

專論

地層下陷之理論探討
Theoretical Investigation on Land Subsidence

淡江大學水資源及環境工程學系教授

施 清 吉
Ching-Chi Shih

摘 要

假設地層下陷僅來自垂直方向的壓密，而地下水流動同時也限制於與其垂直的平面，則自飽和含水層超抽地下水的地層下陷之過程可分為前階段與後階段，分別為正在抽水當中與停止抽水；而一個階段又分成直角座標系統與極座標系統等兩種。除了後階段極座標系統的分析解外，其餘的都非常合理。分析解包含兩個參數：一是擴散係數 D_0 ，其值介於 10^{-4} 至 10^1 (ft^2/sec)之間，另一是抽水係數 N_0 ，約為 10^{-3} 。無因次空間自1到20,000，而無因次時間自10至 10^7 ，其值約半年。

關鍵詞：地層下陷，地下水。

ABSTRACT

It is assumed that the land subsidence due to an overdraft of groundwater from a confined saturated aquifer is strictly resulted from a vertical settlement and the groundwater flow is also restricted to a plane motion only. The course of the land subsidence can then be divided into two consecutive stages, the earlier stage denoting with pumping and the later stage representing after pumping; for each stage two different coordinate systems are considered in this study, the cartesian and the cylindrical coordinates systems. Thus, four different cases are theoretically investigated. Except for the case of the later stage in the cylindrical coordinate the analytical solution of the other three cases are quite reasonable as long as the tendency and the distribution of the solution are concerned. Solutions consist of two parameters: one is the diffusivity D_0 ranging from 10^{-4} to 10 (ft^2/sec), and the other is the so-called pumping coefficient N_0 with a value of 10^{-3} . The dimensionless distance varies from 1 to 20,000 approximately, while the dimensionless time starts with a value of 10 up to 10000000, which is about half year.

Keywords: Land subsidence, Groundwater.

一、前言

如眾所知，當水自受限飽和含水層 (Confined Saturated aquifer) 被抽掉後，土壤內之孔隙就幾乎處於真空狀態下，無法再能承受得了其上的龐大載重，飽和含水層就逐漸被壓縮，而最後就造成一般所謂的「地層下陷」 (Land Subsidence) 。本研究擬從一簡單理想之情況下，建立一描述地層下陷與超額抽取地下水量間的數學模式 (Mathematical model) ；並進一步尋求在特殊情況下之分析解 (Analytical Solution) 。實際應用為系列研究的最終目的，但須仰賴模式之數值解 (Numerical Solution) 。飽和含水層的上方與下方土層均為完全不透水層，超額抽取地下水僅造成其間的土層壓縮。

二、理論分析

如圖 1 所示之受限飽和含水層，在抽取地下水的過程中，假設其上土層與地表上結構物之總靜荷重 (Total static load) 保持不變。同時，又假設土柱體積之減小係完全由於孔隙體積之被壓縮所致。在此情況下，抽取地下水而導致的孔隙壓變量 (Increment of pore pressure) Δp 遲早會傳遞至土壤顆粒上，但反向相反；最後，土層結構與組織 (Texture) 也將隨之改變。這一關係通常以壓縮指標 (Compression index) C_c ，孔隙壓變量及過負荷壓力 (Overburden pressure) 的函數關係式表示之 (Sowers et al., 1970) 。若相對於孔隙壓 p ，孔隙壓增量非常小，僅須保留一次方的項，則利用此關係與前述的分析，即可得 (施，1976)

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{C_c}{1+e} \frac{\Delta p}{p} \dots\dots\dots (1)$$

式中 e 為孔隙比 (Void ratio) 。式 (1) 代表改變孔隙壓僅造成垂直方向的地層下陷，即下陷為一維。若在下陷過程中，同時考慮四週的擠壓，那將是三維的下陷，其模式就相當複雜 (葉，1996) 。式 (1) 的優點為簡單，便於使用，但可能忽略了在下陷過程中的某些特殊現象。

實際上，地層下陷的過程應分成二個階段：一是抽水未停止前，在此階段有一外在因素—抽水，因而造成地層下陷；二是抽水停止，此時，

無外在因素，但因下陷不均勻，終究要逐漸趨近於均勻。

(一) 前階段—正在抽水當中

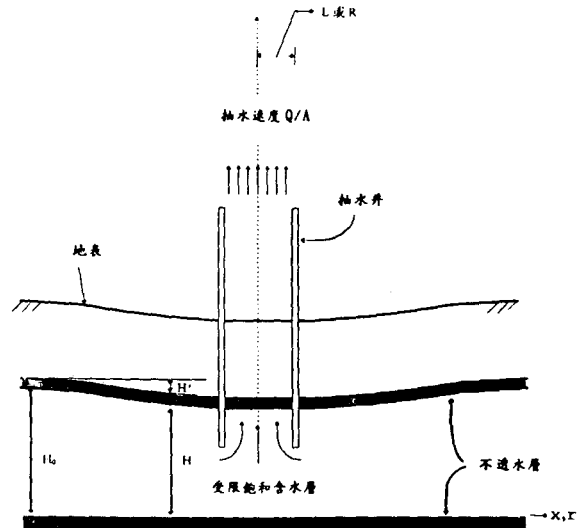


圖 1. 前階一段維直角座標或軸對稱 (極座標) 地層下陷之示意圖

飽和含水層之上下邊界均為完全不透水層。地層下陷僅來自所著眼的飽和含水層，而與其他飽和含水層無關。由質量守恆法則 (Law of conservation of mass) 與式 (1) 可得知自飽和含水層抽取地下水，其地層高程的變化須滿足下列微分方程式 (施，1995) 。

$$\frac{p(1+e)(\alpha n + \partial n / \partial p + \beta n)}{CH} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{K_x p(1+e)}{HC_c \gamma} \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{K_y p(1+e)}{HC_c \gamma} \frac{\partial H}{\partial y} \right] - \frac{Q}{AH} \dots\dots\dots (2)$$

式中

- t : 時間
- x, y : 平面之直角座標軸
- K_x, K_y : 分別為 x 軸與 y 軸之導水係數 (Permeability)
- γ : 水之單位體積重 ($= \rho g$, ρ 與 g 分別為密度與重力加速度)
- Q : 抽水量
- A : 抽水管面積
- H : 飽和含水層厚度
- α : 土壤顆粒骨架 (Granular skelton) 的垂直壓縮係數

β : 水的體積彈性係數 (Bulk modulus of elasticity)

n : 孔隙率 (Porosity)

若含水層厚度非常厚, 則 $\partial^2 H/\partial x^2 \gg (\partial H/\partial x)^2/H$ 與 $\partial^2 H/\partial y^2 \gg (\partial H/\partial y)^2/H$, 同時; 式(2)的相關參數與係數均假設保持不變, 且以未抽水前的初始值 (Initial value) 計。另外, 再令

$$H' = H_0 - H \quad (3)$$

式中 H_0 為未抽水前的土層厚度, 且 $H' \ll H_0$, 則式(2)最後簡化為

$$\frac{\partial H'}{\partial t} = D_0 \nabla^2 H' + W'_p \quad (4)$$

式中

$$D_0 = \frac{K_x}{\gamma(\beta n + \partial n/\partial p + \alpha n)} \Big|_{t=0} = \frac{K_y}{\gamma(\beta n + \partial n/\partial p + \alpha n)} \Big|_{t=0} \quad (5)$$

$$N_0 = \frac{C_c}{p(1+e)(\beta n + \partial n/\partial p + \alpha n)} \Big|_{t=0} \quad (6)$$

$$W'_p = \begin{cases} N_0 Q/A, & \text{管內} \\ 0, & \text{管外} \end{cases} \quad (7)$$

其中 ∇^2 代表拉普拉斯運算子 (Laplace operator), ' $|_{t=0}$ ' 為未抽水前的情況。式(4)的初始與邊界條件分別為

$$H' = 0, \quad t < 0 \quad (8)$$

$$H' \rightarrow 0, \quad t > 0 \text{ 與遠離抽水管} \quad (9)$$

$$H' \text{ 以管中心為對稱軸, } t > 0 \quad (10)$$

式(4)為一擴散方程式 (Diffusion equation), 但加一「源」(Source)。滿足上述初始邊界條件之「解」, 可利用 Green 函數由瞬時點源 (Instantaneous point source) 之「解」, 對時間與空間座標積分構建求得 (Carslaw et al., 1969)。但因初始條件為 0, 故由 Green 函數所構建之解只須考慮面積分, 無須考慮體積分。同時, 「源」可轉加置於面積分上。

若為一維, 空間座標為 x , 管徑為 L , 式(4)簡化為

$$\frac{\partial H'}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 H'}{\partial x^2} + W'_p \quad (11)$$

其初始與邊界條件分別示於式(8)、(9)與(10), 則式(11)之「解」可由下式構建求得, 即

$$H' = \frac{W'_p}{2\sqrt{D_0\pi}} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-L}^L \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4D_0(t-\tau)}\right] d\xi \quad (12)$$

式中

$$\tau = D_0 t / L^2 \quad (13)$$

$$\xi = x / L \quad (14)$$

利用二次部份積分, 則式(12)變為 (Bear, 1972; Eagleson, 1970)

$$\eta_n = \tau \phi\left(\frac{1-\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) + \frac{(1-\xi)\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(1-\xi)^2}{4\tau}\right] - \frac{(1-\xi)^2}{2} \left[1 - \phi\left(\frac{1-\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)\right] + \tau \phi\left(\frac{1+\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) + \frac{(1+\xi)\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(1+\xi)^2}{4\tau}\right] - \frac{(1+\xi)^2}{2} \left[1 - \phi\left(\frac{1+\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)\right], \quad |\xi| < 1 \quad (15)$$

$$\text{與 } \eta_n = \tau \phi\left(\frac{1+\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) + \frac{(1+\xi)\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(1+\xi)^2}{4\tau}\right] - \frac{(1+\xi)^2}{2} \left[1 - \phi\left(\frac{1+\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)\right] - \tau \phi\left(\frac{\xi-1}{2\sqrt{\tau}}\right) - \frac{(\xi-1)\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(\xi-1)^2}{4\tau}\right] + \frac{(\xi-1)^2}{2} \times \left[1 - \phi\left(\frac{\xi-1}{2\sqrt{\tau}}\right)\right], \quad |\xi| > 1 \quad (16)$$

$$\text{式中 } \phi(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-\lambda^2) d\lambda \quad (17)$$

$$\eta_R = \frac{H D_0}{W'_p L^2} \quad (18)$$

式(17)為誤差函數 (Error function)。只有式(16)才適用, 因為式(15)敘述在抽水管內的地層下陷, 失去意義。

若為軸對稱, 空間座標改為 r , 管徑改為 R , 式(4)簡化為

$$\frac{\partial H'}{\partial t} = D_0 \left[\frac{\partial^2 H'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H'}{\partial r} \right] + W'_p \quad (19)$$

其初始與邊界條件分別示於式(8)、(9)與(10), 式(19)之「解」同樣地可用 Green 函數構建求得, 即

$$H' = \frac{1}{4\pi D_0} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W'_p \times \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4D_0(t-\tau)}\right] d\xi d\eta \quad (20)$$

令 $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$, $\xi = \rho \cos\theta_0$, $\eta = \rho \times$

$\sin \theta_0$ 。為了方便起見，可令 $\theta_0 = 0$ ，則式(20)變為

$$H' = \frac{1}{2D_0} \int_0^t d\tau \int_0^\infty \frac{1}{(t-\tau)} W_p' \exp\left[-\frac{r^2 + \rho^2}{4D_0(t-\tau)}\right] \times J_0\left[\frac{r\rho}{2D_0(t-\tau)}\right] \rho d\rho \quad (21)$$

式中

$$J_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{r\rho \cos\theta}{2D_0(t-\tau)}\right] d\theta \quad (22)$$

而 J_0 為 Bessel function 的柱函數 (cylindrical function)。利用 Weber-Sonine 公式，式(21)可對 ρ 積分，其結果為 (Magnus et al, 1943; Polubarinova-Kochina, 1962)

$$\eta_c = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda\xi) J_1(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda - \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda\xi) J_1(\lambda)}{\lambda^2} \exp(-\tau) d\lambda \quad (23)$$

$$\text{式中 } \eta_c = \frac{H' D_0}{W_p' R^2} \quad (24)$$

另外， J_0 與 J_1 為第一類 Bessel 函數，右下註腳為函數之階次 (Order)，而 ξ 為無因次空間座標，即 $\xi = x/R$ 。右下註腳 'R' 與 'C' 分別代表一維直角座標系統與極座標系統，參閱式(18)與(24)。

(二) 後階段—停止抽水

循上述方式，吾人同樣可構建抽水停止後的「解」。此時，時間自抽水停止起算，而初始條件不再等於0，但改以抽水停止時之「解」計。

超額抽水停止時，其瞬時地層下陷剖面如圖2所示，為爾後地層下陷的起始條件。抽水停止後的控制方程式仍為式(4)，但無「源」項，即 $W_p' = 0$ ；所以

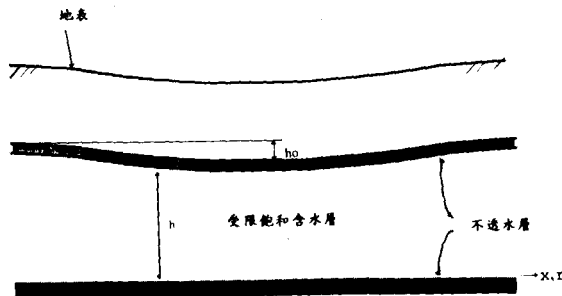


圖 2. 後階段一維直角座標或軸對稱 (極座標) 地層下陷之示意圖

$$\frac{\partial h}{\partial t} = D_0 \nabla^2 h \quad (25)$$

式中， h 代表抽水停止後的下陷量，時間 t 自停止抽水後起算。式(25)之「解」仍可由 Green 函數構建求得，可是須假設適當地層剖面做為式(25)的起始條件。

若為直角座標，式(25)簡化為

$$\frac{\partial h}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (26)$$

另外，如果停止抽水時的瞬時地層下陷剖面假設為誤差函數型，即

$$H' = h_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{a^2 x^2}{L^2}\right)\right] \quad (27)$$

式中 h_0 與 a 為未定係數，可根據式(26)的計算結果經由迴歸分析求得。以式(27)為初時條件，則式(26)之「解」為

$$h = \frac{h_0}{2\sqrt{D_0\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{a}{L}\right)^2 \xi^2\right] \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4D_0 t}\right] d\xi \quad (28)$$

其積分結果為

$$\delta_R = [1 + 4a^2\zeta]^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{a^2\xi^2}{1 + 4\xi^2\zeta}\right] \quad (29)$$

式中

$$\delta_R = \frac{h}{h_0} \quad (30)$$

$$\zeta = \frac{D_0 t}{L^2} \quad (31)$$

式(29)的值是相對於 h_0 的沉陷量，後者係用以反映以前超額抽水而導致的下陷幅度，以緊接抽水井的最大地層下陷量為代表。

若為極座標，式(25)簡化為

$$\frac{\partial h}{\partial t} = D_0 \left[\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \right] \quad (32)$$

其「解」為

$$\delta_c = \frac{1}{2\zeta} \int_0^\infty f(\mu) \exp\left[-\frac{\xi^2 + \mu^2}{4\zeta}\right] J_0\left[\frac{\xi\mu}{2\zeta}\right] \mu d\mu \quad (33)$$

$$\text{式中 } \delta_c = \frac{h}{h_0} \quad (34)$$

而 $f(\mu)$ 為停止抽水時的瞬時地層下陷剖面，為式(29)之初始條件；另 ξ 與 ζ 分別定義於式(14)與(31)，但 x 與 L 分別須改為 r 與 R 。

三、結果與討論

參閱式(4)與式(25)，不論是正在抽水當中或是

停止抽水，擴散係數 D_0 與抽水係數 N_0 為控制地層下陷的兩個主要參數。一般而言，擴散係數 D_0 的值大致介於 10 與 10^{-4} ft^2/s 之間，而抽水係數 N_0 的值並不像擴散係數有那麼大的變化幅度，約為 10^{-3} 。擴散係數的大幅度變化範圍係來自滲透係數，如式(5)所示。如果 D_0 與 N_0 的值分別以 10^{-2} ft^2/s 與 10^{-3} 計，管半徑 R 或 L 以 0.125ft ，則無因次時間 τ 須高達 10^7 才相當於半年， τ 等於 10^6 也只約為一個月。因此，以實際上的觀點而言， τ 值必須相當大才適用。故本論文設定七個不同的 τ 值，即 10^1 、 10^2 、 10^3 、 10^4 、 10^5 、 10^6 、 10^7 。前階段的無因次時間以 τ 表示，而後階段的無因次時間改以 ζ 值表示，以避免混淆，參閱式(3)。同樣地，也設定七個不同的 ζ 值。即 10^1 、 10^2 、 10^3 、 10^4 、 10^5 、 10^6 、 10^7 。無因次空間座標 ξ 定義於式(4)，其值小於 1 ，代表在管內，故失去意義。因此，所有計算結果的展示均起自於 $\xi = 1$ 。

如式(3)所示的無因次時間 τ ，若相關參數的值採用上段所示的參考值；同時以有因次沈陷量 H 等於 10^{-5} ft 時的 ξ 值做為其最大值，則其值可由式(6)求得，以 ξ_{\max} 表之。圖3為不同抽水時間 τ 時，最大無因次空間座標 ξ_{\max} 的變化，其間的關係幾乎趨近於冪數式，即

$$\xi_{\max} = 2.752298 \tau^{0.5490723} \dots\dots\dots (3)$$

對應於任何已知的抽水時間 τ ，大於 ξ_{\max} 的 ξ 值代表其處的有因次沈陷量 H 幾乎趨近於 0 。易言之，圖3就相當於不同抽水時間的沈陷範圍，其幅度以冪數型的速率遞增，這正合乎一般所認知的趨勢。

(一)前階段—正在抽水當中

未停止抽水的前階段，其時的分析解示於式(6)或式(3)，視座標系統而定，前者為直角座標系統，而後者為極座標系統。如前所述，由於無因次空間座標 ζ 的值小於 1 代表在管內，失去意義，所以結果的展示均自 ξ 等於 1 算起。但為了探討分析解的全貌， ξ 的值應該自 0 算起，同時也須採用一般十進位尺度的座標軸。在此情況下， $\tau = 2, 4, 6, 8, 10$ 的分析解可參閱王(1996)碩士論文圖12與圖13，分別為直角座標系統與極座標系統。這兩圖的水平座標軸為 ξ ，但垂直座標軸為

沈陷量 H 。在 $\xi = 0$ 之處，圖12與圖13均顯示 $\partial H / \partial \xi = 0$ ，這相當於以 $\xi = 0$ （管中心）為對稱軸，如式(6)的邊界條件。另一方面，若 ξ 的值增大，圖12與圖13同樣顯示沈陷量也逐漸趨近於 0 ，這一點正反映式(9)所述的邊界條件。圖12與圖13的展示方式只適用於了解分析解的全貌以及驗證分析解的趨勢是否正確，但相當不適用。因為在實際情況上無因次時間 τ 的值均非常大，因而沈陷量的變化幅度也跟著變得非常懸殊，根本不適於採用一般十進位尺度的座標軸，必須採用對數尺度。

直角座標系統

吾人均知抽水時間愈長，則沈陷量愈大，沈陷範圍也愈廣。式(6)的計算結果以實線展示於圖4，水平與垂直座標軸分別為 $\log \xi$ 與 $\log \eta_R$ ，而參

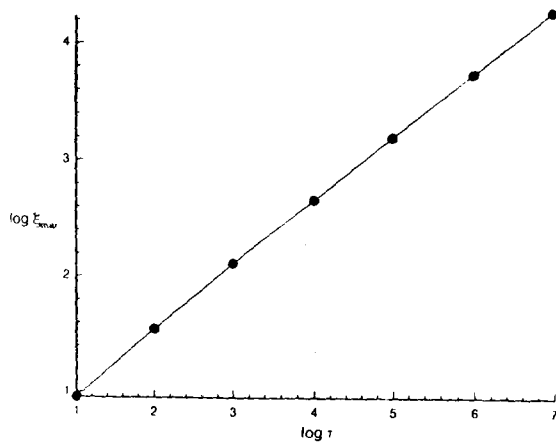


圖3. 沉陷範圍

數代表不同的無因次時間，共有 $\tau = 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7$ 。每一條曲線的走向與趨勢都相同，隨著 ξ 值的增加而急劇遞減。易言之，沈陷量以抽水井的附近為最大，愈遠離抽水井，則其沈陷量愈小。另一方面，若座標軸尺度不採用對數，而採用一般十進位的表示法，除了更可明顯地看出這種走向與趨勢外；同時，也可看出這種走向與趨勢頗似於誤差函數的走向與趨勢。此外，如果 τ 值增加，則整條曲線往右上方移動，這代表沈陷量及其範圍均隨者 τ 值的增加而增加。圖4的展示法除了方便於使用外，同時也含蓋相當大的變化幅度，無因次水平座標 ξ 的值自 1 至

20000 左右，而垂直座標 η_m 的值自 0.1 至 10000。有因次的時間 t 與有因次的沈陷量 H 可分別由式 (13) 與式 (18) 計算而得，若式中的相關參數之值為已知。

在抽水井（即 $\xi = 1$ ）的沈陷量為瞬時沈陷剖面的最大值，其值隨著抽水時間的增長而遞增，如圖 5 的實心圓點所示，其間的關係幾近於冪數型。理論上，如果一直不停地超抽，地層將會一直

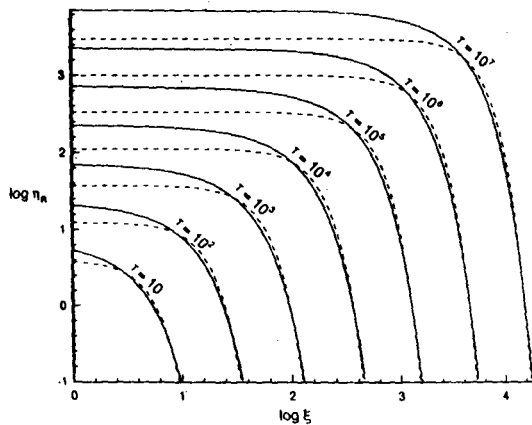


圖 4. 前階段直角座標系統之瞬時沉陷剖面

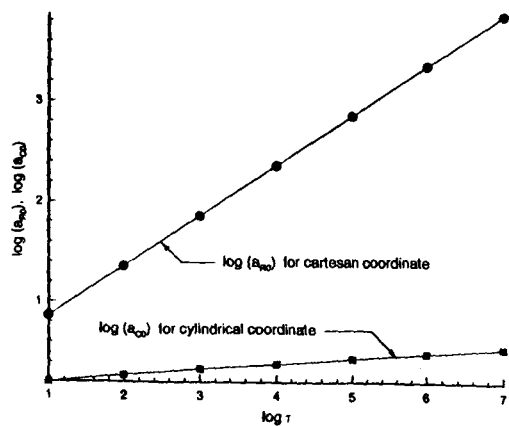


圖 5. 抽水停止瞬時沉陷剖面近似式之首項係數

沈陷。實際上，的情形可能與理論推測不太一致。首先，理論推測是基於飽和含水層有無窮的水可供無限長期的超抽，即 W_p 的值不會遞減。一旦 W_p 的值呈現隨時間而改變不能視為定值時，理論推測就須加以修改。其次，實心圓點的由來是根據相關的參數（ D_0 與 N_0 ）在抽水過程中都保持不變，實際上的情形可能這兩個參數的值並不

全保持不變，而只是改變量很小而已。在這種情形下，較合理的分析應約為逐時段分析。

極座標系統

類似於圖 4，式 (23) 的計算結果以相同的方式展示於圖 6，無因次沈陷量 η_c 定義於式 (24)，且 $\xi =$

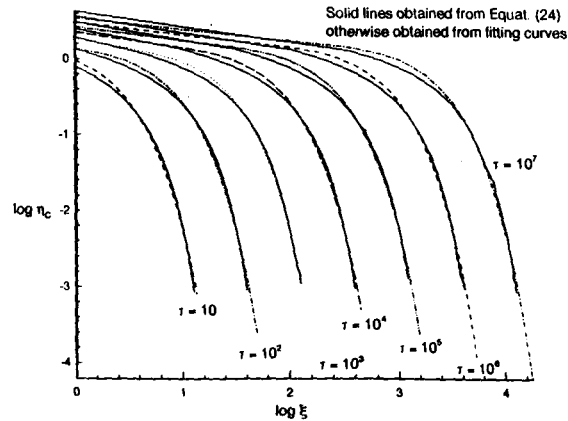


圖 6. 前階段極座標系統之瞬時沉陷剖面

x/R 。參閱圖 4，圖 6 的曲線走向、趨勢及分佈均與圖 4 完全相似，但差異有二：一是當無因次沈陷量 η_c 變成非常小的時候，大約小於 10^{-3} 左右，其值不但不隨著 ξ 值的增加變小，反而變大。這可能來自值太小，再加上貝賽函數本身並不是一單調函數。最後一個差異就相當突出，那就是沈陷幅度減小了很多。式 (23) 的計算係採用 Romberg 方法，並配合 Polynomial Interpolation and Extrapolation 及其他相關的副程式，每一個 τ 值計算 51 個 ξ 的 η_c 其所需的計算時間大約為四分鐘 (Press et al., 1992)。上述的一個瞬時沉陷剖面，如採用同樣的 Romberg 方法，但不同的演譯技巧，往往需要長十四個小時的計算時間 (Gerald et al., 1992)。採用一個快速的數值積分技巧對本研究是相當重要，因為在極座標系統下的「解」都必須由數值積分求得。而且又是一個瑕積分 (Improper integral)。另外，如前所述，貝賽函數並不是一單調函數，當 η_c 趨近於一個很小值時，大約在 10^{-3} 左右， η_c 可能小於 0，由於 η_c 必須大於 0，才代表地層下陷，故 η_c 小於 0 的情況不予以考慮。另一方面，此時 η_c 值已經很小，對「解」的重要性已無關緊要。

不同抽水時間的最大沈陷量展示於圖 5，以實心方點表示。同樣的抽水時間，即相同的 τ 值，極

座標系統下的最大沈陷量遠小於直角座標下的最大沈陷量，因為實心圓點遠在實心方點之上。此外，隨著抽水時間的增長，極座標系統下的最大沈陷量並不急劇增加，增加率相當小，似乎趨近於某一個定值。

(二)後階段—停止抽水

直角座標系統

其實，圖 4 代表不同時刻的瞬時沈陷剖面 (Instantaneous subsidence profile)，為解後階段相關微分方程式之初始條件，其控制式為式(6)。前階段之分析解示於式(16)，係由誤差函數所組成。故，瞬時沈陷剖面首先採用誤差函數型近似式，如式(7)所示，式中 h_0 用以反映前階段超抽而導致的下陷幅度，以緊接抽水井的最大沉陷量為代表，參閱圖 2；而 a 用以代表沉陷範圍。式(7)中， h_0 與 a 均為未定係數，但可由式(16)的計算結果經由迴歸分析求得。式(16)與式(7)兩計算結果之比較示於圖 4，分別以實線與虛線表之。兩者的差距並不明顯，除非在抽水管之附近。但是以抽水剛停止的瞬時沉陷剖面做為式(6)的初時條件而言，誤差函數型近似式(7)並不適宜做為式(6)的近似式，因為近似式未能準確地反映前階段的最大沉陷幅度；易言之， h_0 太小。因此，式(6)的近似式改為多項式型。經多次嘗試後，本研究發現只須取到 ξ 的四次方，即

$$\tau_R = a_{R0} \left[1 + \frac{a_{R1}}{a_{R0}} \xi + \frac{a_{R2}}{a_{R0}} \xi^2 + \frac{a_{R3}}{a_{R0}} \xi^3 + \frac{a_{R4}}{a_{R0}} \xi^4 \right] \dots \quad (8)$$

式中 a_{R0} 、 a_{R1} 、 a_{R2} 、 a_{R3} 與 a_{R4} 均為未定係數，其值可由式(16)的計算結果經由迴歸分析求得，但其值因不同的 τ 值而異。係數 a_{R0} 的值遠大於其他係數之值，係數 a_0 的角色也頗類似於 h_0 ，參閱式(7)。式(16)與其近似式(8)的兩計算結果示於圖 4，分別以實線與點線表示。參閱圖 4，由於實線與點線在絕大部分的地方都非常吻合，兩者均重疊在同一條線上，所以看不到點線的分佈，只有在少數地方才可稍微看到點線的分佈。總而言之，不論是在抽水井附近或遠離抽水井，抽水剛停止的瞬時沉陷剖面以多項式型近似式最足以代表，但不適宜採用誤差函數型近似式。

式(8)為直角座標系統後階段停止抽水的控制方程式，若剛停止抽水的瞬時沉陷剖面設為多項式型近似式，如式(8)所示，則其「解」為

$$\begin{aligned} \frac{\delta_R}{a_{R0}(\tau)} = & 1 + \frac{a_{R1}}{a_{R0}} \xi + \frac{a_{R2}}{a_{R0}} \xi^2 + \frac{4a_{R2}\zeta\Gamma(1.5)}{a_{R0}\sqrt{\pi}} + \frac{a_{R3}}{a_{R0}} \xi^3 \\ & + 12 \frac{a_{R3}\zeta\Gamma(1.5)}{a_{R0}\sqrt{\pi}} + \frac{a_{R4}}{a_{R0}} \xi^4 \\ & + 24 \frac{a_{R4}\zeta\Gamma(1.5)}{a_{R0}\sqrt{\pi}} + 16 \frac{a_{R4}\xi^2\Gamma(2.5)}{a_{R0}\sqrt{\pi}} \dots \quad (9) \end{aligned}$$

式中， ζ 為後階段的無因次時間，定義於式(3)，與

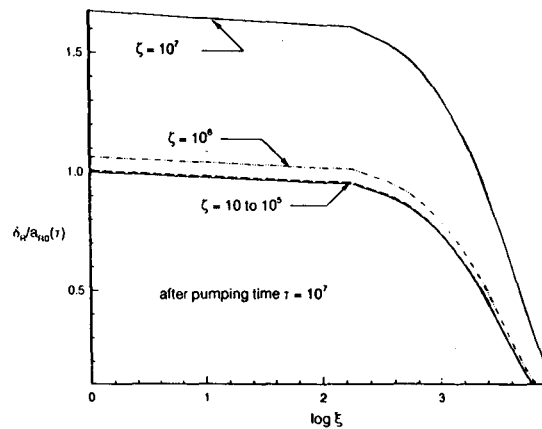


圖 7. 後階段直角座標系統之瞬時沉陷剖面

τ 的意義完全相同，只不過為了區分前階段與後階段而已。另外，係數 a_{R0} 的值視 τ 值而定，其值大致等於 h_0 ，參閱圖 4 與圖 5。由於在實際情況上，無因次時間 τ 的值都非常大，以及對於不同的 τ 值，上式(9)等號右邊的變化趨勢都極為類似。因此，只展示典型代表於圖 7，其水平與垂直座標軸分別為 $\log \xi$ 與 $\delta_R / a_{R0}(\tau)$ ，而以後階段無因次時間 ζ 為參數。如圖 7 所示，每一條曲線的走向與趨勢均極為相似，隨著無因次空間座標 ξ 值的增加先呈現緩慢的遞減，而後再急劇遞減，這表示沉陷量係以抽水井的附近為最大，再向四周或兩旁變緩，而且逐漸趨近於 0。最大沉陷量係發生於抽水井，即 $\xi = 1$ ，其值受所考慮的時刻 ζ 與抽水時間 τ 的影響。對於任何同一 ζ 值的曲線（相當沿任一條垂直線），其走向與趨勢都非常相似，隨著 ζ 值的增加均呈遞增。易言之，沈陷量將隨著時間的增加而一直持續。這只代表理論的推測而已，實際上的

變化可能是先隨著 ζ 值的增加而增加，而後變得很緩慢地增加，最後趨近於某一定值。

在抽水井的沉陷量 $\delta_R(\zeta, \xi = 1)$ 為吾人的

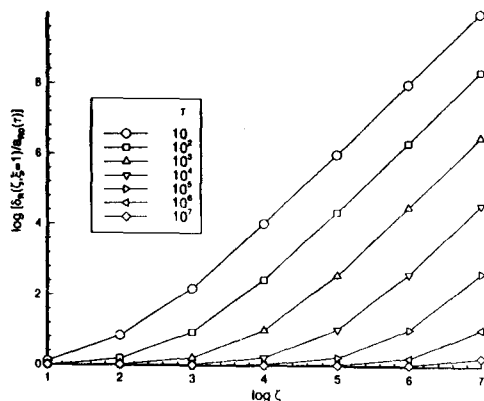


圖 8. 後階段直角標系統之最大沉陷量

關注所在，因其為瞬時沉陷剖面的最大值，故特別展示於圖 8。參閱圖 8，水平座標軸為所考慮的無因次時刻 ζ ，垂直座標軸則是採用相對於 $a_{R0}(\tau)$ 的沉陷量，而 $a_{R0}(\tau)$ 的值受無因次抽水時間 τ 的影響，如圖 4 實心圓點所示。兩個座標軸均採用對數尺度，另以 τ 為參數。以同一 τ 值的曲線而言，所有曲線的走向與趨勢均顯示，隨著所考慮時間 ζ 的增加，沉陷將一直持續。理論推測只部份合乎一般的認知，其間的差異與解釋已述於前段。另一方面，若同一 ζ 值，但不同的 τ 值，即沿垂直線的變動，圖 8 顯示 τ 值愈大則比值 $\log[\delta_R(\zeta, \xi = 1) / a_{R0}(\tau)]$ 愈小。其實並不屬然，因為隨 τ 值的增加， $a_{R0}(\tau)$ 的增加幅度遠超過比值的減小幅度；所以，若只以沉陷量 $\delta_R(\zeta, \xi = 1)$ 而言，其值還是隨著 τ 值的增加而遞增。總之，若考慮自抽水停止後才起算的相同時刻，即相同的 ζ 值，抽水時間愈長，理論結果推測沉陷量愈大。

極座標系統

類似於直角座標系統的分析，同樣地必須以抽水剛停止時的瞬時沉陷剖面做為式(32)的初始條件，但與直角座標系統的差異有二：一是同樣可採用如式(30)所示的多項式型近似式，可是必須由 ξ 的四次方增為十次方，即

$$\eta_c = a_{c0} \left[1 + \frac{a_{c1}}{a_{c0}} \xi + \dots + \frac{a_{c10}}{a_{c0}} \xi^{10} \right] \dots \dots \dots (36)$$

此外，式(30)只能適用於抽水井附近。二是遠離抽水井近似式須改為如下所示的指數型

$$\eta_c = \exp(b_{c1}) \times \exp(-b_{c2}) / a_{c0} \dots \dots \dots (39)$$

而且不像(37)一般，適宜採用誤差函數型。式(38)及(39)中， $a_{c0}, a_{c1}, \dots, a_{c10}, b_{c1}$ 與 b_{c2} 均為未定係數，其值都可由式(33)的計算結果經由迴歸分析求得。係數 a_{c0} 的角色及特徵頗類似於 a_{R0} ，前者以實心方塊示於圖 5。近似式(37)配合式(38)的計算結果以非實線展示於圖 6。另外，參閱式(33)的分析解，其計算結果也同時以實線展示於圖 6，以便比較。圖 6 顯示近似式的計算結果大致吻合於分析解的計算結果。一般而言，在抽水井附近的差距比較明顯，遠離抽水井兩計算結果可說是幾乎完全吻合。另外，以座標系統而言，圖 6 與圖 4 顯示極座標系統的吻合程度似乎不如直角座標系統。上述的差距及差異可能源自於式(33)的急劇變化。

停止抽水後瞬時沉陷剖面的典型代表展示於圖 9，代表抽水時間的無因次時間 τ 為 10^7 ，以無因

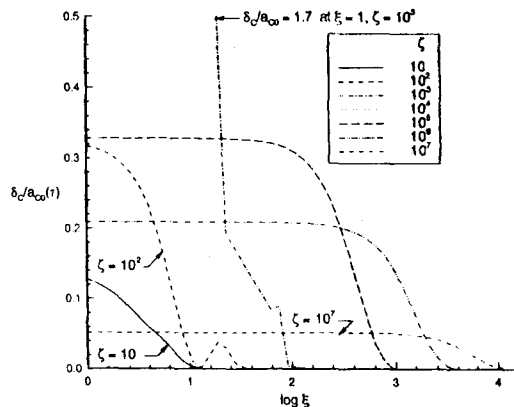


圖 9. 後階段極座標系統之瞬時沉陷剖面

次時間 ζ （代表所考慮的時刻）為參數。易言之，圖 9 代表持續不停超抽半年後，各不同時刻的瞬時沉陷剖面。合理的曲線及其趨勢應如圖 7 所示，當所考慮的時刻增加時，即 ζ 值愈大，沉陷量 $\delta_R / a_{R0}(\tau)$ 也跟著增加，同時沉陷範圍也應逐漸擴大。此外，在抽水井處所考慮的時刻 ζ 愈接近抽水剛停止，其時的沉陷量應愈接近抽水停止時的沉陷量，即 $\delta_R / a_{R0}(\tau)$ 愈趨近於 1。圖 7 的垂直座標軸係採用一般十進位尺度，因此合理的曲線分佈為沿同一 ξ 值的垂直線，曲線應該是隨著 ζ 值的減小而趨近於 1。同時，所有的曲線均須在

$\delta_R/a_{R0}(\tau) = 0$ 之水平軸的上方。但是改為極座標，情況就截然改觀。如圖 9 所示，除了 $\zeta = 10$ 的瞬時沉陷剖面不呈單調遞減函數外，其餘的瞬時沉陷剖面均大致呈現合理的分佈，即沉陷量 $\delta_c/a_{c0}(\tau)$ 與無因次空間座標 ζ 都呈單調遞減函數。曲線分佈大致先隨著 ζ 值的增加，維持一段沉陷量 $\delta_c/a_{c0}(\tau)$ 保持不變的水平線，而後再隨著 ζ 值的持續增加就急遽下降且趨近於 0。易言之，以瞬時沉陷剖面而言，抽水井附近的沉陷為最大，再向遠離抽水井四週遞減。這僅是大致合理而已，並不完全正確，因為在抽水井附近的沉陷量分佈應該是呈緩慢遞減，如圖 7 所示，而不是保持不變。沉陷量 $\delta_c/a_{c0}(\tau)$ 保持不變的範圍的確隨著所考慮時刻 ζ 的增加而逐漸擴大，如圖 9 所示。故後階段極座標系統的分析解也同樣顯示抽水停止後沉陷範圍將隨著時間的增加而漸漸擴大。以這一點而言，曲線的走向與趨勢是正確的。然而，以在抽水井 ($\log \zeta = 1$) 所考慮的時刻愈接近抽水剛停止 (即 ζ 愈小)，其處沉陷量的變化而言，圖 9 就顯得不屬合理。沿垂直座標軸，沉陷量 $\delta_c/a_{c0}(\tau)$ 的值先隨著參數 ζ 值的增加而遞增，大約自 0.10 ($\zeta = 10$) 增至 1.7 ($\zeta = 10^3$)，而後就不再遞增反而下降了。在抽水井的沉陷量 $\delta_c/a_{c0}(\tau)$ 應隨著 ζ 值的增加自 1 起逐漸增加才算合理，如圖 7 所示。圖 7 與圖 9 的最大不同，就是前者是直角座標系統，而後者改為極座標系統，其間竟然會導致如此懸殊的差異。到目前為止，作者仍然無法知其所以然。

圖 10 類似於圖 8，只不過由直角座標系統改為極座標系統而已，同樣地也以不同的抽水時間 τ 為參數。如果抽水時間較短，即 τ 值較小，在抽水井的沉陷量 $\delta(\zeta, \xi = 1)$ 並不隨著時間 ζ 的增加而遞增，反而下降，這並不是合理的傾向，但與圖 8 適巧相反。只有經過長時間的抽水後，例如 $\tau = 10^7$ ，抽水停止後才不呈現下降的傾向，不過其值仍然小於 1，其值以大於 1 較為合理。

四、結 論

以自飽和含水層超抽地下水而引起的地層下陷而言，其下陷過程應分為兩階段：代表正在抽水當中的前階段與停止抽水的後階段。理論模式

之探討是基於一相當簡單的理想情況，即假設地層下陷是來自垂直方向的壓密，而地下水流動僅限於在水平面，無垂直方向的流動。前階段的控制方程式為一擴散方程式，加一「源」，以代表抽水，而後階段的控制方程式為同一型式的擴散方程式，但無「源」。分析解均可利用 Green 函數由瞬時點源構建求得。求解的順序為先解前階段的微分方程式，而後再以抽水剛停止的「解」，做為後階段微分方程式之初始條件予以積分。

無論是前階段或是後階段，分析解受座標系統的影響甚鉅。若為直角座標系統，相關的微分方程式可直接積分求得，其結果多與誤差函數有關。但若為極座標系統，相關的微分方程式之解無法直接積分求得，必須利用數值積分求得，其結果與貝賽函數有關；同時，誤差函數改為指數遞減函數。數值積分技巧之適當與否，往往可差上好幾百的計算時間。

分析解展示為無因次函數式，其內包含兩個參數，一是擴散係數 D_0 ，因次為長度平方除以時間，用以反映土層組織與結構及水的性質，另一為無因次抽水係數 N_0 ，除了顯示土層組織與結構及水的性質等因素外，再加上抽水量的影響。因變數為無因次沉陷量，係配合擴散係數 D_0 、抽水係數 N_0 與管徑組合而成。用以代表空間的無因次自變數 ξ 以管徑予以無因次，無因次時間以管徑與擴散係數 D_0 予以無因次化。以一般情形而言，擴散係數 D_0 的變化幅度頗大，大致介於 10^{-4} 至 10^1 之

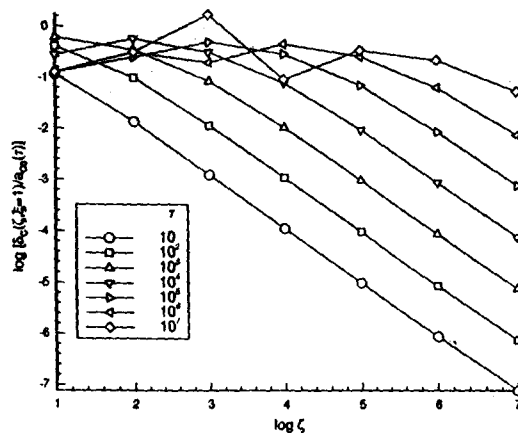


圖 10. 後階段極座標系統之最大沉陷量

間，單位為 ft^2/s ，而抽水係數 N_0 的變化幅度很小，可以 10^{-3} 計。通常無因次時間 τ 須高達 10^7 才相當於半年，而無因次空間 ξ 也須高達 10^4 才符合一般實際需要。

以分析解展示於圖上的曲線分佈與曲線走向及趨勢而言，除了後階段極座標系統的分析解外，其餘的都非常合理。此地，「合理」與否的判斷依據，為沉陷量隨著時間的增加而變大，同時沉陷範圍也擴大。

參閱前段，直角座標系統之分析解正確無誤，可直接應用於實際情況的探討，但是以實際情況的抽水井配置而言，極座標系統比較符合；在此情況下，作者認為不妨前階段採用極座標系統之分析解，而後階段改採用直角座標系統之分析解，但多項式近似式之首項係數應採用 a_{R0} 之值而不是 a_{C0} 之值。

分析解的好處之一，就是可利用在抽水井之「解」，由實測沉陷量、抽水量、管徑、抽水時間及所考慮的時刻，反求擴散係數 D_0 與抽水係數 N_0 的值。之後，再經由實測土層組織與結構之比較，即大致了解代表該沉陷層的擴散係數 D_0 與抽水係數 N_0 之合理範圍。而後，又可進一步分析所欲求的項目。

五、致 謝

本研究的進行承蒙經濟部水資源局研究計畫“地層下陷與超額抽取地下水關係之研討，經（八四）水84280122號”的補助，淡江大學數學系鄭惟厚教授及清華大學應用數學系許世壁教授的協助，在此致上謝意。

六、參考文獻

Bear, J., "Dynamics of Fluids in Porous Media", pp. 414-417, American Elsevier Pub. Co., New York, 1972.

Carslaw, H. S. and Jaeger J. C., "Conduction of Heat in Solids", pp. 353-357, 1969.

Eagleson P. S., "Dynamic Hydrology", pp. 310-312, McGraw-Hill Book Co., New York, 1970.

Gerald, C. F. and Wheatley, P. O., "Applied Numerical Analysis", Addison-Wesley Pub. Co., New York, pp. 326-328, 1992

Magnus W. and Oberhettinger F., "Formulas and Theorems for the Functions of Mathematical Physics", translated from the German by Werner John, pp. 34-35, Chelsea Pub. Co., New York, 1954.

Polubarinova-Kochina, P. Ya., "Theory of Ground Water Movement", translated from the Russian by J. M. Roger DeWiest, Princeton University Press, Princeton, N. J., pp. 550-551, 1962.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P., "Numerical Recipes in Fortran", Cambridge University Press., pp. 102-104, 123-127, 1992

Sowers, G. B. and Sowers, G. F., "Introductory Soil Mechanics and Foundation", 1970.

王北偉，“超額抽取地下水造成地層下陷之分析—LTFD數值方法”，淡江大學水資源及環境工程研究所碩士論文，1996。

施清吉，“地層下陷與超額抽取地下水關係之探討”，經濟部水資源局，1995。

施清吉，“地盤下陷與超額地下水抽取量間的關係分析”，土木水利季刊，第三卷，第二期 PP. 1-16，1976。

葉弘德，“抽水引致地層下陷的三維有限元素模式”，經濟部水資源局，1996。

收稿日期：民國86年3月21日

接受日期：民國86年4月28日