

有限差分法應用於模擬裸地蒸發之土壤水分含量剖面

Simulation of the Soil Moisture Content Profile for a Bare Soil Evaporation Using the Finite Difference Method

國立臺灣大學農業工程學系博士後研究

郭 勝 豐

Sheng-Feng Kuo

摘 要

裸地表土蒸發時土層中土壤水分變化情形為灌溉管理所需之基本資料。裸地蒸發之物理現象可概分為兩個階段：(一)穩定期：蒸發率為大氣控制，(二)漸減期：蒸發率為土層中土壤水分控制。本研究依據表土蒸發之物理現象推導數學公式並定義偏微分程之非線性邊界條件，有限差分法及疊代法被應用於求解數學公式並建立模擬模式。

本模式模擬嘉南水利會學甲試驗站坵質壤土於地下水位為1(m)及2(m)時，裸地表土蒸發伴隨之土壤水分剖面變化情形。結果顯示模式能有效率的模擬表土蒸發及土壤水分變化之物理現象，而地下水位為1(m)及2(m)之土壤水分剖面曲線亦有顯著之差別。

關鍵詞：裸地蒸發，土壤水分含量，有限差分法，疊代法。

ABSTRACT

The soil moisture content profile with the effect of bare soil evaporation is the basic data for irrigation management. The physical phenomenon of bare soil evaporation divides into two stages. The steady stage with constant evaporation is controlled by local climate, and the decreased stage is controlled by soil moisture content within soil profile. Considering the physical phenomenon of bare soil evaporation, this study derived a series of equations to define the nonlinear boundary condition. The finite difference and iteration methods are used to solve the mathematical equation and establish simulation model.

The silt loam soil in the Hsueh Chia Experiment Station of Chia Nan Irrigation Association was used to test the model. The results show that model can efficiently simulate the relationship between bare soil evaporation and soil moisture content profile. Also, the soil moisture

profile differs groundwater table changes from 1 meter to 2 meters.

Keywords : Bare soil evaporation, Soil moisture content, Finite difference method, Iteration method.

前言

土壤水分剖面之模擬為水資源工程、灌溉工程及環境工程等領域之學者所重視。水資源工程師想了解降雨時水於土壤中之流動借以估計地下水之補注及逕流之多寡，灌溉工程師希望了解農地休耕或作物播種期之土壤水分流動情形，以收集地下水毛管補給、土壤鹽化等灌溉管理所需之基本資料，環境工程師則對污染源地表下之傳輸情形感興趣。

Charbeneau and Asgian(1991)指出表土蒸發之現象為大氣及土壤中水分含量所控制，其可分為二個階段：(一)灌溉或下雨時土壤水分足夠供給蒸發所需，因此大氣因素決定蒸發量之多寡；(二)土壤水分漸乾無法完全供給大氣蒸發所需，此時土壤內部之水分含量則為決定蒸發量之主要因素，其利用 PROFIL 模式及實際氣象資料模擬土壤水分及流通量隨著時間及位置變化情形。Evelt et al(1994)指出估計裸地表土蒸發可概分為二個方向：(一)依據裸地表土之能量平衡，(二)利用 Microlysimetry 測得。

本研究首先推導一系列公式以了解表土蒸發時土壤水分剖面分佈之物理現象，復利用有現差分法及疊代法求解非線性之偏微分方程式及其邊界條件，嘉南水利會學甲試驗站之坵質壤土亦被應用於測試此數學模式。

數學理論

水於飽和土壤中隨著時間及位置變化流動之情形如公式(1)所示：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\theta) * \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \quad (1)$$

其中：

θ 土壤體積含水量(%)

D 土壤水分擴散係數 (L^2/T) ; $D =$

$\alpha e^{\beta \theta}$ (α, β 為土壤特性資料)

t 時間 (T)

Z 土壤剖面垂直深度 (L)

定義起始及邊界條件如公式(2)所示：

$$\text{I.C.} \quad t = 0 \quad \theta = \theta_i$$

$$\text{B.C.} \quad Z = 0$$

$$(\text{step 1}) \quad \theta_i < \theta < \theta_1, \quad D \frac{\partial \theta}{\partial z} = E$$

$$(\text{step 2}) \quad \theta_i < \theta < \theta_1, \quad D \frac{\partial \theta}{\partial z} = a\theta + b \quad (2)$$

$$(\text{step 3}) \quad \theta < \theta_1, \quad \theta = \theta_1$$

$$\text{B.C.} \quad z = H \quad \theta = \theta_i$$

其中：

θ_i 起始土壤水分 (%)

E 表土蒸發率 (L/T)

H 地下水位深度 (L)

$\theta_1, \theta_1', a, b$ 土壤特性資料

表土 ($z = 0$) 之邊界條件敘述如下：(1)當土壤水分介於 θ_i 及 θ_1 間時，土壤水分足夠供給大氣所需之蒸發量 (E)。因此，此階段 (step1) 表土之蒸發率為大氣所控制而維持定值；(2)當土壤水分漸減而介於 θ_1' 及 θ_1 間時，土壤水不足以供給大氣所需之蒸發。因此，此階段 (step2) 表土之蒸發為土壤水分控制而呈現線性遞減之現象；(3)當表土土壤水分遞減到 θ_1' 時，表土土壤水分維持定值而蒸發率持續遞減。

定義相對水分含量 (c)，新變數 (s)，及二無因次項 (X & T) 如下：

$$c = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_i - \theta_0}$$

$$S = \int_0^1 Ddc / \int_0^1 Ddc$$

$$X = z / H \Rightarrow z = H * X$$

$$T = D_0 * t / H^2 \Rightarrow t = \frac{H^2 * T}{D_0}$$

其中：

θ_0 表示土壤達永久凋萎點時之體積含水量 (%)

D_0 表示 $\theta = \theta_0$ 時之擴散係數

因此公式(1)及(2)之邊界條件可轉換如下型式：

$$\frac{\partial S}{\partial T} = [S(e^\beta - 1) + 1] \frac{\partial^2 S}{\partial X^2} \quad (3)$$

I.C. $T = 0 \quad S = 1$

B.C. $X = 0$

(step1) $S_1 < S < 1$, $\frac{\partial S}{\partial X} = \frac{E^* \beta^* H}{D_0^* (\theta_i - \theta_0)^* (e^\beta - 1)}$

(step2) $S_1 < S < S'_1$, $\frac{\partial S}{\partial X} = H^* \{ U + W^* 1n [(e^\beta - 1)^* S + 1] \}$

(step3) $S < S'_1$, $S = S'_1$

B. C. $X=1 \quad S=1$

其中：

$$U = \frac{(a\theta_0 + b)^* \beta}{D_0^* (\theta_i - \theta_0)^* (e^\beta - 1)}$$

$$W = \frac{a}{D_0^* (e^\beta - 1)}$$

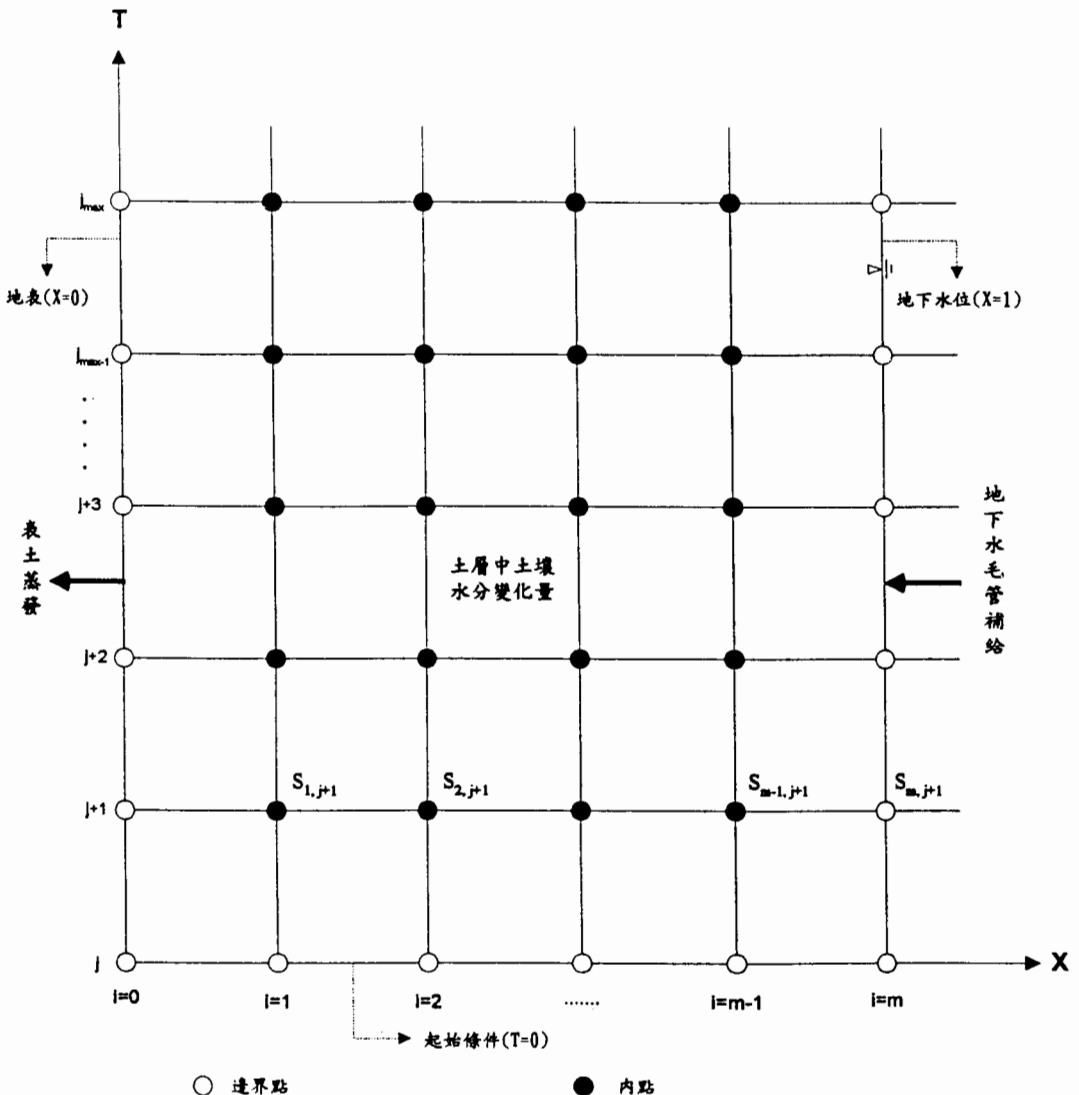


圖 1. 有限差分法 $S(i \triangle X, j \triangle T)$ 示意圖

有限差分法應用於求解公式(3)之非線性偏微分方程，及公式(4)之邊界條件。若將 X-T 平面劃分為 ΔX 及 ΔT 之等間隔，則 $S = f(X, T) = f(i \Delta X, j \Delta T)$ ，其中， ij 為整數，又本研究中 S_{ij} 表示 $S(i \Delta X, j \Delta T)$ ，圖 1 表示有限差分法 $S(i \Delta X, j \Delta T)$ 示意圖。公式(3)可以有限差分法之方式表示如下：

$$S_{i,j+1} - S_{i,j} = \frac{r}{4} [(e^{\beta}-1) * (S_{i,j} + S_{i,j+1}) + 2] * [S_{i+1,j} - 2S_{i,j} + S_{i-1,j} + S_{i+1,j+1} - 2S_{i,j+1} + S_{i-1,j+1}] \quad (5)$$

where :

$$r = \frac{\delta T}{(\delta X)^2}$$

公式(4)中之 (step1) 邊界條件可表示如下：

$$\frac{rq}{2} S_{0,j+1} + \left[1 - \frac{rgb}{2} + \frac{rq}{2} S_{0,j} + r\right] * S_{0,j+1} - \left[S_{0,j} + \frac{br}{2} (qS_{0,j+2})\right] = 0$$

where :

$$b = S_{1,j} - S_{0,j} + S_{1,j+1} - 2 * \Delta X * M \quad (6)$$

$$q = e^{\beta} - 1$$

$$M = \frac{E\beta H}{D_0(\theta_i - \theta_0)(e^{\beta} - 1)}$$

公式(4)中之 (step2) 邊界條件可表示如下：

$$\begin{aligned} & \frac{rq}{4} S_{0,j+1}(A-1) - \frac{r}{4} (qS_{0,j} + 2) * \{2S_{0,j+1} + \\ & 4\Delta X * H * W * 1n \left[q \left(\frac{S_{0,j} + S_{0,j+1}}{2} \right) + 1 \right] \right. \\ & \left. + \frac{r}{4} * (q * S_{0,j+2}) * b + S_{0,j} \right] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

where

$$A = S_{1,j} - 2S_{0,j} + S_{1,j+1} - 2S_{0,j+1} + S_{1,j} + S_{1,j+1} - 4 * \Delta X * H *$$

$$\left\{ U + W * 1n \left[q * \left(\frac{S_{0,j} + S_{0,j+1}}{2} \right) + 1 \right] \right\}$$

模式建立與驗證

公式(6)為 $S_{0,j+1}$ 之一元二次式，可直接利用二次方程式解之。公式(7)則為 $S_{0,j+1}$ 之非線性方程式，須利用半間距法 (Interval-Halving Method) 解之，疊代法 (Iterative Method) 被應用來求解上述“S”變數之線性及非線性方程式，模式流程如圖 2 所示。

嘉南水利會學甲試驗站份質壤土之土壤特性資料被應用於測試此模式，輸入之資料包括如下：

(1) 擴散係數資料： $D(C) = 40 * e^{1.7}$ ，即 $\alpha = 40$ ， $\beta = 1.7$ 。

(2) 土壤水分遞減特性資料： $\theta_1 = 0.1045$ 。

(3) 訂定 Crank-Nicolson 數值法之 $\Delta X = 0.1$ ， $\Delta T = 4E - 3$ ，進而求得 $r = \Delta T / (\Delta X)^2 = 0.4$

(4) 假設 Step1 之穩定蒸發率為 $E = 0.5 \text{ cm/day}$ 。

(5) 輸入不同地下水位之深度 $H = 1(\text{m})$ 及 $2(\text{m})$ 。

上述資料代入模式中分別模擬地下水位深度為 $1(\text{m})$ 及 $2(\text{m})$ ，表土穩定蒸發率為 $0.5(\text{cm/day})$ 時，土壤水分含量隨著時間、位置變化情形如圖 (三) 及 (四) 所示。圖 (三) 及 (四) 均看出蒸發時表土土壤水分隨著時間增加而漸減，當土壤水分達到 θ_1 時則無法繼續遞減。圖中亦看出土壤水分剖面曲線隨著時間增加而更密集，此表示土層中土壤水分之變化率隨著時間增加而漸減，此乃因蒸發開始土壤含水量較高，保水能力較低，土層內土壤水分較易揮發以補充表土所需之蒸發率，所以此時之土壤水分變化率較大。即至蒸發後期土壤水分漸減，土壤本身之保水能力漸增，所以此時之土壤水分變化率較小。

結 論

本研究經由表土蒸發之物理現象訂定偏微分方程式之非線性邊界條件，利用有限差分及疊代法建立數學模式，並應用於模擬嘉南水利會學甲試驗站份質壤土於地下水位為 $1(\text{m})$ 及 $2(\text{m})$ 時，土壤水分剖面隨著時間、位置變化情形。結果顯示模式能有效率的模擬表土蒸發及土壤水分變化之物理現象，而地下水位為 $1(\text{m})$ 及 $2(\text{m})$ 之土壤水分剖面曲線亦有顯著之差別。本研究結論如下：

(1) 經由土壤水分剖面隨著地下水位、時間、位置變化之了解，本研究可進一步應用於分析地表蒸發率、土層內土壤水分變化率及地下水毛管補給率間之物理關係。將公式(1)之不飽和土壤水水流偏微方程式由地下水位處 ($Z = H$) 積分到地表處 ($Z = 0$)，則公式(1)可進一步表示為：

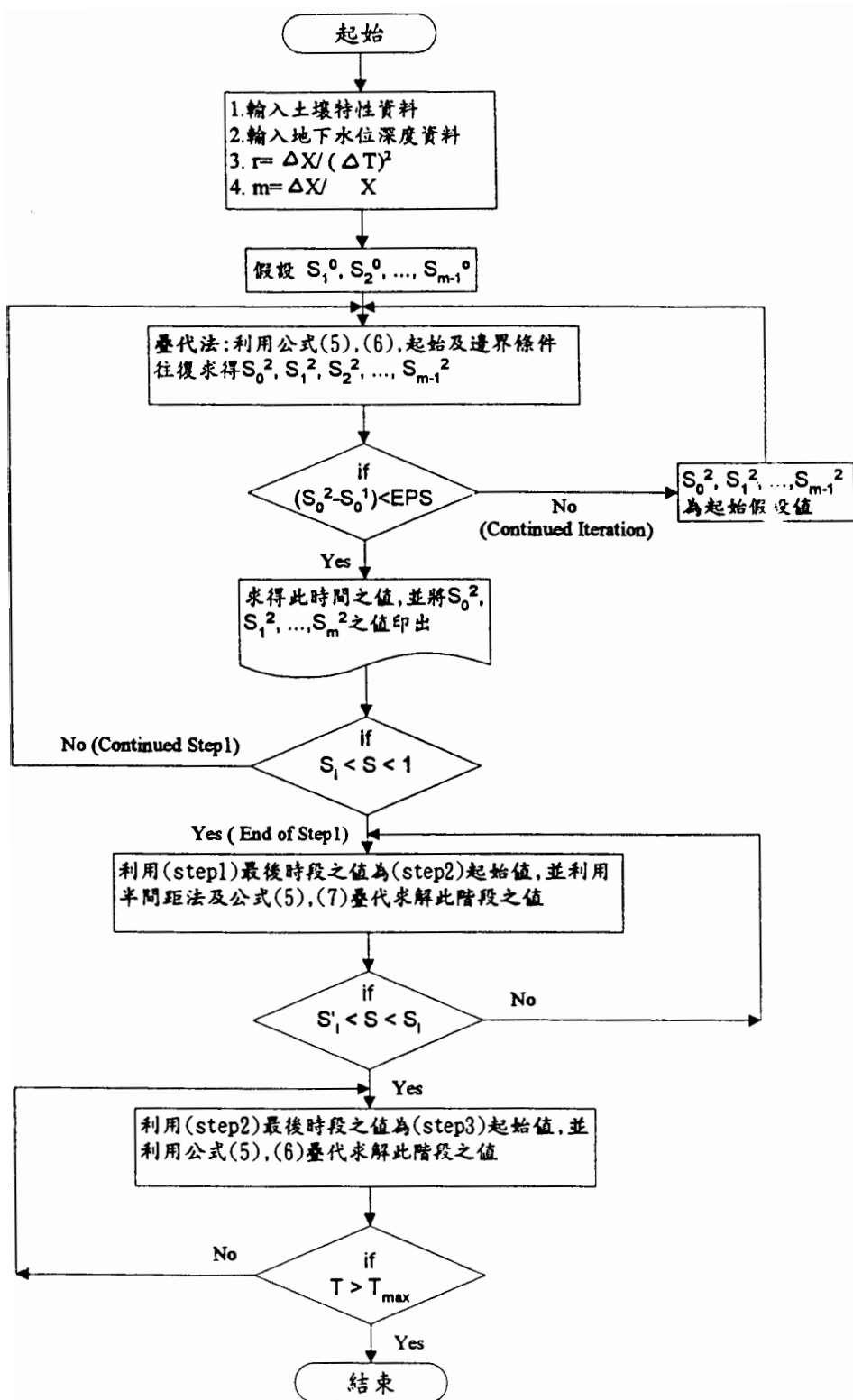


圖 2. 模式流程圖

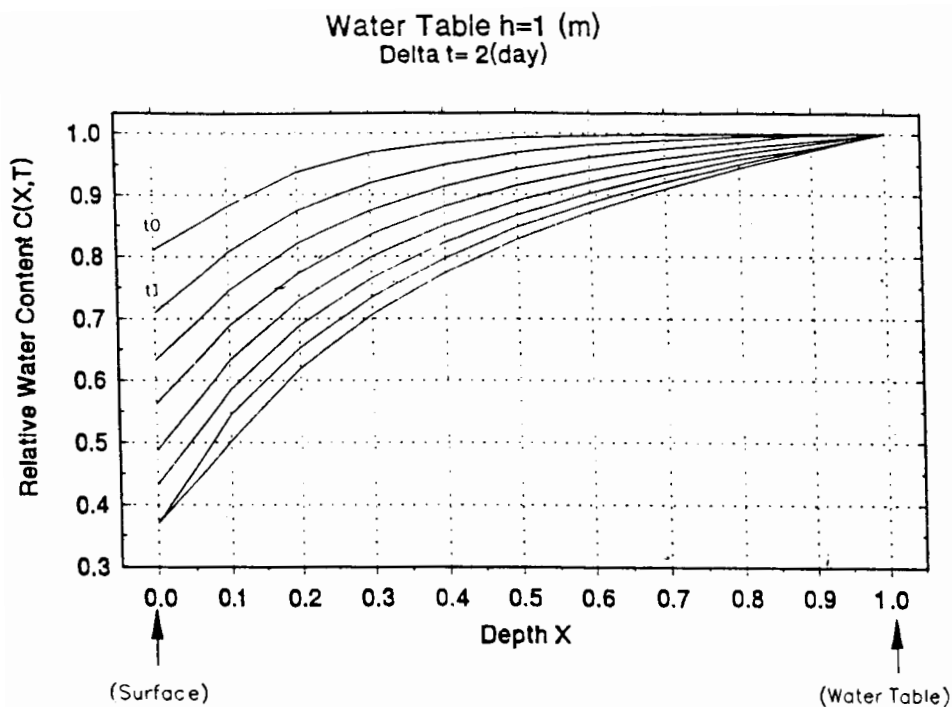


圖 3. 地下水位 1 公尺時相對水分含量隨位置及時間變化情形

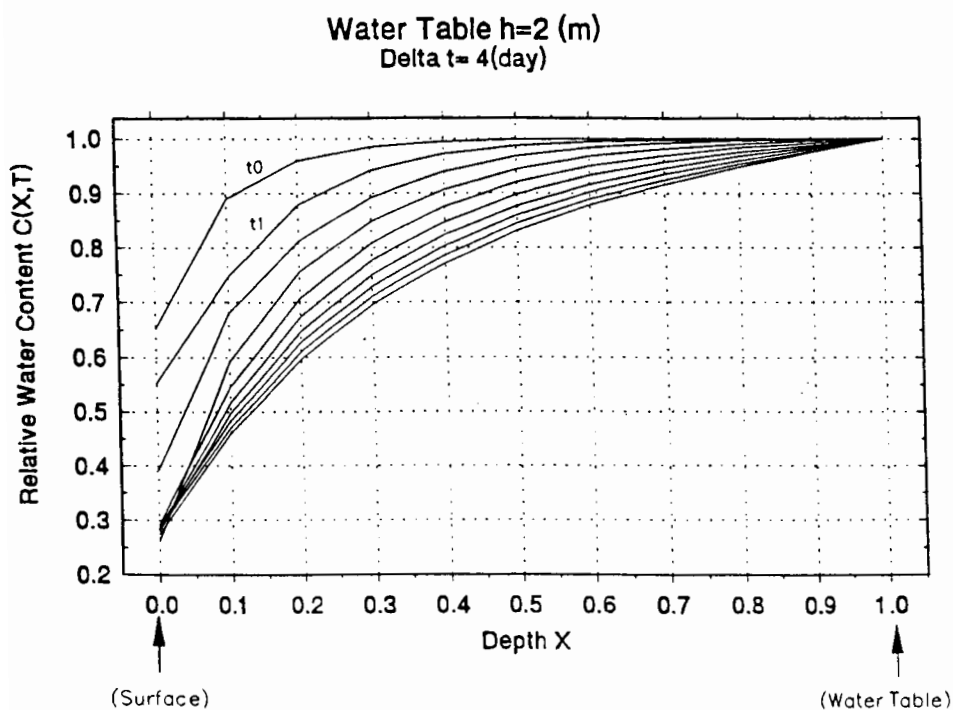


圖 4. 地下水位 2 公尺時相對水分含量隨位置及時間變化情形

$$\int_{Z=H}^{Z=0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) dZ = \int_{Z=H}^{Z=0} \frac{\partial}{\partial Z} \left(D \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right) dz$$

$$= D \frac{\partial \theta}{\partial Z} \Big|_{Z=0} - D \frac{\partial \theta}{\partial Z} \Big|_{Z=H}$$

上式左項之物理意義可表示由地下水位處到地表間土壤水分變化率(△S)，而右邊第一項則表示在地表處(Z=0)之流通量，亦即地表蒸發率(E)，右邊第二項則表示在地下水位處(Z=H)之流通量，亦即地下水位補給率(G)。由能量不減原理，可了解三者間將有如下之關係：△S = E - G。因此，藉由土壤水分剖面之模擬結果可估算出△S值，復配合田間每日實際之蒸發率(E)，則地下水位補給率(G)隨著地下水位深度及時間變化之情形可間接求得。

(2)水稻田或濕地對地下水補注之生態性功能可為舒解水資源匱乏之一可行性方案，此模式可加以改進模擬水稻田於低透水性黏土層及變化水頭等物理環境，配合田間每日實際之蒸發率及作物之蒸散率，復由水收支平衡法可了解地下水補注情形。

(3)有限差分法配合疊代法為一良好之工具來模擬具非線性邊界條件之偏微分方程，然為了防止模式發散，其定義之 $r(=\Delta T/\Delta X^2)$ 值應小於0.5。

參考文獻

1. 施嘉昌、何信賢，(1992) “旱田根區土壤水分移動之模擬” 臺灣水利，39(4):1-13。
2. 施嘉昌、何信賢，(1994) “毛管水於土層中上升補給率之研究” 臺灣水利，42(1):1-6。
3. 徐玉標，(1970) “地下水毛細管作用對旱作灌溉之影響” 農工學報，12(3)。
4. 施澄鐘，(1985) “數值分析” 松崗電腦圖書公司。
5. Boast, C.W. and T.W. Robertson. (1982). "A micro-lysimeter Method for Determining Evaporation from Bare Soil: Description and Laboratory Evaluation." Soil Sci.Soc. Amr. Proc. 48:689-696.
6. Charbeneau, R.J. and R.G. Asgian. (1991). "Simulation of the Transient Soil Water Content Profile for a Homogeneous Bare Soil." Water Resource Res.,27(6): 1271-1279.
7. Chanzy, A. and L. Bruckler. (1993). "Significance of Soil Surface Moisture With Respect to Daily Bare Soil Evaporation." Water Resource Res.,9(4):1113-1125.
8. Evett, S.R., A.D. Matthias, and A.W. Warrick. (1994). "Energy Balance Model of Spatially Variable Evaporation from Bare Soil." Soil Sci. Soc. Am. J.,58:1604-1611.
9. Farlow, S.J. (1986). partial differential equations for Scientist and Engineers, Maine University.
10. Gardner, W.R.(1959). "Solution of the Flow Equation for the Drying of Soil and Other Porous Media." Soil Sci. Soc. Am. Proc., 23:183-187.
11. Heilman, J.L., K.J. McInnes, R.W. Gesch.,and R.J. Lascano. (1992)."Evaporation for Ridge-Tilled Soil Covered with Herbicide-Killed Winter Wheat." Soil Sci.Soc. Am. J., 56:1278-1286.
12. Lascano, R.J., and C.H.M. van Bavel. (1986). "Simulation and Measurement of Evaporation from A Bare Soil." Soil Sci. Soic. Amer. Proc. 50:1127-1133.
13. Laxcano, R.J. and J.L. Hatfield. (1992)."Spatial Variability of Evaporation along Two Transects of a Bare Soil ." Soil Sci. Soc. Am. J., 56:341-346.

收稿日期：民國85年3月17日
 修正日期：民國85年5月1日
 接受日期：民國85年5月15日