

MAC方法配合高度函數應用於洩水流

Applications of the MAC Method with Height Function in Sluice Gate Flow

淡江大學水資源及環境工程學系教授

施 清 吉
Ching-chi Shih

淡江大學水資源及環境工程學系研究生

林 富 松
Fu-song Lin

摘 要

根據 Navier-Stokes 運動方程式及連續方程式，採用 MAC 方法並配合一高度函數模擬二維黏滯性不可壓縮之洩水流。模擬結果與前人研究結果之比較，計有自由面、流量係數、收縮係數與壓力分佈。模擬洩水流的上游福祿數大約介於 0.1 到 0.3，視洩水閘門間隙及總水頭間的比值而區分，其值計有 0.3、0.4 與 0.53 等三種。在模擬過程中，入流總水頭為定值，但入流深度與速度均為浮動。趨近於定量流之判斷以兩相鄰時段的相對差距為指標，其值約為 $O(10^{-4})$ 。

關鍵詞：洩水流，MAC 方法，自由面。

ABSTRACT

Based upon the Navier-Stokes equations of motion and the continuity equation, a two dimensional flow of an incompressible fluid under a sluice gate is numerically studied using the MAC method with a height function to represent the water surface. The numerical results consist of the free surface, the discharge coefficient, the contraction coefficient, the pressure distribution on the sluice gate, and the location of vena contracta. The upstream Froude number ranges between 0.1 to 0.3, and ratios of the gate opening to the total head are 0.3, 0.4 and 0.53. In the course of simulation, the total head remained unchanged, while the inflow depth and the inflow velocity are changed with cycle. The criterion for simulating flow to approach steady was based on the relative deviation of two consecutive depths, which is of order $O(10^{-4})$.

Keywords : Sluice gate flow, MAC method, Free surface.

一、前 言

應用 Navier-Stokes 運動方程式及連續方程式 (Continuity Equation) 模擬二維洩水流 (Two dimensional Sluice

gate flow)，其假設為水平渠底，自由面 (Free Surface) 以大氣壓計，且忽略表面張力。數值技巧採用 MAC 方法 (The method of Marker-and-Cell)，並配合一高度函數，用以計算自由面。高度函數為在自由面上的

機動條件(Kinematic condition) (Hirt, et al. 1975; Nichol, et al. 1971; Nichol, et al. 1973; Hirt, et al. 1968; Welch, 1965)。MAC 方法為一顯性有限差分法(Explicit finite difference method)，須迭代與修正相關的因變數之值，直到兩相鄰時段(Time Step)的相對差距小於容許差距為止。此時，才分析流況，並以模擬結果與前人結果比較。

二、理論背景

二維不可壓縮洩水流(Two dimensional incompressible sluice gate flow)須滿足 Navier-Stokes 運動方程式及連續方程式，即(Daily et al. 1970)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho} \right) - g + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

與

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

式中 t ：時間

x, y ：縱向(或流向)與高度座標，對應的速度分量 (Velocity component)分別為 u 與 v

p ：壓力

ρ ：密度

ν ：運動黏度係數(Kinematic Viscosity)

g ：重力加速度

自由面的邊界條件有二：一是動力條件(Dynamic condition)，即

$$P_s = 0 \quad (4)$$

右下註腳's' 代表在自由上；二是機動條件(Kinematic condition)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_s \frac{\partial h}{\partial x} + v_s \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

式中 h 為自由面高度。此外，二維洩水流還須滿足在固體邊界上的邊界條件，渠底與洩水閘門，其條件為法線速度與切線速度均須等於 0。

三、數值計算

矩形的計算範圍分割成許多小矩形晶格(Cell)，其範圍稱之為計算網格(Computational mesh)，同時其底適為渠底，如圖 1. 所示。晶格可為同樣大小的均勻晶格，或大小不一的非均勻晶格，本文採用均勻晶格。

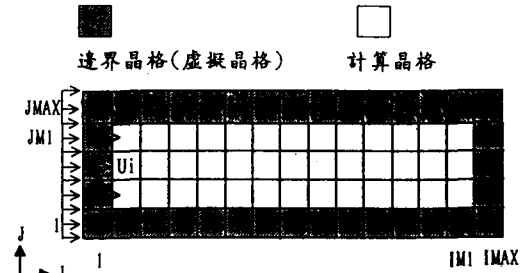


圖 1. 晶格座標系統

MAC 方法配合高度函數模擬洩水流的主要架構及其執行步驟共分成四大單元：構建問題、計算下時段(Advanced time step)之暫時速度(Temporary velocities)、修正與迭代以求得下時段的真正速度與真正壓力、及利用在自由面上的機動條件計算下時段的自由面高度。執行順序就依照上述四大單元的順序，一再重覆地執行。每重覆一次即增加或前進一個時段間距(Time step)。各種問題的類別與特徵均反映於第一個單元上。此外，尚包括一個共用單元，第二與第四單元每次執行完畢必須執行這共用單元，同時每次修正(第三單元)完畢也必須執行這共用單元。共用單元或稱之為邊界單元，用以處理所須的邊界條件。由於矩形的計算網格是有限的範圍，必須於其左側與右側分別設定已知的入流條件與連續流出條件(Continuative outflow condition)。其次，MAC 方法採用交錯格點(Staggered grid point)，晶格只有法線速度。因此，任何須引用切線速度的邊界條件必須以另一方式表示之。參閱圖 2.，若晶格底邊正好為渠底，則位於 A 點之切線速度 u 必須等於零。MAC 方法只好於其下虛設一個晶格，再以 $u_{i,j-1} = -u_{i,j}$ 表示不滑動條件(No-slip condition)，或以 $u_{i,j-1} = u_{i,j}$ 代表滑動條件。這種情形也同樣將出現於洩水閘門。同時，前述的修正與迭代均須與鄰近的四格晶格有關。由於上述諸理由，在計算網格之外再圍繞一圈虛擬晶格(Phantom cell)或邊界晶格(Boundary cell)。加上虛擬晶格後，全

部的晶格數為 $(IBAR+2) \times (JBAR+2)$ 。為了便於認識，另定義 $IP1=IBAR+1$ ， $JP1=JBAR+1$ ， $IP2=IBAR+2$ ， $JP2=JBAR+2$ 。所以計算網格的範圍為沿 x 軸 i 自 2 至 $IP2$ ，沿 y 軸 j 自 2 至 $JP1$ ； i 與 j 分別為 x 與 y 的晶格位置指標(Index)。

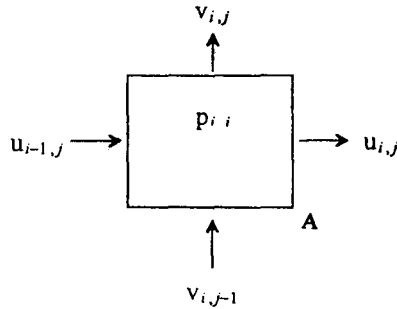


圖 2. 壓力與速度在晶格之位置

3-1 下時段之暫時速度

參閱圖 2，由式(1)與(2)可求得暫時速度的初始值，即

$$\begin{aligned} (\hat{u}_{i,j}^{n+1})^0 = & u_{i,j}^n + \delta t \left\{ -FUX^n - FUY^n + VISX^n \right. \\ & \left. + \left[(\rho/\rho)_{i,j}^n - (\rho/\rho)_{i+1,j}^n \right] / \delta x \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\hat{v}_{i,j}^{n+1})^0 = & v_{i,j}^n + \delta t \left\{ -FVX^n - FVY^n + VISY^n - g \right. \\ & \left. + \left[(\rho/\rho)_{i,j}^n - (\rho/\rho)_{i+1,j}^n \right] / \delta y \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

式中，上標 $n+1$ 、 n 分別代表第 $n+1$ 次循環(下時段)與第 n 次循環(前時段)；等號左邊為下時段速度的暫時值，其上特冠一 ' $\hat{\cdot}$ '，括弧外的上標 ' 0 ' 代表而後迭代的初始值或猜測值，速度的修正與迭代述於下一節；下標 i 與 j 分別代表沿 x 與 y 軸之晶格位置指標； δt 為兩時段之時段間距，設為 0.01 秒， δx 與 δy 分別為沿 x 與 y 軸之晶格尺寸(Cell size)，兩者均設為 0.05 公尺。上述式中的各項差分式(以大寫字母表示)代表不同性質的力，其詳式可參閱林(1994)。對流加速度(Convective acceleration)之差分式分別以 FUX^n 、 FUY^n 、 FVX^n 與 FVY^n 等四項表示，式中均包含

一個上游權重參數 (Upstream weighting parameter) α ，其值設為 1.0。黏滯剪力項是以 $VISX^n$ 與 $VISY^n$ 等兩項表示，式中運動黏滯係數 ν 設為

$$1.12 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}，其差分式採用中央差分(Golafshani 1988)。$$

3-2 迭代與修正

由式(6)與(7)所求得的速度僅做為暫時值的初始值，因其值無法滿足連續方程式。所以，吾人必須一再修正與迭代，直到由連續方程式所求得之發散量(Dilatation)小於容許誤差止，則其時的速度與壓力才是下時段的真正速度 $u_{i,j}^{n+1}$ ， $v_{i,j}^{n+1}$ 與真正壓力 $P_{i,j}^{n+1}$ 。

壓力迭代式為

$$\left[\left(\frac{\hat{p}}{\rho} \right)_{i,j}^{n+1} \right]^{k+1} = \left[\left(\frac{\hat{p}}{\rho} \right)_{i,j}^{n+1} \right]^k + \left[\left(\frac{\delta \hat{p}}{\rho} \right)_{i,j}^{n+1} \right]^k \quad (8)$$

式中，上標 k 代表迭代階次，而壓力增量 $\delta \hat{p} / \rho$ 視發散量而定，後者可由式(3)之差分式求得，即

$$\left(\frac{\delta \hat{p}}{\rho} \right)_{i,j}^{n+1} = -\omega \frac{\frac{\hat{u}_{i,j}^{n+1} - \hat{u}_{i-1,j}^{n+1}}{\delta x} + \frac{\hat{v}_{i,j}^{n+1} - \hat{v}_{i,j-1}^{n+1}}{\delta y}}{\delta t \left[\frac{\gamma_{i+1,j} + \gamma_{i-1,j}}{(\delta x)^2} + \frac{\gamma_{i,j+1} + \gamma_{i,j-1}}{(\delta y)^2} \right]} \quad (9)$$

式中， ω 為鬆弛因子(Relaxation factor)，用以控制數值穩定與收斂速度，其值介於 0 與 2 之間。另外， γ 為障礙物(洩水閘門)晶格參數。若為障礙物晶格，則設定 γ 值為 0，因為其晶格之速度不予以修正，而其餘晶格之 γ 值均設為 1，這一用意將示於下述的速度迭代。式(9)僅適用於充斥晶格，即晶格之四週無任何空晶格。若為表面晶格，壓力增量 δp 係根據線性內插(或外插)求得，即

$$\left(\delta \hat{p}_{i,jt}^{n+1} \right)^k = (1-\eta) \left(\hat{p}_{i,jt-1}^{n+1} \right)^k + \eta p_s - \left(\hat{p}_{i,jt}^{n+1} \right)^k \quad (10)$$

式中，下標 jt 代表自由面在 y 方向的晶格位置指標，其晶格上邊高度為 YJ_{jt-1} ，而其內的自由面高度為 HT_i^n ； p_s 為作用於自由面的壓力，其值設為 0，參閱式(4)； $\eta = \delta y / (HT_i^n - YJ_{jt-1})$ 。

除了空晶格外，其餘晶格(充斥晶格，表面晶格與障礙物晶格)均須利用下式修正速度，即

$$\left(\hat{u}_{i,j}^{n+1}\right)^{k+1} = \left(\hat{u}_{i,j}^{n+1}\right)^k + \delta t \frac{\left[\left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial \rho}\right)_{i,j}^{n+1}\right]^k}{\delta x} \gamma_{i+1,j} \quad (11)$$

$$\left(\hat{u}_{i-1,j}^{n+1}\right)^{k+1} = \left(\hat{u}_{i-1,j}^{n+1}\right)^k - \delta t \frac{\left[\left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial \rho}\right)_{i,j}^{n+1}\right]^k}{\delta x} \gamma_{i-1,j} \quad (12)$$

$$\left(\hat{v}_{i,j}^{n+1}\right)^{k+1} = \left(\hat{v}_{i,j}^{n+1}\right)^k + \delta t \frac{\left[\left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial \rho}\right)_{i,j}^{n+1}\right]^k}{\delta y} \gamma_{i,j+1} \quad (13)$$

$$\left(\hat{v}_{i,j-1}^{n+1}\right)^{k+1} = \left(\hat{v}_{i,j-1}^{n+1}\right)^k - \delta t \frac{\left[\left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial \rho}\right)_{i,j}^{n+1}\right]^k}{\delta y} \gamma_{i,j-1} \quad (14)$$

當所有充斥晶格皆能滿足式(3)之後，才停止迭代，同將符號改以無 '^' 表示。

3-3 自由面高度

在壓力與速度迭代完成後，即產生下時段的真正速度及真正壓力，再應用式(5)的差分式即可求得下時段的自由面高度。其中， $u_s \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$ 項可仿照 Navier-Stokes 差分式中之 FVX 項，以上游權重差分計算之，而 v_s 只能以線性內插求得。則下時段自由面高度 HT_i^{n+1} 的函數關係式變為

$$HT_i^{n+1} = HT_i^n + \delta t \cdot F\left(u^{n+1}, v^{n+1}, HT^n\right) \quad (15)$$

式中，函數 F 的詳細關係式可參閱施 (1994)

四、結果與討論

如圖 1. 所示的計算網格，水平幅度自 $x = -5.0$ 公尺至 2.5 公尺，垂直幅度自 $y = 0$ 至 6 公尺。洩水閘門之上游面設於 $x = 0$ ，寬度適為一個晶格尺寸，即 0.05 公尺，閘門間隙為 a 。模擬之上游福祿數 F_{r1} 大約介於 0.1 與 0.2 之間。入流深度 h_i 與入流速度 u_i (或初始深度與初始速度) 均為浮動值；然而，其總水頭

$$H_0 = h_i + \frac{u_i^2}{2g}$$

在模擬過程中卻維持為一定值。模擬

之情況視比值 a/H_0 而定，共有三種 $a/H_0 = 0.3, 0.4$ 與 0.53。

4-1 定量流之判斷

本研究採用之數值技巧是以變量流(Unsteady flow)之差分式來模擬洩水流。判斷程式停止計算或已足夠趨近定量流的依據為相鄰時段的相對差距之最大值，即

$$\Delta\Phi = \left\{ \begin{array}{l} \left| \Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n \right| \\ \left| \Phi_{i,j}^{n+1} + \Phi_{i,j}^n \right| \end{array} \right\}_{\max} \quad (16)$$

式中， Φ 為因變數之統稱，即 u, v, p 或 h ，下標 'max' 係針對所有晶格的最大值。模擬結果顯示最小的相對差距 $\Delta\Phi$ 視因變數而異。一般而言， Δp 與 Δh 為同一大小等級 (Same order of magitude)，約為 $O(10^{-5})$ ；但速度卻大一等級，即為 $O(10^{-4})$ 。

這種現象同樣也出現於模擬堰流(Weir flow)(施,1994；施等,1993)。洩水流與堰流的另一相似地方就是發散量很快就小於容許誤差，即迭代與修正次數非常少。本文的計算時間設為 100 秒，若前半段的迭代與修正次數 ITER 不予以探討，因其間的 ITER 值較大，同時隨時段的變化幾乎毫無規則可言；但自某一時段後，ITER 就變為定值，不再隨著時段的增加而改變，其值均為 2。堰流也展現相同的現象，但 ITER 的值為 1 而不是 2。這兩種類似的現象只能呈現於自由面沒有急遽變化的情況。如果自由面急遽上升，例如水躍，則其最小的相對差距大約增加了一百倍，即 $\Delta h = O(10^{-2})$ ， $\Delta u = \Delta v = O(10^{-1})$ ；同時上述的迭代與修正次數，也增加了好幾十倍，大約在四十左右(施,1995)。綜合上述的探討，判斷模擬流況趨近於定量流的依據以 Δh 為宜，但是其值視不同的情況而異；另當兩相鄰時段的相對差距已經是最小時，其迭代與修正次數 ITER 可幾乎維持為一定值，但是，其值也同樣視情況而定。

除了上述判斷趨近於定量流的方法外，另一個可供比較與參考的，就是根據渠流 (Channel flow) 的連

續方程式，即 $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hV)}{\partial x} = 0$ ， V 為断面平均速度。

若流況為定量流，則 $\partial h/\partial t = 0$ ，所以 $\partial(hV)/\partial x = \partial q/\partial x = 0$ ，式中 q 為單位寬度流量。渠流是根據單方向(Unidirection flow)分析而得，只有 $\partial q/\partial x \neq 0$ 沿流向的断面平均速度 V 。若非一維流， $\partial q/\partial x \neq 0$ ，但可由式(3)積分而得，其結果為

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} u(x, h) - v(x, h) = \frac{\partial h}{\partial x} u_s - v_s \quad (17)$$

式中， $u(x, h)$ 與 $v(x, h)$ 分別為在自由面上的水平速度與垂直速度。單方向的定量流顯示單位寬度流量不沿流向改變，但二維流就不見得，其值示於式(17)的等號右邊。因此，吾人可從二方面計算單位寬度流量 q 沿流向 x 的變化。一是直接根據定義，即 $q = \int_0^h u dy$ ，其結果以實線示於圖 3。另一方面，利用式(17)等號右邊的自由面梯度 $\partial h/\partial x$ 與在自由面上的兩速度分量 u_s 與 v_s (由晶格之速度分量 $u_{i,j}$ 與 $v_{i,j}$ 以線性內插法求得)計算流量梯度 $\partial q/\partial x$ ；而後，再由階梯方法(Step method)求各断面的流量，其結果以虛線示於圖 3 (閘門之相對間隙 a/H_0 為 0.4)。參閱圖 3，從實線的分佈看來，除了在緊接洩水閘門的附近外，單位寬度流量 q 並不沿流向 x 改變；但從閘門上游的一個定值 $2.02 m^2/s$ 急遽地變成閘門下游的另一個定值 $2.17 m^2/s$ 。定量流的單位寬度流量沿流向保持不變，是依據單方向流的概念分析而得的，二維流並不見得有同樣的特徵。但是圖 3 的實線分佈仍然可適用於任一断面上，不適用於緊接閘門之附近，因閘門上游與閘門下游的單位寬度流量並不相同。單位寬度流量之突然改變大部分導致於幾何因素，上述的現象也同樣出現於堰流。比較實線與虛線的分佈，除了洩水閘門的上游外，大約自 $x = -1.0$ 公尺以上，在其餘的地方，兩者的差距甚大。實線所示的流量是直接根據流量定義計算而得，只考慮整體(over all)的效果，其細節並未一一考慮。可是，虛線則不然，其值是根據自由面梯度及在自由面上的速度分量由式(17)求得。一般而言，實線之獲得較簡單，也就較準確；但虛線的求得較複雜，相形之下，也跟著較不易準確，除非自由面梯度及在自由面上的速度分量都估算得相當準確。以在 $x = 0$ 之處的相對差距為例，其值約為 6%

[$= \frac{2-1.88}{2}$ ，單位為 m^2/s ，2 與 1.88 分別為實線與虛線所示之流量]。這樣大的相對差距並不算太嚴重。但是，從相反角度看來，這樣大的差距多多少少顯示引用目前所採用技巧來模擬自由面並不太完善。

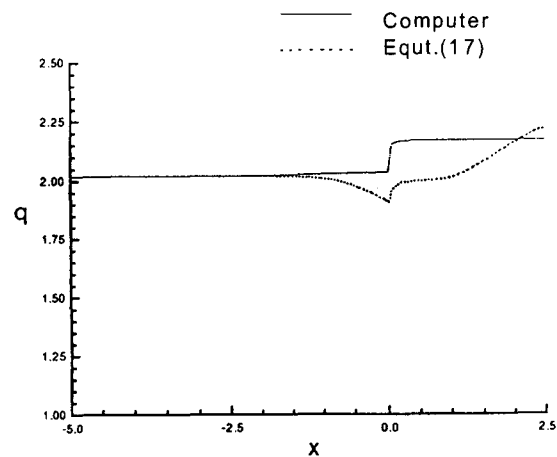


圖 3. 断面流量 q 與流量檢驗式之比較

4-2 自由面

數值模擬的自由面之典型代表以實線示於圖 4。為方便起見，自由面以洩水閘門為分界點，位於其上稱之為上游自由面，而位於其下則稱之為下游自由面。上游自由面為 M_1 型曲線，故水位沿流向(自左向右)上升。可是因流線彎曲及離心力之故，下游自由面先下降而後上升，形成 M_3 型曲線。水位最淺處俗稱為束縮断面(Vena contrata)，其處的水位與洩水閘門間隙 a 之比值為 0.623。此值比一般常用的值(0.61)略大。不過，同樣的情況 Benjamin (1956) 的研究結果也顯示略高的比值(=0.638)。下游自由面之所以上升係由於渠底摩擦力。若渠底邊界條件改為滑動條件，則自束縮断面後的自由面將呈水平，正如圖 4 的虛線所示。

模擬自由面與前人研究結果之比較示於圖 5 與圖 6，分別為上游自由面與下游自由面。參閱圖 5，模擬自由面以實心三角形符號表示，其他圖形符號則分別為 Fangmeir et al. (1968) 與 Masliyah et al. (1985) 之研究結果。就「量」而言，模擬自由面非常接近前人之研究結果，在洩水閘門之附近，其間的差距幾乎等於 0；但此差距沿上游逐漸擴大，在 $x = -1.6$ 公尺

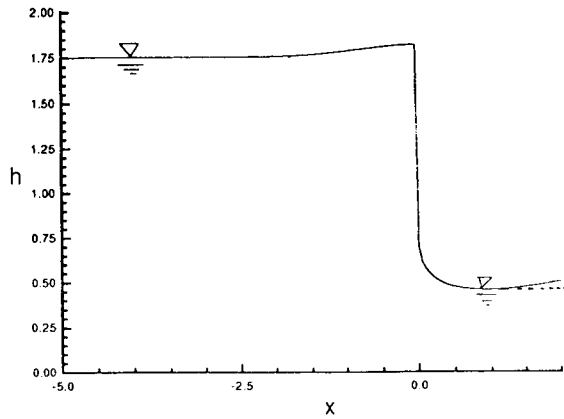


圖 4. $a/H_0=0.4$ 之自由面

0；但此差距沿上游逐漸擴大，在 $x = -1.6$ 公尺處，模擬水位約為 $0.961 H_0$ ，而前人結果為 $0.952 H_0$ ，其間的差距為 $(0.961 - 0.952)/0.952 * 100\%$ ，即 0.945% 。可能的因素之一係來自有限的計算網格，目前洩水閘門之上游只有 2.5 公尺。另外，圖六為自洩水閘門至束縮斷面間之比較，模擬結果同樣以實心符號表示，其他圖形符號則為前人之研究結果 Southwell (1964)，Benjamin (1956)，Fangmeier et al. (1968)。以「趨勢」而言，兩者完全一致；但是在「量」方面，其間的差距遠較上游自由面大，約為 4% ，確實的原因目前尚不得而知。

4-3 流量係數及收縮係數

流量係數 (Discharge coefficient) C_d 定義為

$$C_d = \frac{q}{a\sqrt{2gH_1}} \quad (18)$$

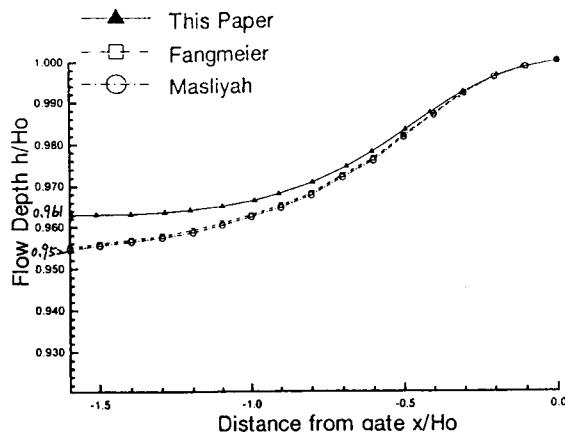


圖 5. $a/H_0=0.4$ 之上游段自由面

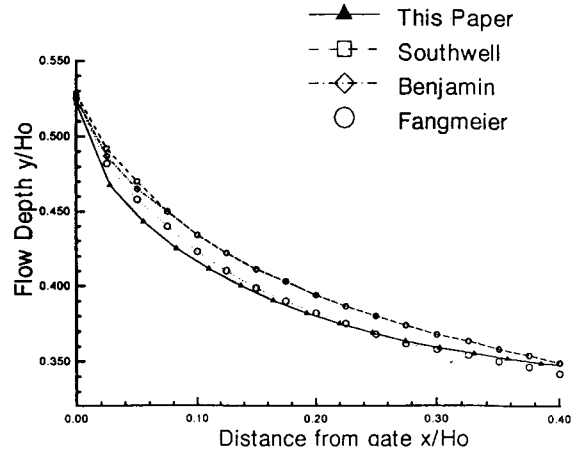


圖 6. $a/H_0=0.53$ 之下游段自由面

式中， H_1 為左側虛擬晶格 ($I=1$) 的自由面高度。數值計算的結果示於圖 7。流量係數 C_d 的值隨著相對間隙 a/H_0 的增加而遞減；這一趨勢與前人的研究結果完全吻合 (Fangmeier et al. 1968, Henry 1950, 郭 1992)。圖 7 顯示若比值 a/H_0 超過 0.5 ，則流量係數的計算值可能落在前人研究結果的範圍外。除此之外，流量係數之計算值尚稱合理；唯一的遺憾為數據嫌少。在前人的研究結果中，Henry (1950) 為實驗結果，而 Fangmeier et al. (1968) 為分析解。以洩水流而言，由實驗求流量係數的困難度不大，也比較準確；但分析解的困難度較大，也因此可能比較不準確。圖 7 顯示本研究的結果較接近實驗結果。易言之，以 MAC 方法配合高度函數模擬二維洩水流，所求得之流量係數尚稱準確。

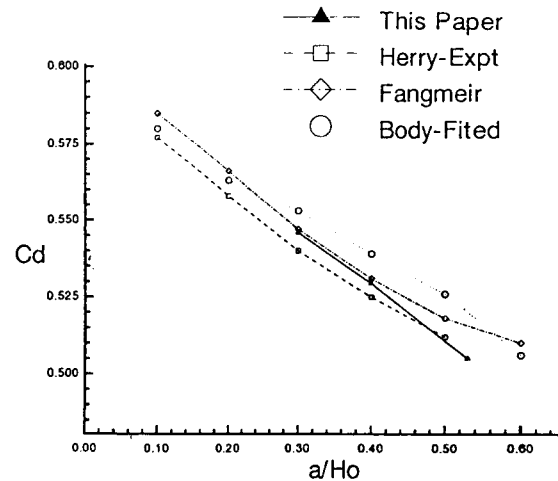


圖 7. 流量係數 C_d

收縮係數(Contraction coefficient) C_c 定義為在束縮斷面的水位 h_v 與洩水閘門間隙之間的比值，即

$$C_c = \frac{h_v}{a} \quad (19)$$

數值計算的結果以實心三角型圖形符號展示於圖 8，其他圖形符號為前人的研究結果，計有 Pajer (1973)，Benjamin (1956)，Fangmeir et al. (1968)，Perry (1957)，Lenau (1963)，Larock (1969)。以「趨勢」而言，前人的研究結果並不一致。實驗結果顯示收縮係數 C_c 的值隨著比值 a/H 的增加而遞增，參閱圖形符號為空心三角型與空心菱型的數據分佈。但是，非實驗結果均推測收縮係數幾乎為定值或略遞減，其值大約介於 0.6 至 0.615，而一般的共識為介於 0.6 至 0.61 之間。數值計算的結果傾向於非實驗結果的「趨勢」；但是在「值」方面，卻遠大於非實驗結果的變化幅度，而座落於實驗結果的變化範圍內。參閱圖 8，就收縮係數 C_c 的「值」而言，若實驗結果與非實驗結果的差距為 0.05，而實驗的閘門間隙 a 為 5 公分，則由式 (19) 得知，由此而導致的深度差距只有 2.5mm，其值尚在合理誤差的範圍內，若就渠流的實驗設備要求。易言之，由於深度不太可能量得非常準確，差上一個 mm，往往可能導致幾百分點的 C_c 值之差距。這或許是實驗值偏高的可能原因之一。然而，目前數值計算的 C_c 值之所以偏高，可能的原因為多方面，例如束縮斷面的位置及其深度，與黏度等量測的準確與否，以及高度函數的適當性都可能影響收縮係數。

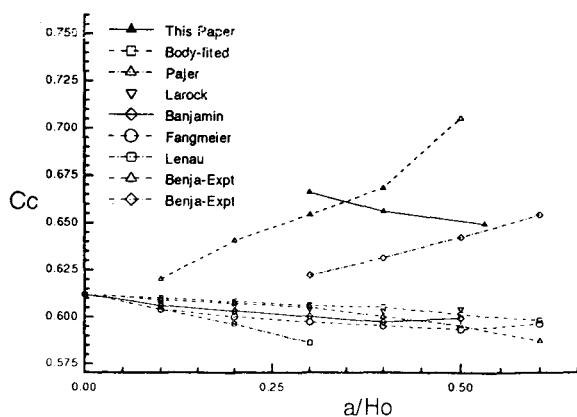


圖 8. 收縮係數 C_c

4-4 壓力分佈

作用於閘門上的壓力分佈示於圖九，閘門的相對間隙 a/H_0 分別等於 0.3、0.4 與 0.53，水平座標軸與垂直座標軸分別為 $\frac{P}{\gamma H_0}$ 與 $\frac{h-a}{H_0-a}$ ，均為無因次。垂直範圍自間隙頂端至總水頭線(Total energy line)，相當於 $\frac{h-a}{H_0-a}$ 的值自 0 到 1。若其間為靜水壓分佈，則壓力與深度間的函數關係曲線應為直線，而且通過 $\frac{P}{\gamma H_0} = 0$ 與 $\frac{h-a}{H_0-a} = 1$ 的點，但斜率視相對間隙

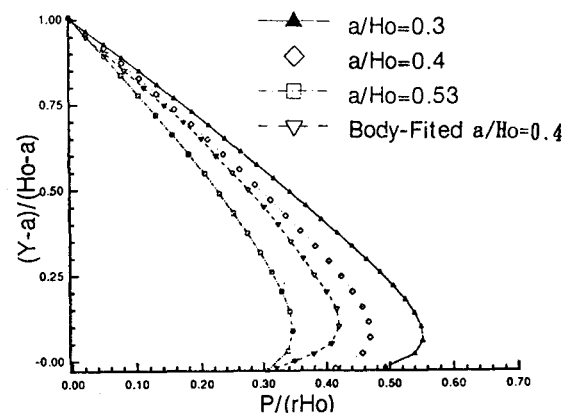


圖 9. 閘門板上之壓力分佈

的 a/H_0 的值而定。但由於在間隙頂點 ($\frac{h-a}{H_0-a} = 0$) 須為大氣壓，即 $\frac{P}{\gamma H_0} = 0$ 。因此，關係曲線應為一條折線，先是一條自左上角向下傾斜的直線，而後再突然轉變為自右向左的另一直線，且經過座標軸零點。

模擬的壓力分佈(以實心圖形符號表示)都是經過 $\frac{P}{\gamma H_0} = 0$ 與 $\frac{h-a}{H_0-a} = 1$ 的點之曲線，只折向座標軸零點，可是並不經過座標軸零點。這是由於在閘門附近的流線並不是直的，而是彎曲的，因而形成離心力，最後造成非直線的壓力分佈。相對間隙 a/H_0 愈小，代表上游總水頭 H_0 (自渠底起算) 愈大，即壓力愈大，所以壓力分佈曲線自左向右移動，實心圖形符號的曲線走向正反映這一事實。空心圖形符號的壓力分佈為郭(1992)與邱(1993)應用邊界轉換法之研究結果，相對間隙等於 0.4。不論是實心圖形符號或空心圖形符號，展示於圖九的壓力分佈之趨勢都相

當一致，但在「值」方面，兩者稍略差異。

圖 10 為閘門間隙內之壓力分佈，水平座標軸與垂直座標軸分別為 $\frac{P}{\gamma H_0}$ 與 h/a ，均為無因次，僅列模擬結果，未列其他結果予以比較。同樣地，以相對間隙 a/H_0 為曲線之參數，其值分別為 0.3、0.4 與 0.53。不像圖 9. 的數據分佈，圖 10. 的數據分佈顯示其間的關係幾乎為線性，即壓力分佈曲線為直線。並且，這種趨近於線性分佈的傾向，隨著相對間隙 a/H 值的增加，而更趨顯著。

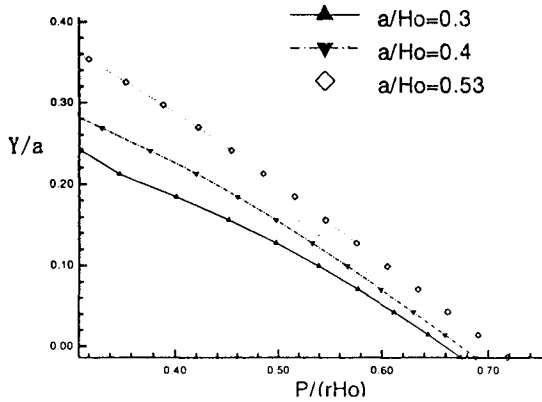


圖 10. 閘門間隙之壓力分佈

五、結論

利用 MAC 方法配合高度函數模擬洩水流有許多地方與堰流相似。首先，由於幾何因素之明顯改變，因此摩擦只須根據分子運動即可，即採用水的粘度係數 ($\nu = 1.12 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$)，用不著以人為方法提高其值。這對模擬流況而言，可省略相當大的麻煩；否則，其值要提高多少往往是個大困難。其次，MAC 方法為一顯性數值技巧，任何定量流之分析也須以變量流方式予以處理。而趨近於定量流之判斷依據為兩相鄰時段的因變數之相對差距非常小。若以式(16)而言，自由面高度的相對差距為 $O(10^{-4})$ ，而速度則為 $O(10^{-3})$ 。一旦趨近於這樣小的差距之後，每一個時段的迭代與修正次數都非常小，只須 2 次就夠了。堰流的情況完全相同，但是迭代與修正次數更少，只須一次就夠了。最後，針對模擬結果與前人研究結果的比較而言，兩者的吻合項目計有自由面高度，流量係

數，收縮係數與壓力分佈。

就目前所使用的數值技巧而言，儘管洩水流與堰流有多處相似，但相異之處有二。一是模擬堰流時，堰須佔兩行以上的晶格，否則下自由面無法反應離心力的影響，完全受重力控制；但模擬洩水流，洩水閘門只須佔一行晶格就可以。這或許洩水流較堰流簡單，只有一個自由面，而堰流有上與下兩自由面。二是採用 MAC 方法配合高度函數模擬流況時，迭代與修正只須針對充斥晶格，模擬洩水流確實如此；可是模擬堰流則須延伸至下表面晶格，否則會產生上述現象，即水舌經銳角堰不會先向上，而後下降，只有受重力影響的下降。

參閱式(17)與圖 3.，在洩水閘門的附近，直接積分而得的單位寬度流量 q 與間接計算而得的單位寬度流量之間的差異相當明顯。一般而言，直接積分而得的單位寬度流量較準。因此，其間的顯著差異顯示利用在自由面上的機動條件來求水位高度尚待進一步了解與探討。其次，除了在形成突變流 (Rapidly varied flow) 之處外，例如洩水閘門之附近及水躍，由間接計算而得的單位寬度流量「似乎」不沿流向改變。易言之，在緩變流的渠段內，由間接計算而得單位寬度流量沿流向保持不變，這一點符合一般渠流的認識。但是，由一緩變流改變成另一緩變流，單位寬度流量也跟著改變。由直接積分而得的單位寬度流量更反映這種現象，參閱圖 3. 的實線分佈。

因自由面之不穩定而導致數值發散的情況有三種：(1) 如果以入流速度 u_i 為固定值，入流深度 h_i 為浮動，但福祿數仍然控制在 0.1--0.3 之間，在數值模擬的過程中，入流速度保持不變，入流深度將一再的調整；則自由面較易呈現不穩定，因而影響數值上之穩定。(2) 若表面晶格也同樣採用連續方程式修正壓力，則流體在經過洩水閘門時，會因壓力偏大，造成自由面不穩定，導致數值發散。(3) 如果洩水閘門之相對間隙 a/H_0 之值小於或等於 0.3，則由於洩水閘門下游的速度太大，自由面不易穩定，因而影響數值之穩定。

六、參考文獻

1. Benjamin, T.B., "On the Flow in Channels with

- Rigid obstacles are Placed in the Stream.” J. of Fl. Mech. Vol.1, pp.227-248(1956).
2. Daily, J.W. And Harleman, Donald R.F., “Fluid Dynamics”, Addison-Wesly Pub. Co., Inc. Reading, Mass.,(1966).
 3. Fangmeir, D.D. And Strelkoff, T.S., “Solution for Gravity Flow under a Sluice Gate”, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 94, 153-176(1968).
 4. Golafshani, M., “A Simple Numerical Technique for Transient Creep Flows with Free Surface”, International Journal for Numerical Methods in Fluids.” Vol. 8, 897(1988).
 5. Henry, H.R., “Discussion on Diffusion of Submerged Jets by M.L. Albertson et al.,” Trans. Am. Soc. Civil Engrs., Vol. 115, pp.687(1950).
 6. Hirt, C.W., Nichols, B.D. And Romero, N.C. “SOLA-A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows”, Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-5852(1975).
 7. Hirt, C.W. and Shannon, J.P., “Free-Surface Stress Conditions For Incompressible Flow Calculation”, J. Comput. Phy. Vol. 2, 403(1968).
 8. Larock, B.E., “Gravity-Affected Flow from Planar Sluice Gates”, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 95, 1211(1969).
 9. Masliyah, J.H., Hemphill, K.N.F. And Fung, L., “Body-Fitted coordinates for Flow under Sluice Gate”, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 111, 922(1985).
 10. Masliyah, Jacob H., Nandakumar, K., Hemphill, F. and Fung, L. “Body-Fitted Coordinates for Flow under Sluice Gate”, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 111, pp.922-933(1985)
 11. Nichol, B.D. and Hirt, C.W., “Improved Free Surface Boundary Conditions for Numerical Incompressible Flow Calculation”, J. Comput. Phys. Vol. 8, 434 (1971).
 12. Flow in the Vicinity of Submerged and Exposed Structures”, J. Comput. Phys. Vol. 12, 234 (1973).
 13. Southwell, R. and Vaisey, G., “Relaxation Method Applied to Engineering Problems, XII. Fluid Motions Characterized by Free Streamline”, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. A240, pp.117-161 (1946).
 14. Welch, J.E., “The MAC Method: A Computing Technique for Solving Viscous, Incompressible, Transient Fluid Flow Problems Involving Free Surface”, Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-3425.(1965)
 15. 林富松, “應用 MAC 法於下射式閘門流況之數值模擬”, 私立淡江大學碩士論文, (1994).
 16. 邱奕鴻, “下射式閘門流況數值模擬”, 私立淡江大學碩士論文,(1993).
 17. 施清吉, 蘇文福, “應用 MAC 方法並配合高度函數於二維堰流”, 中國農業工程學報第 39 卷第 3 期, pp.1-12, (1993).
 18. 施清吉, “初始深度對模擬堰流之影響”, 中國農業工程學報第 40 卷第 2 期, pp.6-17, (1994).
 19. 施清吉, “初始流場對引用 SMAC 方法模擬水躍之影響”, 中國農業工程學報第 41 卷第 3 期, pp.1-12, (1995).
 20. 郭應熙, “應用邊界轉換法於下射式閘門流況數值”, 私立淡江大學碩士論文,(1992).

七、致 謝

本研究承蒙國科會 NSC 83-0209-E-032-002 計畫之經費補助下方得以完成, 謹誌謝意。

收稿日期: 民國 86 年 04 月 30 日

接受日期: 民國 86 年 08 月 21 日