

多層半拘限含水層系統有限半徑 抽水井抽水洩降解析解

Analytical Solution of Drawdown in a Multiple Semi-Confined Aquifer System Due to Pumping from a Finite-Diameter Pumping Well

國立台灣大學土木工程研究所副教授

徐 年 盛

Nien-Sheng Hsu

摘 要

本文旨在求得自一有限半徑抽水井，由一多層半拘限含水層系統抽水所造成洩降及水位變化之解析解，並進行敏感度分析以探討抽水時各含水層參數對各層水位變化之影響程度。

在建立解析解時，本文首先解出單井單層抽水之穩態解，然後根據疊加原理求得單井多層抽水情況下之穩態解。由於非穩態下各含水層之出水量為時變狀態，因此本文引進脈衝反應函數及摺合積分之方法，分別求得非穩態固定抽水總量下之單層與多層抽水時之解析解。在進行模式中參數之敏感度分析，本文採用影響係數法以計算水位對參數之偏導數，再利用變異數矩陣判斷各參數對水位變化之敏感度。

最後本文以數值算例來說明解析解之特性，以及井半徑大小對非穩態下水位變化之影響。結果顯示當井半徑增加時，觀測點之洩降趨於穩定之時間亦相對增長。此算例亦應用於參數之敏感度分析上，結果顯示在單井多層抽水情況下，各參數均有相近之敏感程度，因此可做為決定各含水層參數之抽水試驗設計；此結果可用以替代成本較高之多井分別貫穿不同水層之抽水試驗。

關鍵詞：多層含水層系統，有效井徑，洩降，解析解，敏感度分析。

ABSTRACT

The purpose of this paper is to develop an analytical solution of drawdown in a multiple semiconfined aquifer system due to pumping from a finite-diameter well. Also performed in the study is the sensitivity analysis of the parameters of each layer with respect to drawdown of all aquifers. The parameters considered are the hydraulic conductivity and storage coefficient of each aquifer and the leakage of each aquifer.

In the development of the analytical solution, the steady state solution for pumping from

any single layer is derived first. The steady state solution for pumping from multiple layers is then obtained by using the principle of superposition. The solution of steady flow is then used as the initial conditions for developing the solution for unsteady flow cases due to constant pumping. To obtain the unsteady solution for time-varying pumping rate, a pulse response function is developed first and the discrete convolution is then performed.

In the sensitivity analysis, sensitivity coefficient of parameters with respect to drawdown are computed using the influence coefficient method. The covariance matrix is then computed and is used to investigate the relative sensitivity of the parameters with respect to drawdown.

A numerical example is provided to depict the characteristics of the analytical solution and the effect of well diameter on the unsteady state solution. Results show that when the well diameter gets larger, it takes more time for the drawdown to reach steady state at a given location. Sensitivity analysis is also performed by using the same example. Results show that, in order to have an equalweighted sensitivity of the parameters with respect to drawdown, water should be pumped from all layers by a single well that penetrates through all layers. An expensive alternative is also effective if water is pumped by multiple wells with each well penetrates an individual layer.

Keywords : Multiple-layered aquifer system, Effective well diameter, Drawdown, Analytical solution, Sensitivity analysis.

一、前言

本省主要地下水區大致為非固結之現代沖積層 (Recent Alluvium)，其構成通常為砂、礫與粘土互層，由於互層間並非完全不透水，因此在水文地質上通常視為多層半拘限含水層 (Multilayer semiconfined aquifer)。在地下水資源管理中，如何求得各含水層之水力特性及分析抽水所導致水頭洩降情況等，均為必須解決之基本問題，在求得多層含水層系統之水力參數時，傳統上通常假設其為單層並藉抽水實驗求得綜合效應之參數，但由於各水層形成之年代、介質來源及受壓密程度不同，其參數之差異性可能很大，以水資源規劃觀點來看，探討各層參數差異性將比求得綜合效應之參數有意義。因此導出多層半拘限含水層單井抽水洩降模式，做為現場抽水試驗以求得各層水力參數乃為一重要工作。

複雜的單或多層含水層系統之抽水洩降問題，已有許多重要研究成果發表。在自由及半拘限層之雙層系統方面 Neuman and Witherspoon(1969)^[1]導出

不考慮井半徑之單層抽水解析解；Saleem and Jacob (1974)^[2]，Moltz(1978)^[3]分別導出考慮及不考慮井半徑之單層抽水解析解，其與 Neuman^[1]之差異在於假設及邊界條件略有不同。Moench (1985)^[4]導出考慮井半徑之單層水層，且上下皆為滯水層之單層抽水解析解。Wikramaratna (1984)^[5]考慮多層拘限含水層系統之單井多層抽水，其間為不透水層。Hemker (1984)^[6]導出考慮井半徑且單井多層抽水之穩態解析解。Hunt (1985)^[7]亦導出不考慮抽水井半徑且單井多層抽水之穩態與非穩態解。

本文之目的即在求得多層半拘限含水層，有限井徑單井多層抽水之穩態及非穩態之洩降解析解，其與前人研究結果有下列不同處，包括：

- (1)採用 Hemker (1985)建議之方法，推導有限半徑抽水井所造成水位變化情況之穩態與非穩態解析解；
- (2)提出求得單井多層抽水時，各含水層出水量之計算方法；
- (3)考慮非穩態情況下，各水層之出水量隨時間而

變之情況，並建議採用疊加法原理計算其解；
以及
(4)利用敏感度分析之方法，探討利用混層抽水時，各層參數對水位變化之敏感程度，並建議抽水試驗方式。

二、推導過程

1. 控制方程式

本文所考慮之多層半拘限含水層系統及其水流情況，需滿足下列條件：(1)各含水層與滯水層為無限延展且厚度不變；(2)各含水層與滯水層為均質並具等向性，且其性質不因抽水改變；(3)各滯水層不具儲水作用，僅具垂直傳輸功能；(4)抽水前各含水層、自由水層及底層之水頭為水平且相同；(5)當抽水時，各含水層之水流滿足達西定律，且為水平向心流，而自由含水層與底層之水頭則不因抽水而改變。根據Neuman與Witherspoon^[1]及Bredheoft and Pinder^[8]之建議，若下式之一成立時，則條件(3)不能成立：

$$\frac{r}{4b} \left(\frac{K'S_s}{K S_s} \right)^{1/2} > 0.01 \text{ 或 } \frac{K't}{S_s'(b)^2} < 0.1 \quad (1)$$

上式中， K, K', S_s, S_s' 分別為含水層及滯水層之水力傳導係數與比貯蓄係數(Specific storage)。根據上述條件，各含水層之水流方程式可由三維控制方程式垂直積分而得，並可利用圓柱座標表示如下：

$$T_i \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h_i}{\partial r} \right) \right\} = S_i \frac{\partial h_i}{\partial t} + L_i (h_i - h_{i-1}) + L_{i+1} (h_i - h_{i+1}), \quad i=1, 2, \dots, N \quad (2)$$

上式中， T_i, S_i 與 h_i 分別為第*i*含水層之導水係數(Transmissivity)、貯蓄係數(Storage coefficient)及管壓水頭； L_i 為滯水層之阻滯係數(Leakance, $L_i = K'_i/b'_i$)， K'_i, b'_i 分別為其垂直向之水力傳導係數與厚度； r, t 分別為至井心距離與時間變數； h_0 與 h_{N+1} 分別為自由水層與底層之水頭。

各含水層之水流控制方程式並滿足下列起始及邊界條件：

$$\lim_{t \rightarrow 0} h_i(r, t) = 0 \quad (3a)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_i(r, t) = 0 \quad (3b)$$

$$\lim_{r \rightarrow r_c} T_i \cdot \left(r \frac{\partial h_i(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{Q_i(r_c, t)}{2\pi}, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (3c)$$

式(3c)中 r_c 為水井有效井徑，其定義為井半徑 r_w 與係數*f*之乘積；*f*之值可由濾層厚度決定，其值通常大於或等於1； $Q_i(r_c, t)$ 為第*i*含水層於時間*t*之出水量。

在單井且各層均抽水之情況下，井之水位為各水層之混合水位，故各水層在有效井徑內之水頭應相同，且各含水層之出水量與由井水位下降所釋出水量和必等於總抽水量，亦即下列兩式尚須滿足：

$$h_1(r_c, t) = h_2(r_c, t) = \dots = h_N(r_c, t) \quad (4a)$$

$$\sum_{i=1}^N Q_i(r_c, t) - \pi r_c^2 \frac{\partial h_w(t)}{\partial t} = Q \quad (4b)$$

上式中， h_w 為井混合水位； Q 為總抽水量。

假設自由水層與底層之水頭不因抽水而改變(即為0)，則式(2)與(3)可表示成陣列型式如下：

$$[T] \cdot \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{h}}{\partial r} \right) \right\} = [S] \cdot \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + [L] \cdot \bar{h} \quad (5)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \bar{h}(r, t) = 0 \quad (6a)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{h}(r, t) = 0 \quad (6b)$$

$$\lim_{r \rightarrow r_c} [T] \cdot \left(r \frac{\partial \bar{h}(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{1}{2\pi} \bar{Q}_c(r_c, t) \quad (6c)$$

上式中：

$$[T] = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & T_N \end{pmatrix}_{N \times N}, \text{ 爲 } -(N \times N)\text{-之矩陣；}$$

$$[S] = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & S_N \end{pmatrix}_{N \times N}, \text{ 爲 } -(N \times N)\text{-之矩陣；}$$

$$\bar{h} = \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{N-1} \\ h_N \end{Bmatrix}_{N \times 1}, \text{ 爲 } -(N \times 1)\text{-之向量；}$$

$$[L] = \begin{pmatrix} L_1 + L_2 & -L_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -L_2 & L_2 + L_3 & -L_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -L_{N-2} & L_{N-1} + L_N & -L_N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -L_N & L_N + L_{N+1} \end{pmatrix}_{N \times N}$$

為 $-(N \times N)$ -之矩陣；以及

$$\bar{Q}_c(r_c, t) = \begin{Bmatrix} Q_1(r_c, t) \\ Q_2(r_c, t) \\ \vdots \\ Q_N(r_c, t) \end{Bmatrix}_{N \times 1}, \text{ 爲 } -(N \times 1)\text{-之向量。}$$

2. 穩態解

在穩態情況下，式(5)、(6)及(4)可考寫成下列諸式：

$$[T] \cdot \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{h}}{\partial r} \right) \right\} = [L] \cdot \bar{h} \quad (7)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{h}(r) = 0 \quad (8a)$$

$$\lim_{r \rightarrow r_c} [T] \cdot \left(r \frac{\partial \bar{h}(r)}{\partial r} \right) = \frac{1}{2\pi} \bar{Q}_c(r_c) \quad (8b)$$

$$h_1(r_c) = h_2(r_c) = \dots = h_N(r_c) \quad (9a)$$

$$\sum_{i=1}^N Q_i(r_c) = Q \quad (9b)$$

上式中， $\bar{Q}_c(r_c) = \begin{Bmatrix} Q_1(r_c) \\ Q_2(r_c) \\ \vdots \\ Q_N(r_c) \end{Bmatrix}_{N \times 1}$ ，為一 $(N \times 1)$ 之向量。

(1) 單井單層抽水

穩態下單層（第 i 層）抽水時，式(8b)與(9b)可考寫成：

$$\lim_{r \rightarrow r_c} [T] \cdot \left(r \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial r} \right) = \frac{1}{2\pi} \bar{Q}_i \quad (8c)$$

$$Q_i = Q \quad (9c)$$

$[T] = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & T_i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{N \times N}$ ，為一 $(N \times N)$ 之矩陣；

$\bar{Q}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ Q_i \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}_{N \times 1}$ ，為一 $(N \times 1)$ 之向量；以及 Q_i 為第 i 層之抽水量。

因含水層為均質且具等向性，且為單井抽水，故其每層之管壓水頭均為輻射狀對稱，因此

穩態解 \bar{h}_s 可表成下列型式：

$$\bar{h}_s = \phi(r) \cdot \bar{U} \quad (9)$$

上式中， $\phi(r)$ 為距離的函數， \bar{U} 為一 $(N \times 1)$ 之向量。

將式(9)代入控制方程式(7)與邊界條件式(8a),(8c)可得：

$$[T] \cdot \bar{U} \cdot \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) \right\} = [L] \cdot \bar{U} \phi \quad (10)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = 0 \quad (11a)$$

$$\lim_{r \rightarrow r_c} [T] \cdot \bar{U} \cdot \left\{ r \frac{d\phi(r)}{dr} \right\} = \frac{1}{2\pi} \bar{Q}_i \quad (11b)$$

如果令

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = \lambda \phi \quad (12)$$

則式(10)可改寫為：

$$\{ [L] - \lambda [T] \} \cdot \bar{U} = 0 \quad (13)$$

$$\text{或 } [T]^{-1} \cdot [L] \cdot \bar{U} = \lambda \cdot \bar{U} \quad (14)$$

上式為一特徵值問題， λ ， \bar{U} 分別為特徵值及特徵向量。

如將向量 \bar{X} 與矩陣 $[A]$ 表示成下列兩式：

$$\bar{X} = [T^{1/2}]^{-1} \cdot \bar{U} \quad (15)$$

$$[A] = [T^{1/2}]^{-1} \cdot [L] \cdot [T^{1/2}]^{-1} \quad (16)$$

則式(14)可改寫為

$$[A] \cdot \bar{X} = \lambda \cdot \bar{X} \quad (17)$$

式(15)與(16)中，矩陣 $[T^{1/2}]$ 之元素為矩陣 $[T]$ 中元素之方根。

由式(17)可求出 N 個特徵值 λ_i ， $i=1,2,\dots,N$ 及所對應之單位特徵向量 \bar{X}_i ， $i=1,2,\dots,N$ ，因 A 為對稱矩陣故各特徵向量為相互正交。將 \bar{X}_i 代入式(15)可得：

$$\bar{U}_i = [T^{1/2}] \cdot \bar{X}_i \quad (18)$$

式(18)可很容易求其解並表為第一及第二類修正零階 Bessel 函數，再將邊界條件(11a)代入則可得：

$$\phi(r) = P \cdot K_0(\lambda_1^2/2r) \quad (19)$$

因每一特徵值 λ_i 及特徵向量 \bar{U}_i 均為式(17)之解，故可將式(9)表為如下之通解：

$$\bar{h}_s = \sum_{i=1}^N P_i \cdot K_0(\lambda_i^2/2r) \cdot \bar{U}_i \quad (20)$$

式中 P_i 為一組特定係數可由邊界條件及利用特徵向量間相互正交之特性求出如下：

$$P_i = -\frac{\bar{U}_i^T \cdot \bar{Q}_i}{2\pi \cdot \lambda_i^2/2r_c \cdot K_1(\lambda_i^2/2r_c)} \quad (21)$$

式(20)與(21)即為單井單層抽水時，各半拘限含水層水位變化情況之解析解。

(2) 單井多層同時抽水

式(7)、(8a)與(8b)為 \bar{h}_s 之線性方程式，故其解可由單層抽水配合疊加原理求得，此現象亦可由式(20)與(21)看出，假設各層之抽水出水量 Q_i ， $i=1, 2, \dots, N$ 事先得知，則各層之水位變化情況可表示如下式：

$$\bar{h}_s = -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\bar{U}_i^T \cdot \bar{Q}_j}{2\pi \cdot \lambda_i^2/2r_c \cdot K_1(\lambda_i^2/2r_c)} K_0(\lambda_i^2/2r) \cdot \bar{U}_i \quad (22)$$

此式與 Hemker [6] 所推得之解析解相同。又當水井有效半徑趨近於零時，則式(22)可簡化為 Hunt [7] 之解析解形式。式(22)可進一步表示如下式：

$$\bar{h}_s = \sum_{i=1}^N Q_i \cdot \bar{I}_i(r) \quad (23)$$

$$\bar{I}_i(r) = \begin{Bmatrix} I_{i1}(r) \\ \vdots \\ I_{im}(r) \\ \vdots \\ I_{iN}(r) \end{Bmatrix}_{N \times 1}, \text{ 爲 } (N \times 1)\text{-之向量。}$$

上式中， $\bar{I}_i(r)$ 為自土層抽取單位水量，各層距井心 r 處之水位變化所組成之向量；以及 $I_{mi}(r)$ 為自 i 層抽取單位水量所造成第 m 層距井心 r 處之水位變化。則抽水井之混合水位 h_w 可表示如下：

$$h_w = \lim_{r \rightarrow r_c} \sum_{i=1}^N Q_i \cdot \bar{I}_i(r) \quad (24)$$

各含水層出水量可利用(9b)與(24)式並滿足式(9a)

之條件求得，其法之疊代步驟可描述如下：

(1) 根據單層抽水之解析解，即式(20)、(21)與(18)可知相同之水位變化下，抽水量與流通係數成正比，故疊代開始前可根據抽水層流通係數權重比 W_j ，以求得起始之各半拘限層出水量

$$Q_j^0 (= W_j Q), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

(2) 假設疊代次數 $k=0$ 。

(3) 利用式(24)計算各層抽水導致井壁之水位變化 $h_j^k(r_c)$ 。

(4) 利用下式計算混合水位之近似值。

$$h_w^k = \sum_{j=1}^N W_j h_j^k(r_c) \quad (25)$$

(5) 根據質量平衡原理，可利用下式計算下一次 $k+1$ 疊代之各層抽水量。

$$Q_j^{k+1} = Q_j^k \frac{h_w^k}{h_j^k(r_c)} + W_j \left(Q - \sum_{i=1}^N Q_i^k \frac{h_w^k}{h_i^k(r_c)} \right) \quad (26)$$

(6) 重覆步驟(3)~(5)直到計算之混合水位或各層之計算抽水量收斂為止。

上述疊代法在本文所採用之算例中僅需3~5次疊代即可得到相當不錯之結果，尤其在抽水層數較多或滯水層阻滯係數較小之情況下，更能突顯本方法之優點。

3. 非穩態解

在非穩態情況下，單井多層抽水之水流情況可利用式(5)、(6)及(4)加以描述。式(5)與(6)之完全解 \bar{h} 可表示為穩態解 \bar{h}_s 及非穩態特解 \bar{h}_u 之組合如下：

$$\bar{h}(r, t) = \bar{h}_s(r) + \bar{h}_u(r, t) \quad (27)$$

將上式代入(5)與(6)式可得

$$[T] \cdot \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{h}_u}{\partial r} \right) \right\} = [S] \cdot \frac{\partial \bar{h}_u}{\partial t} + [L] \cdot \bar{h}_u \quad (28)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \bar{h}_u(r, t) = -\bar{h}_s(r) \quad (29a)$$

$$\lim_{r \rightarrow r_i} \bar{h}_u(r, t) = 0 \quad (29b)$$

$$\lim_{r \rightarrow r_c} [T] \cdot \left(r \frac{\partial \bar{h}_u(r, t)}{\partial r} \right) = 0 \quad (29c)$$

為滿足齊性邊界條件，本文先忽略式(4b)第二項中由於井水位下降所釋出之水，俟進行摺合積分時再加以考慮，上式中 $r \rightarrow \infty$ 在數值計算時可取一距水井很遠之距離。

利用分離變數法，令式(28)之解表示如下式：

$$\bar{h}_u(r, t) = f(t) g(r) \cdot \bar{V} \quad (30)$$

上式中， \bar{V} 為一 $(N \times 1)$ 之向量，將式(30)代入(28)與(29)可得：

$$[T] \cdot \nabla f(t) \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dg}{dr} \right) \right\} = [S] \cdot \nabla g(r) \frac{df}{dt} + [L] \cdot \nabla f(t) g(r) \quad (31)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) g(r) \cdot \nabla = -\bar{h}_s(r) \quad (32a)$$

$$\lim_{r \rightarrow r_0} f(t) g(r) \cdot \nabla = 0 \quad (32b)$$

$$\lim_{r \rightarrow r_0} [T] \cdot \nabla f(t) \left(r \frac{\partial g}{\partial r} \right) = 0 \quad (32c)$$

由式(31)式可知，若令下列兩式成立：

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dg}{dr} \right) = -\gamma g(r) \quad (33)$$

$$\frac{df(t)}{dt} = -\beta f(t) \quad (34)$$

則式(31)可改寫為：

$$\gamma [T] \cdot \bar{V} f(t) g(r) = \beta [S] \cdot \bar{V} g(r) f(t) - [L] \cdot \bar{V} f(t) g(r) \quad (35)$$

或

$$\left\{ \gamma [T] - \beta [S] + [L] \right\} \cdot \bar{V} = 0 \quad (36)$$

若再將 \bar{V} 與[B]表示成下列兩式：

$$\bar{V} = [S^{1/2}]^{-1} \cdot \bar{V} \quad (37)$$

$$[B] = [S^{1/2}] \cdot \{ [L] + \gamma [T] \} \cdot [S^{1/2}]^{-1} \quad (38)$$

則式(36)可改寫為

$$[B] \cdot \bar{V} = \beta \cdot \bar{V} \quad (39)$$

上式中 $[S^{1/2}]$ 之元素為[S]中對應元素之平方根。

由式(39)可解得矩陣[B]之N個特徵值 $\beta_i, i=1, 2, \dots, N$ 及所對應之單位化特徵向量

$\bar{V}_i, i=1, 2, \dots, N$ 。且因[B]為一對稱矩陣，故各特徵向量為相互正交。而式(34)可求得如下：

$$f(t) = D e^{-\beta t} \quad (40)$$

因所有 $\beta_i, i=1, 2, \dots, N$ 均為式(39)之解，故f(t)之通解如下：

$$f(t) = \sum_{i=1}^N D_i e^{-\beta_i t} \quad (41)$$

上式中 D_i 為一特定係數。

式(30)之 $g(r)$ 以及式(33)中之係數 γ 則藉由式(33)及邊界條件求得。式(33)之解可表示為第一類及第二類之零階Bessel函數如下：

$$g(r) = C_1 J_0(\alpha^{1/2} r) + C_2 Y_0(\alpha^{1/2} r) \quad (42)$$

假設井徑不太大情況下則 $J_1(\alpha^{1/2} r_0)$ 趨於0，故可令 $C_2 = 0$ 。另由邊界條件(29b)與(30)可得

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} C_1 J_0(\alpha^{1/2} r) = 0 \quad (43)$$

或

$$\lim_{r \rightarrow \infty} J_0(\alpha^{1/2} r) = 0 \quad (44)$$

式(44)之解為無窮多個，即 $\alpha_j, j=1, 2, \dots, \infty$ 則 $g(r)$ 可表示為

$$g(r) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j J_0(\alpha_j^{1/2} r) \quad (45)$$

另由式(41)可知相對於每一個 α_j 之值均可得一組 β_j

與 \bar{V}_j (或 \bar{V}_j)，故f(t)可表示為

$$f(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\infty} D_{ij} e^{-\beta_j t} \quad (46)$$

將式(45)與(46)代入(30)可得：

$$\bar{h}_u = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} e^{-\beta_j t} J_0(\alpha_j^{1/2} r) \cdot \bar{V}_j \quad (47)$$

上式中 K_{ij} 為特定係數。

(1)單井單層抽水

假設自第 l 層抽水時，則將式(47)與(20)代入起始條件(32a)並利用特徵向量間相互正交及Bessel函數相互正交之事實，可推導得：

$$K_{ij}^l = \frac{1}{R_j} \sum_{k=1}^N -P_k \cdot O_k \cdot \bar{U}_k^T \cdot [S] \cdot \bar{V}_{ij} \quad (48a)$$

且

$$R_j = \frac{1}{2} r_j^2 J_1^2(\alpha_j^{1/2} r_i) \quad (48b)$$

$$P_k = \frac{\bar{U}_k^T \cdot \bar{Q}_i}{2\pi \cdot \lambda_k^{1/2} r_c \cdot K_1(\lambda_k^{1/2} r_c)} \quad (48c)$$

$$O_k = \frac{1 + \alpha_j^{1/2} r_i J_1(\alpha_j^{1/2} r_i) K_0(\lambda_k^{1/2} r_i)}{\lambda_k + \alpha_j} \quad (48d)$$

(2) 單井多層同時抽水

與穩態之情況相同，式(48)亦為一線性方程式，故多層抽水之解亦可藉由單層抽水之解疊加而得。假設各層之抽水 Q_l ， $l=1, 2, \dots, N$ 為事先已知之函數，則各層非穩態之水位變化情形可表示如下：

$$\bar{h}_u = \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{\infty} k_{ij} e^{-\beta_{ij} t} J_0(\alpha_j^{1/2} r) \bar{V}_{ij} \quad (49)$$

式(49)可進一步表示如下式：

$$\bar{h}_u = \sum_{l=1}^N Q_l \bar{I}_l(r, t) \quad (50)$$

$$\text{上式中， } \bar{I}_l(r, t) = \begin{Bmatrix} I_{1l}(r, t) \\ \vdots \\ I_{ml}(r, t) \\ \vdots \\ I_{Nl}(r, t) \end{Bmatrix}_{N \times 1}$$

式(50)中， $\bar{I}_l(r, t)$ 為 l 層單位抽水時，各層水位變化量所組成之向量；以及 $I_{ml}(r, t)$ 為 l 層單位抽水時，第 m 層距中心 r 處於 t 時間後之水位變化量。

在非穩態下，因各層之出水量隨時間之增加而不同，為利用上式計算各層之水位變化，本文乃將抽水時段平均分段，每段長 Δt 並假設在各時段內各層出水量分別為定值，則在第一個 Δt 中，自 l 層抽取單位水量所造成各層之水位變化量可計算如下：

$$\Delta \bar{I}_l(r, t) = \begin{cases} \bar{I}_l(r, \tau), & \text{for } 0 \leq \Delta t \leq \tau \\ \bar{I}_l(r, \tau) - \bar{I}_l(r, \tau - \Delta t), & \text{for } \Delta t \leq \tau \leq \infty \end{cases} \quad (51)$$

最後將各時段抽水所造成之水位變化量摺合疊加而得實際水位變化量如下：

$$\bar{h}_u(r, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\Delta t \leq \tau \leq \infty} Q_l(i\Delta t) \cdot \Delta \bar{I}_l(r, \tau - i\Delta t) \quad (52)$$

三、數值算例

為探討模式特性及有效半徑對各層水位變化及出水量之影響，本文乃利用一虛擬地下水系統 (Hypothetical groundwater system) 以利說明與討論，圖1為此系統之地質結構圖，而其參數值及編號則列如表1所示，算例中總抽水量均採用 $3 \times 10^{-2} \text{ cms}$ 。

表 1. 虛擬地下水系統各含水層之水文參數值及編號

含水層	滲透係數 T (m^2/sec)	參數 編號	貯留係數 S	參數 編號	滲水層	阻滯係數 K'/B' (sec^{-1})	參數 編號
1	3×10^{-3}	1	1×10^{-4}	12	1	1×10^{-5}	6
2	9×10^{-4}	2	4×10^{-5}	13	2	3×10^{-5}	7
3	2×10^{-3}	3	3×10^{-4}	14	3	7×10^{-6}	8
4	7×10^{-4}	4	2×10^{-4}	15	4	2×10^{-5}	9
5	5×10^{-4}	5	8×10^{-5}	16	5	6×10^{-6}	10
					6	8×10^{-6}	11

總抽水量 $Q = 3 \times 10^{-2} \text{ cms}$

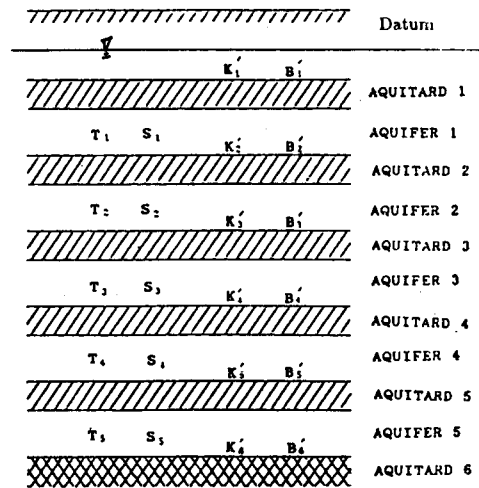


圖 1. 虛擬地下水系統之分層結構圖

1. 穩態單層抽水

穩態下當水井有效半徑為 $5 \times 10^{-1} m$ 並於第 3 層抽水時，計算結果顯示在井附近以第 3 層之水頭洩降為最大（如圖 2），第 4 層次之並依距抽水層垂直距離之增加而遞減，至最遠之第 1, 5 含水層其洩降已不顯著，至於其他單層抽水亦可得相同

結論。因滯水層之滲漏作用，在水平向上各層之洩降將隨距井距離增加而趨平衡，至約300米時其洩降已不明顯。

2. 穩態多層抽水

本文以第1,3兩層抽水為例（井有效半徑 $5 \times 10^{-1}m$ ），求解穩態下多層抽水之各水層出水量與水位變化情況，結果顯示此兩層之出水量分別為0.01828與0.01172cms，且其洩降特性與單層抽水模式類似（如圖3），但在總抽水量固定情況下其

各層洩降較單層抽水者為小。利用本模式可進一步分析何種抽水配置能滿足洩降限制及最佳抽水成本等問題，此為水資源利用及管理問題，本文不予探討。

3. 非穩態單層抽水

本文仍以第3層抽水為例，並以距井心30m處之時間洩降關係，說明非穩態單層抽水之水位變化情況，由圖4可知距開始抽水2~3秒後，在計算位置之洩降始有明顯變化，且距井愈遠其洩降達

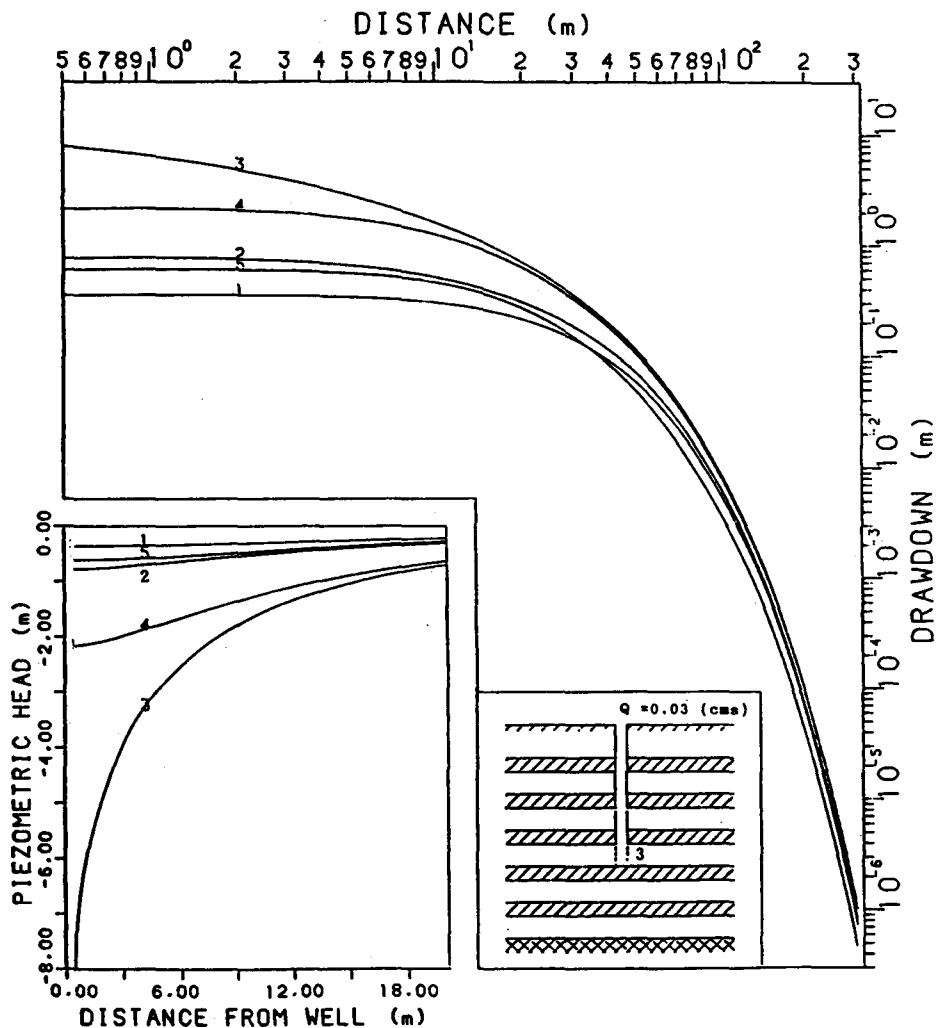


圖 2. 第三層含水層抽水穩態下洩降與管壓水頭變化分佈 (井半徑為 0.5M)

到顯著變化之時間愈慢，此乃含水層貯蓄作用之影響。

4. 非穩態多層抽水

在多層抽水時，水位之非穩態變化情況之探討中，本文假設有效井徑 0.1m 之抽水井其五個水層均抽水，並於距井心 30m 處探討洩降與出水量隨時間變化情況，結果如圖 5 及圖 6 所示。由圖 6 可知各層之出水量於 30 ~ 40 秒後即趨於定值，其各含水層（由上至下）出水百分比率分別為 43.3

% : 12.3 % : 26.1 % : 9.5 % : 8.8 %。

5. 有效井徑之影響

為探討有效井徑對各層水位變化及出水量之影響，本文乃利用前述非穩態多層抽水之問題，並將井徑擴大為 0.3m 以資比較，其結果如圖 7 及 8 所示，圖 8 顯示各層之出水量至 280 秒仍未趨於平衡，若與圖 6 比較，可知當井徑愈大其各抽水層出水量愈慢達到穩態，此乃由於井水位下降所釋

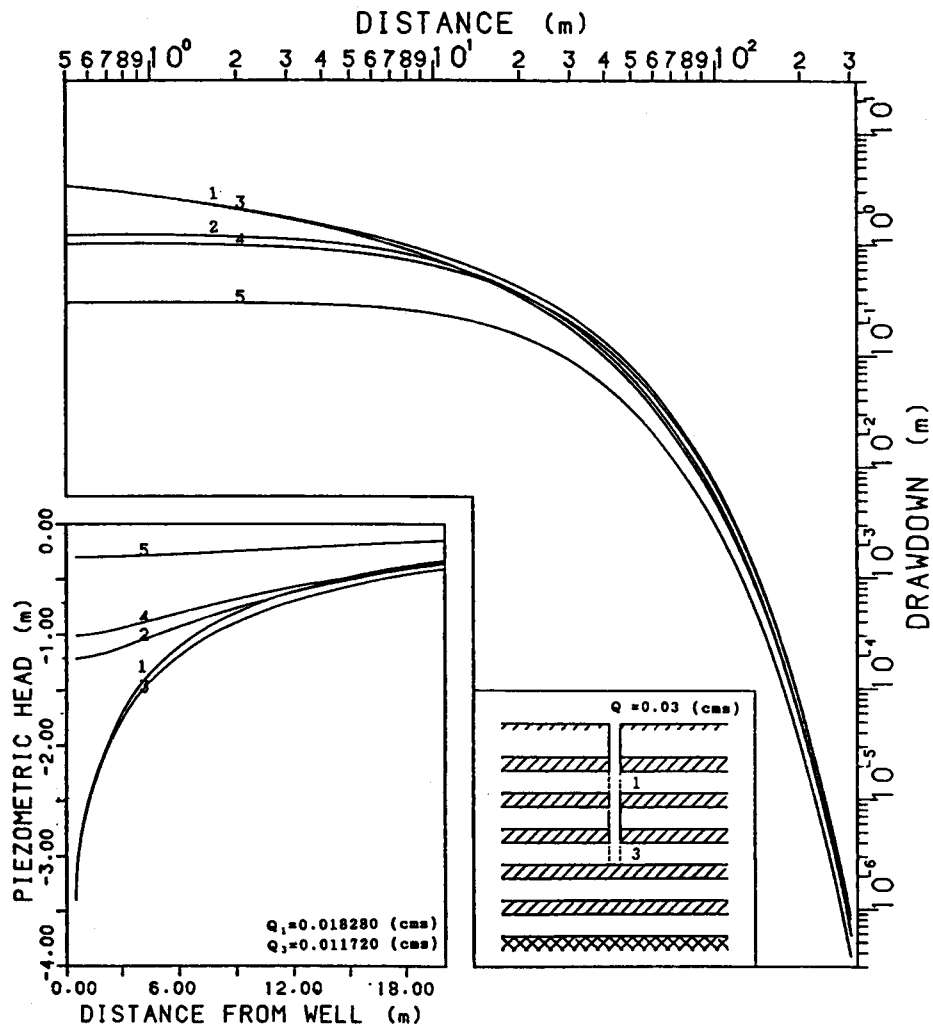


圖 3. 第一、三層含水層抽水穩態下洩降與管壓水頭變化分佈 (井半徑為 0.5M)

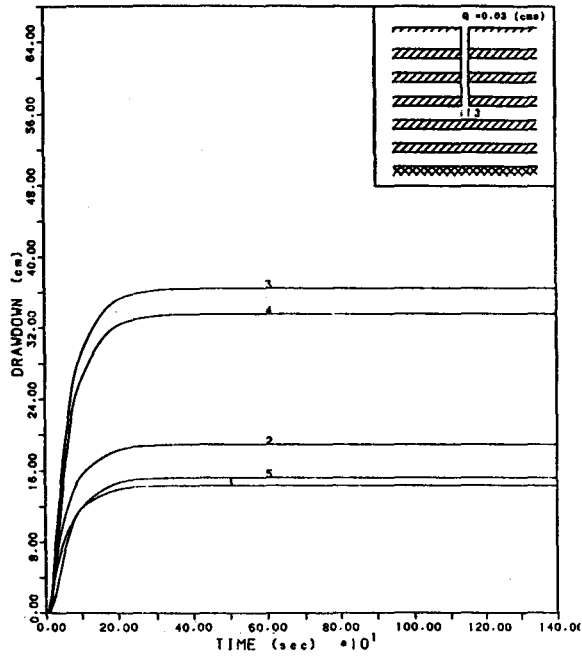


圖 4. 第三層含水層抽水非穩態下距井心 30 米處之時間洩降之關係 (井半徑為 0.5M)

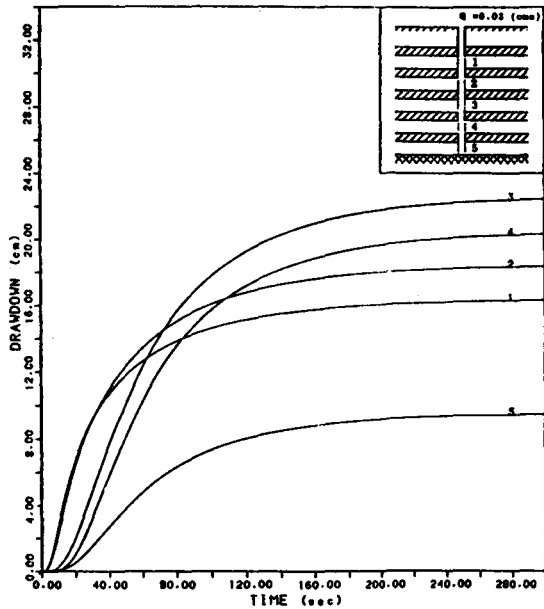


圖 5. 單井完全貫穿抽水非穩態下距井心 30 米處之時間洩降關係 (井半徑為 0.1M)

四、參數敏感度分析

敏感度分析乃利用模式中參數之互變異性關係，來探討參數對模式反應及參數間之相關性，以判斷各參數之可檢定性 (Identifiability)。對一多

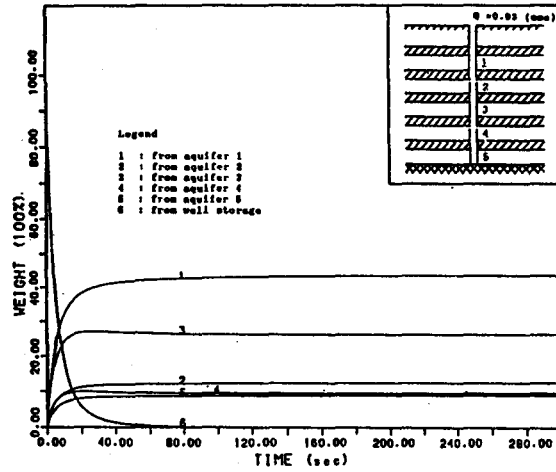


圖 6. 單井完全貫穿抽水非穩態下各水層出水量比率 (井半徑為 0.1M)

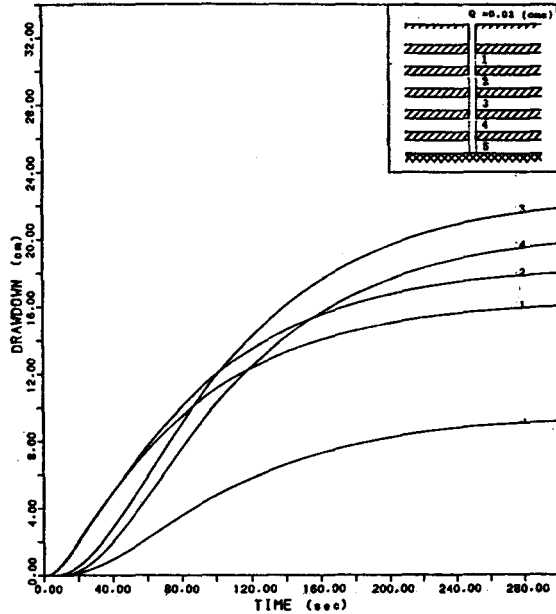


圖 7. 單井完全貫穿抽水非穩態下距井心 30 米處之時間洩降關係 (井半徑為 0.3M)

變量非線性互變異矩陣之估計可表為 (Hsu, et al [9]; Bard, 1974 [10]; Yeh and Yoon, 1981 [11]) :

$$COV(\hat{\theta}) = \frac{J(\hat{\theta})}{M-L} [A(\hat{\theta})]^{-1} \quad (53)$$

且

$$J(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^M (h_i^c - h_i^o)^2$$

$$A(\hat{\theta}) = [J_a(\hat{\theta})]^T \cdot [J_a(\hat{\theta})]$$

$$J_a(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial h_1}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial \theta_L} \\ \frac{\partial h_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial h_2}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial \theta_L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_M}{\partial \theta_1} & \frac{\partial h_M}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial h_M}{\partial \theta_L} \end{pmatrix} M \times L$$

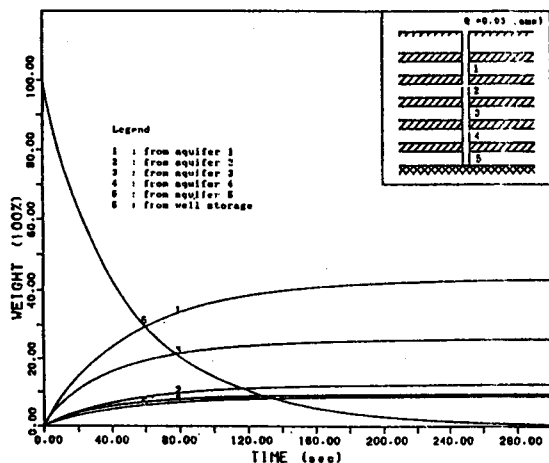


圖 8. 單井完全貫穿抽水非穩態下各水層出水量比率 (井半徑為 0.3M)

式中 h_i^0 , h_i^A 分別為模式之計算值與現場觀測值； $J_n^A(\hat{\theta})$ 為賈谷比矩陣 (Jacobian matrix)； $\hat{\theta}$ 為參數估計值； M , L 分別為觀測值及參數個數； $\frac{\partial h_i}{\partial \theta_j}$ 為敏感係數 (Sensitivity coefficient)。本文採用影響係數法求取敏感係數，其近似值可表為：

$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial \theta_j}\right) \approx \frac{h_i(\hat{\theta} + \Delta\theta \cdot e_j) - h_i(\hat{\theta})}{\Delta\theta \cdot e_j}$$

$$i = 1, 2, \dots, M; \quad j = 1, 2, \dots, L$$

式中 $\Delta\theta$ 為參數之增量，一般取參數值之 5% 作為初始分析之用，若欲求取較適當之增量，則須藉用敏感度分析予以擇定； e_j 為單位向量數列。

互變異矩陣之主對角線值為各參數相對之變異數，可提供參數敏感度訊息。如相對於其它參數之變異數愈大則表示此參數愈不敏感，換句話說其參數值之變化對模式計算結果影響程度小，反之參數愈敏感則對模式計算值之影響也愈大。參數愈敏感表示在檢定過程時較容易收斂，反之不敏感參數在檢定過程中並不易收斂至真值，所以進行參數檢定前需做敏感分析，目的即在探討

模式中各參數之可檢定性。

本文以模式算例當成觀測值進行模式中參數之敏感度分析，以本算例而言其參數總數為 16 個，觀測值則取 100 組（距井心 30 及 100 米，各層均取 10 組不同時段之水位觀測值），對不同抽水情況之敏感度分析結果列如表 2 所示。由表 2 可知當對某單一水層進行抽水時，其各層之水文地質參數之敏感度隨距抽水層距離之增加而減小，由此可知距抽水層較遠水層之參數值改變對整個系統水頭分佈影響程度小。以參數檢定過程而言，這些不敏感參數不易由此種抽水型態求得真值，只有在靠近抽水層附近之含水層參數方有較佳收斂效果。至於在多層抽水模式，在整個水層皆貫穿之情況，各參數之敏感度差異性不大，因此可藉由增加抽水量以提高參數之敏感度。

表 2. 穩態下不同抽水情況各參數對水位變化之敏感度分析

抽水層次	敏感參數†	次敏感參數‡	不敏感參數¶
1	1,6	2,3,7,8,9,10,11	4,5
2	2	1,6,7	3,4,5,8,9,10,11
3	3	1,2,4,5,6,7,8,9,10,11	-
4	4	3,5,6,7,8,9,10,11	1,2
5	5	3,4,8,9,10,11	1,2,6,7
1,2	-	1,2,3,6,8,9,10,11	4,5,7
3,4	-	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11	-
1,2,3,4,5	-	-	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11

註：

† 敏感即指變異係數 (σ^2) 大於 10^{-3} ；

‡ 次敏感即指變異係數 (σ^2) 介於 10^{-3} 與 10^{-5} 之間；

¶ 不敏感即指變異係數 (σ^2) 小於 10^{-5} 。

五、結 論

本文利用解析方法探討多層半拘限含水層單井抽水時，各含水層之水位或洩降變化情況，文中特考慮水井有效半徑對抽水洩降與各水層出水量之影響，最後並利用參數敏感分析以探討模式參數之可檢定性。

穩態及非穩態下之單井多層抽水情況，本文

採用疊代法以計算各層之出水量，此法在抽水層數較多或滯水層阻滯係數較小之情況下更突顯其計算效率之優點。

由數值算例之結果得知，抽水井之有效半徑對各水層出水量趨於穩態所需之時間影響頗大，但當有效井半徑較小時則可很快地趨於穩態，因此可假設各層出水量為定值，雖然在開始抽水後短期內，其計算水頭有誤差，但長時間與各層出水量為時間函數所計算得之水頭相當一致。

本文並藉由參數之敏感度分析以探討模式參數之可檢定性，結果得知當對某單一水層抽水時，其各水層參數對水位變化之敏感度隨距抽水層距離之增加而減少；若各層同時抽水時則各層參數之敏感度則相近，故應以增加抽水量來提高參數之敏感度。

六、誌謝

本文所述之研究結果為國科會補助計畫案 NSC 80-0410-E002-49 之一部份，作者在此謹誌謝忱。

七、參考文獻

1. Numan, S. P., and P. A. Witherspoon, "Theory of flow in a confined two-aquifer system," *Water Resour. Res.*, vol. 5(4), pp.803-816, 1969.
2. Saleem, Z. A., and C. E. Jacob, "Drawdown distribution due to well fields in coupled leaky aquifers, (2) Finite aquifer system," *Water Resour. Res.*, vol. 10(2), pp. 336-342, 1974.
3. Moltz, L. H., "Steady-state drawdowns in coupled aquifers," *J. Hydraul. Div. Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 104(HY7), pp.1061-1074, 1978.
4. Moench, A. F., "Transient flow to a large-diameter well in an aquifer with storative semiconfining layers," *Water Resour. Res.*, vol. 21(8), pp.1121-1131, 1985.
5. Wikramaratna, R. S., "An analytical solution for the effects of abstraction from a multilayered confined aquifer with no cross flow," *Water Resour. Res.*, vol. 20(8), pp.1067-1074, 1984.
6. Hemker, C. J., "Steady groundwater flow in leaky multiple-aquifer systems," *J. Hydrol.*, 72, pp.355-374, 1984.
7. Hunt, B., "Flow to a well in a multiaquifer system," *Water Resour. Res.*, vol.21(11), pp.1637-1641, 1985.
8. Bredehoeft, J. D., and G.F. Pinder "Digital analysis of areal flow in multiaquifer groundwater systems: A quasi three-dimensional model," *Water Resour. Res.*, vol. 6(3), pp.883-888, 1970.
9. Hsu, N. S., B. J. Williams, W. W-G. Yeh, and M. K. Stenstrom, "Use of estimation techniques for flood forecasting," Contribution Report No. 192, California Water Resources Center.
10. Bard, Y. m., "Nonlinear Parameter Estimation," Academic Press Inc., 1974.
11. Yeh, W. W-G., and Y. S. Yoon, "Parameter Identification with Optimum Dimension in Parameterization," *Water Resour. Res.*, vol. 17(3), pp.664-672, 1981.

收稿日期：民國 86 年 1 月 20 日

修改日期：民國 86 年 2 月 7 日

接受日期：民國 86 年 2 月 10 日