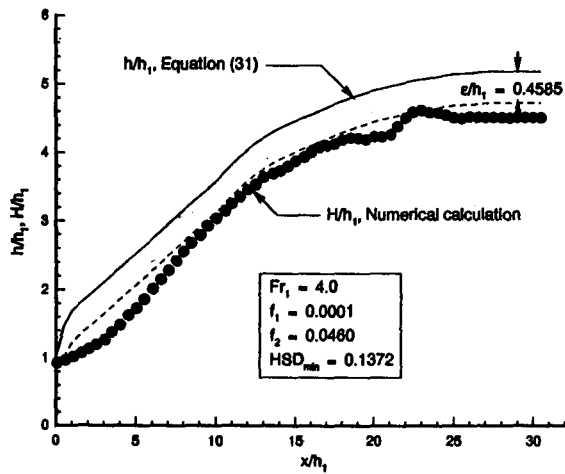


圖 5. 模擬水躍 ($Fr_1=4$)

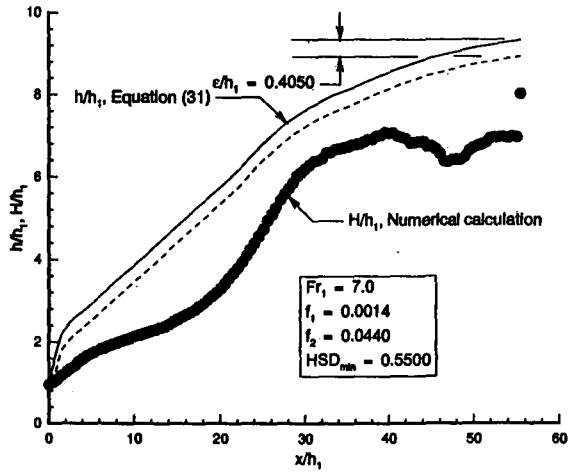


圖 8. 模擬水躍 ($Fr_1=7$)

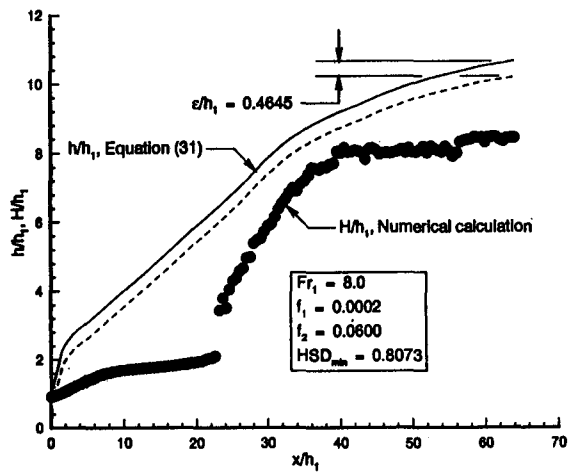


圖 9. 模擬水躍 ($Fr_1=8$)

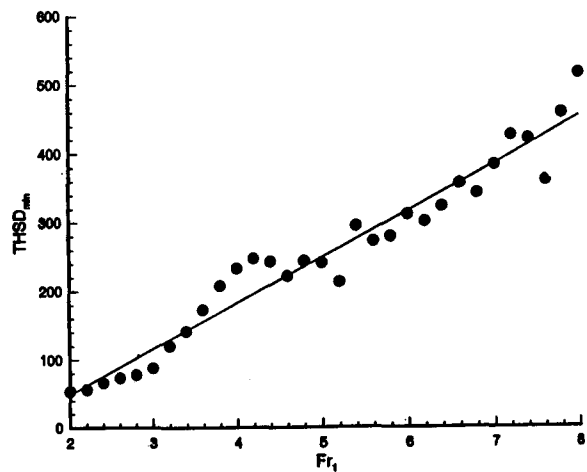


圖 12. $THSD_{min}$ 與上游福祿數間之關係

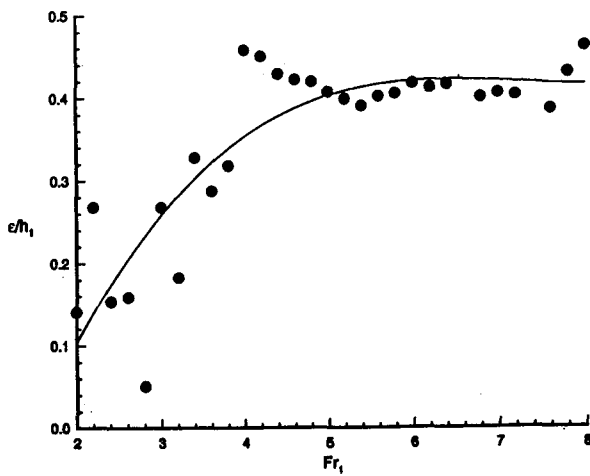


圖 10. 傾向差距

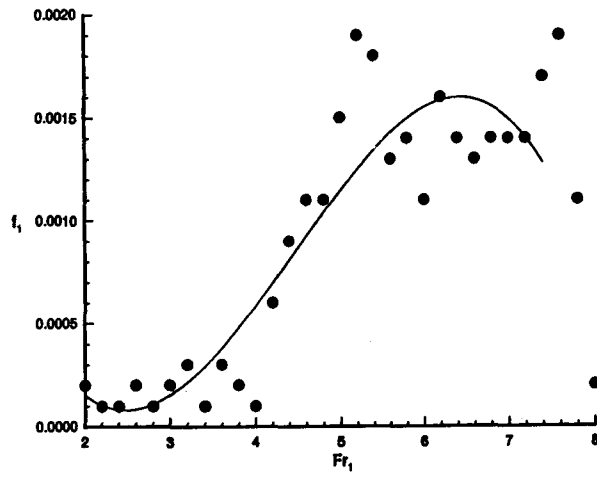


圖 13. 摩擦因子 f_1 與上游福祿數間之關係

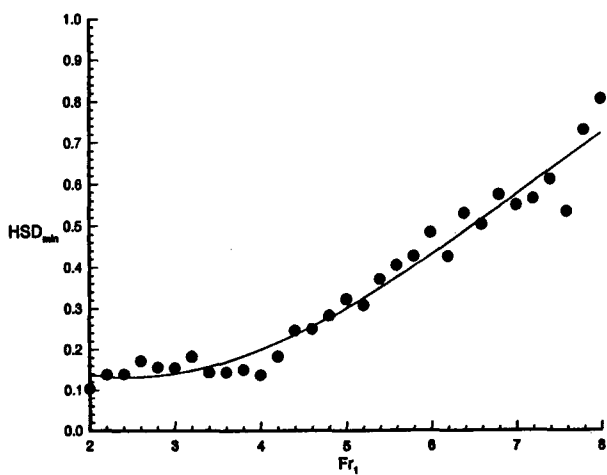


圖 11. 最小標準偏差

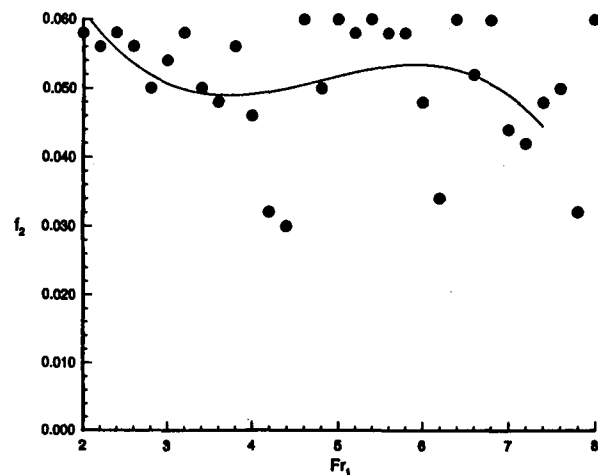


圖 14. 摩擦因子 f_2 與上游福祿數間之關係

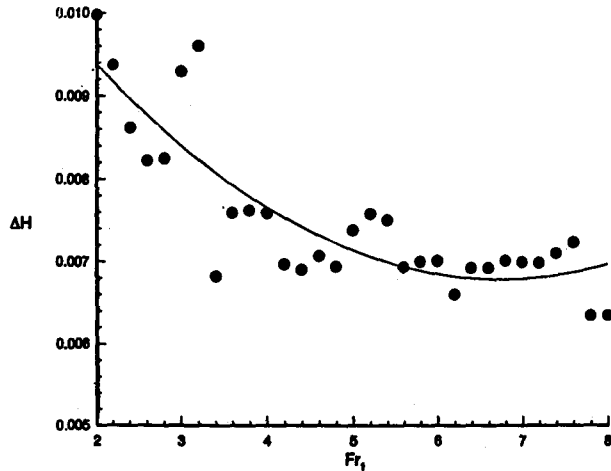


圖 15. 兩相鄰時段之差距與上游福祿數間之關係

0.3 增至 2；而今， Fr_1 等於 8 時， HSD_{min} 才等於 0.8073。因此，若只以平均水躍剖面的形狀而言（不計傾向差距），渦度粘滯係數較適宜利用渠流與管流的相似性，由摩擦因子間接求得。這樣的處理方式，其優點為容許渦度粘滯係數可視為一變數，視流動而定，其影響反映於斷面平均速度與深度上，如式(6)與(7)所示；而保持不變或視為常數的部份縮小或只局限於摩擦因子上。展示於圖 3 至圖 9 的實線代表式(3)所推測的自由面，僅是多數的平均（對時間）或一般的趨勢而已，故為一平滑的曲線。實際上，水躍本體的自由面為一非常崎嶇不平的水位變化，根本不可能找到一適當的函數關係式予以描述；更甚者，它又是隨著時間一直在改變。據作者所知，到目前為止，這並未見諸於文獻上，僅僅照片的展示倒常見於各種文獻上。對於水躍本體而言，只有超臨界流深度及其共軛深度與水躍長度為一致性的共識，其內的瞬時自由面非常難以分析，幾乎是不可能。這一點頗類似於處理亂流時所持有的態度，只能描述平均速度（Mean velocities）剖面，無法分析瞬時速度剖面。因此，式(3)只代表平均水躍剖面，而標準偏差可視為代表瞬時水躍自由面之散佈。一般而言，上游福祿數 Fr_1 可用以代表水躍強度，標準偏差也同樣可用以衡量水躍強度的指標。所以標準偏差不可能等於 0，其值不但深受 Fr_1 的影響，而且應該隨著上游福祿數增加而遞增，正如圖 11 所示。另一方面，水躍的形成係由

於上游超臨界流的龐大能量極為不穩定，而又無法向下游宣洩得了，因而才形成水躍，消耗掉部份能量，以致轉變成較穩定的次臨界流。以這一點而言，最穩定的水躍，其標準偏差應為最小。

4.3 上游福祿數之影響

在未淹沒或未停止計算之前，模擬自由面標準偏差為最小時的對應時間 $THSD_{min}$ ，摩擦因子 f_1 與 f_2 ，及兩相鄰時刻的水位差距 ΔH ，式(20)，分別展示於圖 12 至 15。水平座標軸均為上游福祿數 Fr_1 ，而垂直座標軸分別為上述變數或參數。

參閱圖 12，在模擬過程中，形成標準偏差 HSD 為最小時所需的時間 $THSD_{min}$ 幾乎與上游福祿數 Fr_1 的增加呈線性遞增。若標準偏差可用以衡量水躍穩定程度，那麼 $THSD_{min}$ 之值隨著 Fr_1 值的增加而遞增是合理的；因為 Fr_1 愈大，則代表流動愈不穩定，愈需較長的時間才會趨近穩定。

標準偏差為最小時，上游福祿數 Fr_1 對摩擦因子 f_1 與 f_2 的影響示於圖 13 與 14。如圖所示，由於數據相當分散，很難得明確的趨勢，實線只代表大致的趨勢而已。然而圖 13 與 14 尚可供參考引用，原因如下。模擬結果顯示只要摩擦因子的值在圖 13 與 14 所標示的附近，模擬自由面的標準偏差都相當小，而且都在對應的極小值 HSD_{min} 之附近。以 $Fr_1 = 4$ 為例，模擬自由面的標準偏差為最小時， HSD_{min} 等於 0.1372，而對應的 f_1 與 f_2 分別等於 0.0001 與 0.046。只要 f_1 值小於 0.0003，同時 f_2 介於 0.042 與 0.048 之間。都可獲得相當小的標準偏差，其值只比上述的 0.1372 略大千分之一而已。因此，圖 13 與 14 可提供自由面的標準偏差為最小時，摩擦因子大致的座落所在。本研究探討摩擦因子的範圍為 $0.0001 \leq f_1 \leq 0.003$ 與 $0.03 \leq f_2 \leq 0.06$ ， f_1 與 f_2 分別為 0.0001 與 0.002。若範圍擴大，例如 f_1 與 f_2 的間距分別擴大為自 0.0001 至 0.004 與 0.03 至 0.07，座落所在完全不受影響。

此外，參閱圖 2，若 f_1 與 f_2 的分界點不設在中間，即設於 $X_{max} + (L_j - X_{max})/2$ 之處，而將 L_j 與 X_{max} 間的距離分成十等分，總共有十一種不同的分界點，則 f_1 與 f_2 的引用範圍有十一種不同的組合。模擬結果顯示模擬自由面的最小標準偏差幾乎不受影響。易言之，如果只針對自由面的最小標準偏差

差而言，分界點只須考慮設在中間即可。

當自由面的標準偏差為最小時，參閱式(9)，相鄰兩時段的最大水位差距 ΔH 與上游福祿數 Fr_1 間的關係展示於圖 15。雖然數據分佈略顯分散，但可明顯地看出 ΔH 隨著 Fr_1 值的增加而遞減，大致趨近於 0.007，其值與採用 MAC 方法模擬堰流與洩水流相當（施，1994）。

五、結 論

利用 Fisher 的經驗公式，並配合渠流與管流的相似性，Reynolds 運動方程式內的渦度粘滯係數 e_x 與 e_y 可以深度、斷面平均速度及摩擦因子的函數式表之。雖然摩擦因子以一定值計，但是深度與斷面平均速度仍然可反映流動的影響。因此，渦度粘滯係數並不保持不變，而是受流動的控制。循此角度來探討渦度粘滯係數之優點為可充分利用摩擦因子的完整性、簡易性與普遍性。

水躍本體為一極複雜、大尺度的亂流，且含一相當不穩定的自由面，其水位一直隨著時間在改變。但是以長時間的平均而言，自由面將趨近於一平均剖面，如式(3)所示。除了共軛深度外，這是目前吾人較一致的共識之一。所以，模擬自由面與平均水躍剖面間的標準偏差可用以衡量模擬技巧的適宜性。標準偏差愈小就代表模擬自由面愈趨近式(3)所示的形狀，同時模擬自由面也愈穩定。標準偏差只代表兩者之間的精度差距，與傾向差距毫無關聯。

渦度粘滯係數採用如式(6)與(7)的表示方式，可使模擬自由面之標準偏差大幅度減小。上游福祿數 Fr_1 自 2 增至 8，最小標準偏差大致自 0.1 增至 0.8，其間的變化乎幾趨近於線性。在同樣的範圍，若渦度粘滯係數視為定值，則最小的標準偏差大致自 0.4 增至 2。

相對於式(3)，傾向差距只用以衡量模擬自由面是整體偏高或是偏低；易言之，模擬自由面在式(3)所示之曲線的上方或是下方。本研究模擬自由面均偏低，隨著上游福祿數自 2 增至 8，傾向差距先自 0.1 急劇遞增，而後再趨近於 0.4。

由於水躍前端的自由面坡度相當陡，同時末端的共軛深度又遠高於水躍前的超臨界流深度。

因此，水躍前端須使用較小的摩擦因子 f_1 （介於 0.0001 至 0.003），但末端須採用較大的摩擦因子 f_2 。若採用單一值的摩擦因子，則無法獲得較佳的模擬自由面。為了獲得較佳的模擬自由面，摩擦因子 f_1 與 f_2 的值視上游福祿數 Fr_1 而定，可是其間的關係，並不大明確。大致上，隨著 Fr_1 值的增加， f_1 的值先遞增，而後再趨於 0.0015，但 f_2 的值大部份座落於 0.046 與 0.06 之間。

數值技巧係源自變量流（Unsteady flow）的觀點。當模擬自由面的標準偏差為最小時，其相鄰兩時段的最大水位差距大致在百分之一以下。這個值與模擬堰流的情況相當。

模擬自由面的標準偏差為最小時，其時間或總時段數視上游福祿數 Fr_1 的值而定，但隨著 Fr_1 值的增加而增。

式(3)所示的平均水躍剖面（對時間）為一平滑曲線；實際上，水躍本體的瞬時自由面應該是不規則的，崎嶇不平的。在此情況下，針對前者的形狀，後者呈現散佈是合理的。易言之，以式(3)所示的形狀而言，模擬自由面的標準偏差不可能等於 0。本研究只能基於穩定的看法以最小標準偏差予以分析，其可能的最小值又為何？不得而知，這是值得再深入探討。另一方面，如何減小傾向差距也同樣值得探討。

六、致 謝

本校張嘉玲小姐的細心打字，致本論文得以完成，作者在此謹致深厚謝意。

七、參考文獻

- Amsden, A.A. and Harlow, F.H., "The SMAC Method: A Numerical Technique for Calculating Incompressible Flows", Los Alamos Scientific Laboratory report LA-470, 1970.
- Chippda, S., Ramasewamy, B. and Wheeler, M.F., "Numerical Simulation of Hydraulic Jump", Int. J. Numer. Methods in Fluids, vol. 37, 1994, pp. 1381-1397.
- Daily, J.W. and Harleman, Donald R.F., "Fluid Dynamics", Addison-Wesley Pub. Co. Inc., Reading, Mass.,

（文轉第 35 頁）