

# 人工補注對地下水丘之影響研究

## The Study of Artificial Recharge Influence on Water Mound

國立臺灣大學農業工程學研究所碩士

國立臺灣大學農業工程研究所教授

暨國立臺灣大學水工試驗所研究員

林 允 斌

譚 義 績

Yun-Bin Lin

Yih-Chi Tan

國立臺灣大學水工試驗所

國立臺灣大學水工試驗所

國立臺灣大學水工試驗所

博士後研究員

博士後研究員

博士後研究員

蔡 存 孝

童 慶 斌

彭 宗 仁

Twsn-Syan Tsay

Ching-Pin Tung

Tsung-Ren Peng

### 摘 要

考慮廣大區域的地下水補注時多半利用水平衡的觀念做為地下水補注水丘剖面演算之依據，但對於局部地區地下水補注水丘之演算，則必須考慮地表均勻入滲因連續方程式中擴散項的影響，此控制項導致入滲速率不均，進而影響地下水丘之形成。

影響地下水入滲的原因除最重要的覆蓋土壤物理性質外，例如土壤的結構疏鬆、水力傳導係數、飽和度等因子外，還必須考慮地下水位之深淺及地表蒸發散的問題，本研究即針對後兩項因子模擬其對地下水補注造成之影響。

本研究利用簡化之線性化控制方程式及透過疊加的方式，模擬擴散項之影響，並考慮地表蒸發散與地下水位高度等因子，針對地下水丘形成的狀態將模擬結果與MODFLOW的結果相互比較驗證。

關鍵詞：人工補注，地下水丘，擴散影響。

### ABSTRACT

The concept of water budget is often used to calculate water mound profile in wide area recharge. It is necessary to consider the diffusion effect of the uniform surface infiltration while in local-wise water mound calculation. The diffusion effect cause the non-uniform percolation velocity and the formation of water mound.

Besides the most important factor of covered soil physical property in considering of infiltration, soil structure, hydraulic conductivity and saturation, it is necessary to consider the factors of water table elevation and evapotranspiration. This study simulates the influence of

two later factors on recharge.

Simplified linear governing equations and superposition are used to simulate the effect of the diffusion. The results of MODFLOW in factors of evapotranspiration and water table elevation are used to verify the study.

Keywords : Artificial recharge, Water mound, Diffusion effect.

## 前言

地下水丘的形成是由於區域性的地下水補注所造成，因補注造成自由水面水位上升，而這自由水面上升稱為地下水丘，地下水丘之高度取決於補注率、補注區之幾何形狀、水力係數、邊界條件及飽和層厚度等因子。

經濟部於民國八十四年六月公布之地層下陷防治執行方案中，於實施要項中加強地層下陷區產業輔導工作一項中提到輔導不適養殖魚塭轉作其他用途，此類魚塭若能經由政府補注做為地下水補注之地表蓄水池，則對地下水之涵養將有相當大的助益，而其對地下水影響之模擬，在地表部份除蓄水池為補注外，周邊土地與道路均為蒸發散現象，藉由程式的輸入可以考慮周圍蒸發散的影響，其更精確模擬水丘之狀況。

以往考慮區域性地下水補注多利用一水平衡(WATER BUDGET)的觀念做為演算的依據，對於地表人工均勻補注率並不考慮其入滲後於土壤中不均勻的分佈，僅著重於其補注量對於地下水補注的影響，再者假設土壤入滲前緣為活塞式的移動(見圖1)：此種假設用於局部性人工地下水補注則有失其周延性，本研究考慮土壤入滲流速之分佈，並結合地下水補注水丘之運算，亦及考慮土壤入滲流速分

佈對於地下水補注水丘成長之影響，冀期精確模擬分析補注水丘之狀況。

考慮地表人工補注水於土壤間因滲漏深度造成流速不均，進而導致人工補注水丘之變化，精確模擬水丘形狀態可利用於各方面之應用，如：

- (一)污水自然淨化時能提供足夠的通水深度以達到土壤自然過濾淨化的目的。
- (二)於淺層地下水補注時能精確的控制地表水補注率。
- (三)適用於沿海地區地層下陷區域，魚塭養殖業轉作地下水涵養池其地下水補注水丘之模擬。

本研究分為程式的撰寫和模式的檢定兩部份

### (一)程式的撰寫

本研究於地下水補注水丘之部份是考慮均質、等向性、不可壓縮之土壤，利用連續方程式物質微分推導自由面控制方程式，利用擾動法簡化非線性控制方程式為線性控制方程式，經由 DAGAN 於西元 1966 年提出之解析解作為程式撰寫之依據。

地表入滲部份是考慮均質、等向性、不可壓縮土壤，利用連續方程式推導非線性入滲控制方程式，依據 GARDNER 於西元 1958 年提出之  $K(h) = K_0 \exp(\alpha h)$  假設，並假設為  $dK(\theta)/d\theta$  常數，將控制方程式簡化為線性方程式，經由 Vedan Batu 於西元 1983 年提出之解析解作為程式撰寫之依據。

程式的撰寫考慮地表入滲和地下水丘補注，利用疊代法完成一時段內之演算，即先考慮土壤中入滲水之速度分佈，在利用此速度分佈計算補注水丘之自由面分佈，而疊代的控制機制為同一時間內補注水丘之高度差達精度之標準。

### (二)模式的檢定

本研究利用 MODFLOW 作為程式模擬檢定之依據，MODFLOW 為 USGS 發展出來的套裝軟體，

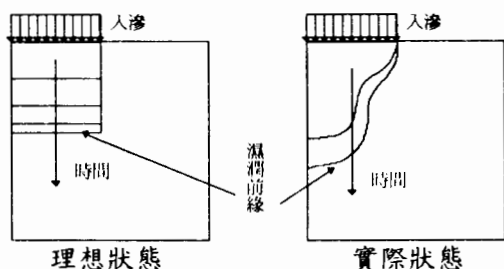


圖 1. 理想入滲與實際入滲之濕潤前緣示意圖

該程式是一種『近乎三維化』(參見 3-3 節)的觀念所發展出來的一套水流差分模式，由於其所處理之地質架構及水文過程廣泛，故其適用性強，加以理論完善，數值方法嚴謹，程式架構模組化，已成為國際公認地下水模擬推薦程式。

文獻回顧

西元 1856 年，法國學者 HENRY DARCY 研究水流通過土柱的滲透現象，提出達西公式(Darcy's Law)(14)，說明水流平均速度和水力梯度成正比；GREEN and AMPT(1911)提出一簡單的圖形來描述入滲現象，假設地表水是以活塞運動之形式均勻的往下入滲，並令其濕潤鋒面為一銳緣(sharp boundary)，可知其入滲容量  $F(t) = L(\eta - \theta_i)$ ，其中  $F(t)$  代表在  $t$  時間內的入滲容量， $L$  代表地表水經入滲  $t$  時間後流經土層的深度， $\eta$  為飽和含水量， $\theta_i$  為初始含水量。

HELE SHAW[1]於西元 1897 年顯示兩片相聚極近之平行版中黏滯性液體為一種二度空間的勢能流，可用來模擬地下水補注水丘之形成。

W. R. GARDNER 於西元 1958 年提出非飽和土壤水力傳導係數與水頭的關係的可能解析解為：

$$K(h) = K_0 \exp(\alpha h) \dots\dots\dots (1)$$

$K$ ：非飽和土壤水力傳導係數  $[LT^{-1}]$   
 $K_0$ ：飽和土壤水力傳導係數  $[LT^{-1}]$   
 $h$ ：水頭  $[L]$   
 $\alpha$ ：常數  $[L^{-1}]$

利用此種關係，經驗上可以符合現有大部分的土壤非飽和水力傳導係數 [2]，其間係數  $\alpha$  的範圍為

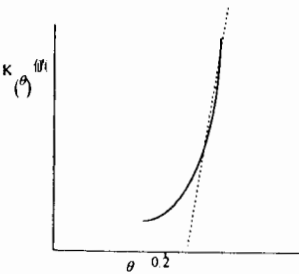


圖 2.  $K(\theta)$  值與  $\theta$  值性關係示意圖

0.01 ~ 0.014 之間 [3]；J. R. PHILIP 於 [4] 中提出當水力傳導係數隨著土壤含水量的遞減其值會急速的減少(見圖 2)，因此在一特定的研究範圍中可以假設  $dK(\theta)/d\theta$  為常數。

VEDAT BATU 於西元 1983 年 [5] 利用上兩項假設推導控制方程式為線性化控制方程式，探討地表均勻帶狀之入滲，並計算出入滲水流於土壤中水平與垂直的流速分佈，並利用拉普拉斯轉換和無因次法推求出一系列的通式。

DAGAN 於西元 1967 年 [6] 利用擾動法將控制方程式線性化，並利用傅力葉轉換推求出無因次的補注水丘時變解析解，並提出遠場解析解(FAR FIELD SOLUTION)。

地下水補注、抽水量及安全出水量，並非是一件容易正確估計的工作，其估計方法主要有兩種。一為直接估計法是在充分了解含水層之幾何形狀、水力參數、及地下水位分布等水文地質特性後，描繪流網(Flow Net)圖，並以流網圖估計地下水邊界補注量，但直接估計法之困難在於含水層地質多變化，又有不均質(Heterogeneous)及不等向(Anisotropic)之特性，造成估計時誤差。另一為間接估計法，是以水文系統之水平衡觀念來估算地下水資源，但間接估計法之困難在於抽水量、河川、灌溉、養殖滲漏估計值誤差大，影響估計之正確性。MODFLOW[7]即利用水平衡(Water Budget)的概念作為數值演算的收斂指標。

對於利用水平衡法之研究有關入滲容量與時間之變化量有諸多公式理論，如荷頓氏(HORTON, 1940)、非利普氏(PHILIP, 1954)等理論公式。

YEH G. T. 於西元 1993 年發展出三維有限元素法地下水流動數學模式 3DFEWA，用以模擬地下水之水位、流速、流向、邊界補助量及抽水量等地下水資源狀況。

模式理論

為考慮地表入滲於土壤中因連續方程式中擴散項作用導致入滲速度不均對於地下水補注水丘形成之影響，本模式的發展分為兩部分，即地下水補注水丘模擬部分和地表入滲模擬部分，結合

地表入滲模擬土壤中入滲速度分佈做為地下水補注水丘模擬的輸入部分，最後完成地下水補注水丘之形成與分布之輸出。

### 3-1 地下水補注水丘模擬部分

#### 3-1.1 假設 [10]

模擬土塊為均質、等向性與不可壓縮之土壤。

#### 3-1.2 控制方程式 [10]

$\nabla^2 \varphi + \partial \varphi / \partial t = 0$ ；在地下水補注水丘模擬區範圍中..... (2)

#### 3-1.3 邊界條件

利用物質微分展開得方程式

$$\frac{DB_a}{Dt} = \frac{\partial B_a}{\partial t} + (\vec{V}_{B_a} \cdot \nabla) B_a = \frac{\partial B_a}{\partial t} + \text{div}(\vec{V}_{B_a} B_a) - B_a \text{div} \vec{V}_{B_a} \quad (3)$$

$B_a$ ：系統特性 [ $= m \cdot B$ ； $m$ ：質量]

$t$ ：時間

$\vec{V}_{B_a}$ ：系統特性相對於控制體積的移動速度  
巨觀的移動介面物質連續方程式（見圖3）

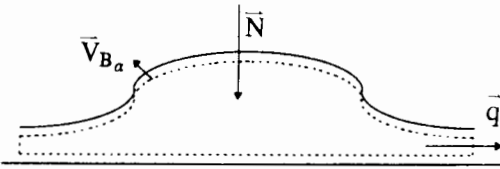


圖 3. 巨觀控制體積推導連續方程式符號示意圖

$$(\vec{q} - \vec{N}) \cdot \vec{1n} = n_e \vec{V}_{B_a} \cdot \vec{1n} = n_e \vec{V}_{B_a} \cdot \vec{1n} \quad (4)$$

其中  $\vec{1n}$  為單位向量

因為地下水補注水丘為自由水面，故其壓力為常數，即  $Dp/Dt = 0$ ，將此關係透過式(2)和式(4)表示成為

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{n_e} (\vec{q} - \vec{N}) \cdot \text{grad}(p) = 0 \quad (5)$$

又自由面的條件為

$$\varphi = z; \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad \nabla p = \gamma (\nabla \varphi - \vec{1n}); \quad \vec{N} = -\vec{1n} \quad (6)$$

$\varphi$ ：水頭 [L]

$P$ ：壓力 [ $NL^{-2}$ ]

$\gamma$ ：流體比重 [ $NL^{-3}$ ]

$\vec{N}$ ：自由面地下水補注率 [ $LT^{-1}$ ]

將條件式(5)代入式(4)則得地下水補注水丘自

由面非線性控制方程式， $Z = \xi$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{n_e} [K_X \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right)^2 + K_Y \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \right)^2 + K_Z \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Z} \right)^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial Z} (K_Z + N) + N] = 0 \quad (7)$$

$\xi$ ：自由面所在高度

$n_e$ ：有效孔隙率

#### 3-1.4 線性化

利用小擾動法 (Small Perturbations) 將非線性自由面控制方程式簡化為線性控制方程式 [10]，將  $\xi$  和  $\varphi$  展開成為一系列微小元素  $\varepsilon$  的函數式：

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi_0(x, y, z) + \varepsilon \varphi_1(x, y, z, t) + \varepsilon^2 \varphi_2(x, y, z, t) + \dots \quad (8)$$

$$\xi(x, y, z, t) = \xi_0(x, y, z) + \varepsilon \xi_1(x, y, z, t) + \varepsilon^2 \xi_2(x, y, z, t) + \dots \quad (9)$$

$\varphi_i$ ， $\xi_i$  表示  $\varphi(x, y, z, t)$ ， $\xi(x, y, z, t)$  函數之第  $i$  階擾動，即為第  $i$  階泰勒展開式，當  $\varepsilon = 0$  時，亦即自然界的微小擾動消失，其所得之解  $\varphi_0$  和  $\xi_0$  為非時變性之解 (Steady)。

若假設自由面地下水補注率  $N = \varepsilon N_1$ ，亦即補注率和地下水水力傳導係數之比非常小  $N/K \ll 1$ ；且初始條件設為  $\xi_0 = 0$  和  $\varphi_0 = 0$ ，則可化簡控制方程式為線性方程式如下（參見附錄 1）：

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0; \quad Z < 0$$

$$n_e \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + K \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = N_1; \quad Z = 0 \quad (10)$$

$$\xi_1 = \varphi_1; \quad Z = 0$$

#### 3-1.5 線性控制方程式解析解

DAGAN 於西元 1967 年利用式(9)線性化控制方程式，並透過傅力葉轉換求得無因次之解析解，並利用此求得遠場解析解 (Far Field Solution) [11] (見圖 4)，此解析解可用於執行 MODFLOW 時的邊界水位條件。

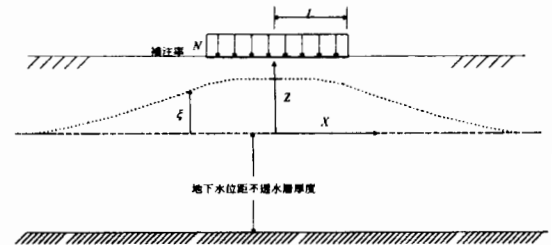


圖 4. DAGAN 解析解符號示意圖

$$\xi = -\frac{N}{\pi} \left[ \frac{X'+1}{2} \ln \frac{(X'+1)^2}{(X'+1)^2+1} + \frac{X'-1}{2} \ln \frac{(X'-1)^2}{(X'-1)^2+1} - t' \tan^{-1} \left( \frac{2t'}{1-X'^2-t'^2} \right) \right] \quad (11)$$

$$t = tK/n_e L; X = X/L$$

遠場解析解：

$$\xi = \frac{Nt'}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{2t'}{1 - X'^2 - t'^2} \right) \dots\dots\dots (12)$$

### 3-2 地表入滲模擬部分

#### 3-2.1 假設

模擬土塊為均質、等向性與不可壓縮之土壤。

#### 3-2.2 控制方程式

將不飽和土壤連續方程式表示為單位時間單位體積土壤水分隨時間的變化量為進出單位體積表面積之土壤水分速度差，其數學式表示如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= -\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla \phi) = \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla (h - Z)) \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla h) - \frac{\partial K}{\partial Z} = \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla \theta) - \frac{\partial K}{\partial Z} \dots (13) \end{aligned}$$

$\theta$ ：單位土壤體積所含的水體積

$K$ ：不飽和水力傳導係數除以單位體積土壤

水分含量 $[L T^{-1}]$

$h$ ：水頭 $[L]$

$D$ ：定義為 $K(\theta) \frac{dh}{d\theta} [L^2 T^{-1}]$

利用 $U = \int_{-\infty}^h K(S) dS$ 轉換控制方程式，並假設 $K(h) = K_0 \exp(\alpha h)$ 如式(1)，亦即將 $U$ 表示為 $K(h)/\alpha$ ，將此關係式代入式(13)中得，同時利用 PHILIP 將 $dK/d\theta$ 的關係於一定研究範圍中假設為常數 $k$ ，將控制方程式化簡為線性化控制方程式，並推求土壤水分於土壤中的水平速度分量 $u$ 與垂直速度分量 $v$ 如下。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{k}{\alpha} \nabla^2 U - \alpha \frac{\partial U}{\partial Z} \dots\dots\dots (14)$$

$$u = -\frac{\partial U}{\partial X}; v = \alpha U - \frac{\partial U}{\partial Z} \dots\dots\dots (15)$$

#### 3-2.3 線性控制方程式解析解

VEDAT BATU 於西元 1967 年利用式(14)線性化控制方程式，及邊界條件和地表補注率 $v_1; v_2 [L T^{-1}]$  (見圖 5)，並透過拉普拉斯轉換與分離係數法求得無因次之解析解 [12] (參考附錄 2)。

定義無因次參數及速度變數：

$$X_0 = \frac{\alpha L}{2}; X_1 = \frac{\alpha \sigma}{2}; X = \frac{\alpha X'}{2}; Z = \frac{\alpha Z'}{2}; T = \frac{\alpha k t}{2}; \tau = \frac{\alpha k u}{4}; \Phi = \frac{\pi U}{v_1 L} \dots (16)$$

$$U_s = \frac{2\pi u}{v_1 \alpha L} = -\frac{\partial \Phi}{\partial X'}; V_s = \frac{2\pi v}{v_1 \alpha L} = 2\Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial Z'} \dots\dots\dots (17)$$

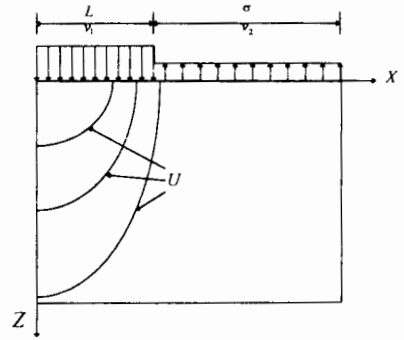


圖 5. VEDAT BATU 解析解符號示意圖

無因次參數解析解：

$$X_0 = \frac{\alpha L}{2}; X_1 = \frac{\alpha \sigma}{2}; X = \frac{\alpha X'}{2}; Z = \frac{\alpha Z'}{2}; T = \frac{\alpha k t}{2}; \tau = \frac{\alpha k u}{4}; \Phi = \frac{\pi U}{v_1 L} \dots (16)$$

$$U_s = \frac{2\pi u}{v_1 \alpha L} = -\frac{\partial \Phi}{\partial X'}; V_s = \frac{2\pi v}{v_1 \alpha L} = 2\Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial Z'} \dots\dots\dots (17)$$

無因次參數解析解：

$$\Phi = \int_0^T \left[ a F_1(\tau, Z) - b F_2(\tau, Z) \right] d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \left( \frac{n\pi X_0}{X_0 + X_1} \right) \cos \left( \frac{n\pi X'}{X_0 + X_1} \right) \dots\dots (18)$$

$$\begin{aligned} U_s &= \frac{c\pi}{X_0 + X_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( \frac{n\pi X_0}{X_0 + X_1} \right) \sin \left( \frac{n\pi X'}{X_0 + X_1} \right) \\ &\int_0^T \left[ F_1(\tau, n, X_0, X_1, Z) - \pi^{v_2} F_2(\tau, n, X_0, X_1, Z) \right] d\tau \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_s &= a \int_0^T \left[ \left( 1 + \frac{Z}{2\tau} \right) F_1(\tau, Z) - F_2(\tau, Z) \right] d\tau \\ &+ c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \left( \frac{n\pi X_0}{X_0 + X_1} \right) \cos \left( \frac{n\pi X'}{X_0 + X_1} \right) \\ &\int_0^T \left[ \left( 1 + \frac{Z}{2\tau} \right) F_1(\tau, n, X_0, X_1, Z) - F_2(\tau, n, X_0, X_1, Z) \right] d\tau \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

式(18)(19)(20)中 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $F_1$ 、 $F_2$ 、 $F_3$ 、 $F_4$ 、 $F_5$ 、 $F_6$ 分別表示為：

$$a = \frac{\pi^{v_2} [X_0 + (v_2/v_1) X_1]}{X_0 (X_0 + X_1)}; b = \pi^{v_2} a; c = \frac{2(1 - v_2/v_1)}{\pi^{v_2} X_0}; d = \pi^{v_2} a \dots (21)$$

$$\left. \begin{aligned} F_1(\tau, Z) &= \tau^{-v_2} \exp \left( Z - \tau - \frac{Z^2}{4\tau} \right) \\ F_2(\tau, Z) &= \exp(2Z) \operatorname{erfc} \left( \frac{Z}{2\tau^{v_2}} + \tau^{v_2} \right) \\ F_3(\tau, n, X_0, X_1, Z) &= \tau^{-v_2} \exp \left( Z - \tau - \frac{Z^2}{4\tau} - \left( \frac{n\pi}{X_0 + X_1} \right)^2 \tau \right) \\ F_4(\tau, n, X_0, X_1, Z) &= \exp \left( 2Z - \left( \frac{n\pi}{X_0 + X_1} \right)^2 \tau \right) \operatorname{erfc} \left( \frac{Z}{2\tau^{v_2}} + \tau^{v_2} \right) \\ F_5(\tau, Z) &= \tau^{-v_2} \exp \left( 2Z - \left( \frac{Z}{2\tau^{v_2}} + \tau^{v_2} \right)^2 \right) \\ F_6(\tau, n, X_0, X_1, Z) &= \tau^{-v_2} \exp \left( 2Z - \left( \frac{n\pi}{X_0 + X_1} \right)^2 \tau - \left( \frac{Z}{2\tau^{v_2}} + \tau^{v_2} \right)^2 \right) \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

3-3 MODFLOW 理論

MODFLOW 對於地下水補注部份的控制方程式為一對微小分割元素之連續方程式，但為配合其所需輸入參數，故將控制方程式改為：

$$\frac{\partial}{\partial X}(K_X \frac{\partial \phi}{\partial X}) + \frac{\partial}{\partial Y}(K_Y \frac{\partial \phi}{\partial Y}) + \frac{\partial}{\partial Z}(K_Z \frac{\partial \phi}{\partial Z}) - W = S_S \frac{\partial \phi}{\partial t} \dots (23)$$

- $K_X ; K_Y ; K_Z$  : 水力傳導係數[LT<sup>-1</sup>]
- $\phi$  : 水頭[L]
- $W$  : 單位土壤體積之流量[T<sup>-1</sup>]
- $S_S$  : 蓄水係數[L<sup>-1</sup>]
- $t$  : 時間[t]

於式23中的連續方程式並未考慮重力項之影響，對此，MODFLOW 利用修正的達西律來表示其微小分割元素間的垂直與水平流量，其修正式如下：

$$W = KA \frac{h_2 - h_1}{L} = C(h_2 - h_1) = K_L A(h_2 - h_1) \quad (24)$$

- $K$  : 水力傳導係數[LT<sup>-1</sup>]
- $C$  :  $KA/L$ [L<sup>2</sup>T<sup>-1</sup>]
- $K_L$  : 滲漏係數[T<sup>-1</sup>]

對於水平方向的分割元素相互流量考慮 Conductance(即 C 值)，亦即一般輸入水力傳導係數 K 值；但處理垂直方向分割元素間的相互流量則考慮層與層之間的 Leakance(即 K<sub>L</sub>值)，為可變動的調整參數，若考慮實際情況，其垂直流將控制於難透水層(Aquitard)(見圖 6)；此種處理方法即為前所述『近乎三維化』的模擬方法。

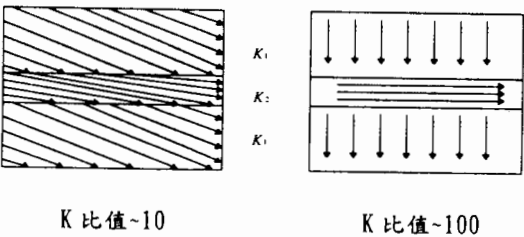


圖 6. MODFLOW 近乎三維模式示意圖

MODFLOW 共提供四種水文地質模式，但本研究考慮地表蓄水池對於地下水補注之影響，其影響地下水部份為非飽和層之淺層土壤，故使用 MODFLOW 中所提供之 UnConfined Type 水為地質

模式，其所需輸入資料為：水力傳導係數、底部高程、比出水量與滲漏係數。

對於邊界條件之流量控制採用 DAGAN 的遠場解析解作為邊界水頭之控制，其控制方程式恰好等於邊界微小分割於式23之右邊項之總和 Q，用數學是表示為：

$$Q = \Sigma \left( S_S \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \dots (25)$$

程式撰寫與模擬結果討論

4-1 程式撰寫

本研究為考慮局部地區的人工地表補注對於地下水水丘之影響，考慮土壤中入滲不均對於地下水丘形成所造成之差異，比較此種因素造成之水丘與 MODFLOW 非侷限含水層地下水補注模擬及 DAGAN 的解析解所形成之地下水丘形狀之差異，並同時探討此種因子之影響與補注深度之關係，以及對於補注量之影響，故結合第三章地下水補注水丘模擬部分和地表入滲模擬部分之理論，進行程式之撰寫。

程式之撰寫流程(見圖 22)利用上一時段所演算的水丘高度，利用此高度代入地表入滲模擬程式部份推求模擬區中位於此高程之入滲速度，將此入滲速度當作輸入資料代入地下水丘模擬程式推求出此時段中水丘之分佈高程。

在土壤入滲中因土壤擴散效應導致入滲速度與方向之不均，如何求得有效補注率必須考慮水流之方向與水丘之形狀(見圖 7)，利用三角函數之關係求得的有效補注率，其關係用數學是表示為：

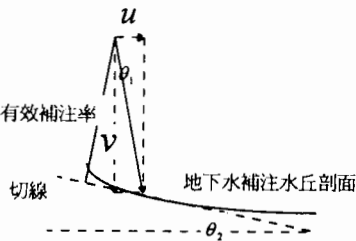


圖 7. 有效補注率示意圖

$$\text{有效補注率} = \sqrt{(u^2 + v^2)} \cos(90^\circ - \theta_1 - \theta_2) \quad (26)$$

u ; v : 土壤入滲於水丘處之水平及垂直速度分量[LT<sup>-1</sup>]

$\theta_1$ : 土壤入滲速度與垂線之交角

$$= \tan^{-1} \left( \frac{u}{v} \right) [\text{度}]$$

$\theta_2$ : 水丘剖面與水平之交角[度]

對於地下水丘之模擬，考慮線性補注水丘自由面控制方程式，並利用疊加的原理配合 DAGAN 的解析解和入滲速度分佈，推求各時段的水丘剖面高。

#### 4-2 程式模擬

綜合上述，本研究之模擬可分為下列各項：

- (一)土壤入滲速度因連續方程式中擴散導致滲漏不均對水丘之形所造成的影響模擬。
- (二)土壤入滲速度不均於土層深度不同相對於水丘形成之影響模擬。
- (三)非飽和土壤對於淨補注量之影響模擬。
- (四)同時考慮入滲與周圍蒸發散對於水丘形成之影響模擬。

對於上述幾項模擬，本研究假設幾項模擬狀況如下：

- (一)條件一：考慮均勻、等向性土壤，長 120 公尺、土深 40 公尺之模擬區，於中央地表施以一 8 公尺帶狀均勻之補注率 0.01cm/min，假設地下水位位於模擬區域之最低位置，土壤飽和和水力傳導係數為 0.09cm/min， $\alpha$  值為 0.0141/cm， $n_e$  值為 0.3，並依照附錄 2 的推導，土壤兩側邊界之土壤水平滲透速度為零。
- (二)條件二：考慮均勻、等向性土壤，長 120 公尺、土深 40 公尺之模擬區，於中央地表施以

一 8 公尺帶狀均勻之補注率 0.01cm/min，其餘部份地表施以均勻的蒸發散率 0.00001cm/min，其餘條件均與條件一相同。

- (三)條件三：考慮均勻、等向性土壤，長 120 公尺、土深 80 公尺之模擬區，於中央地表施以一 8 公尺帶狀均勻之補注率 0.01cm/min，並假設地下水水位於模擬區域最低位置最低位置。

#### 4-3 模擬結果

- (一)條件一模擬結果比對 MODFLOW 模擬結果，補注水丘於水丘初始形成後 3000 及 9000 分鐘後剖面高度分佈見圖 8 及圖 9。
- (二)條件二模擬結果比對 MODFLOW 模擬結果，補注水丘於水丘初始形成後 3000 及 9000 分鐘後剖面高度分佈見圖 10 及圖 11。
- (三)條件三模擬結果比對 MODFLOW 模擬結果，補注水丘於水丘初始形成後及 9000 分鐘後剖面高度分佈見圖 12 及圖 13。
- (四)比較模擬條件下補注水於各時段因土壤滯留造成補注體積損失變化見表 1。

#### 4-4 結果與討論

- (一)利用模式討論補注水丘初始形成之時間，為比較不同條件下水丘之形成，故考慮當水丘中心形成高度達 1/1000 公尺時，此時間設為補注水丘初始形成之時間，此數值之決定為精度之考量。依此標準推求各種組合狀況之地下水補注水丘初始形成之時間，於本研究中模擬的三種狀況其水丘形成之初始時間分別為 576、578 及 1918 分鐘。

表 1. 各時段水丘體積比較表

| 補注水丘初始形成後時間(分鐘) | 條件一與 Dagan 解析解求得水丘體積比 | 條件二與 Dagan 解析解求得水丘體積比 | 條件三與 Dagan 解析解求得水丘體積比 |
|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 3000            | 0.968                 | 0.962                 | 0.946                 |
| 9000            | 0.981                 | 0.980                 | 0.961                 |
| 19000           | 0.992                 | 0.991                 | 0.972                 |

| 補注水丘初始形成後時間(分鐘) | 條件一與 MODFLOW 解求得水丘體積比 | 條件二與 MODFLOW 解求得水丘體積比 | 條件三與 MODFLOW 解求得水丘體積比 |
|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 3000            | 0.983                 | 0.976                 | 1/0.981               |
| 9000            | 0.989                 | 0.985                 | 1/0.987               |
| 19000           | 0.996                 | 0.992                 | 1/0.994               |

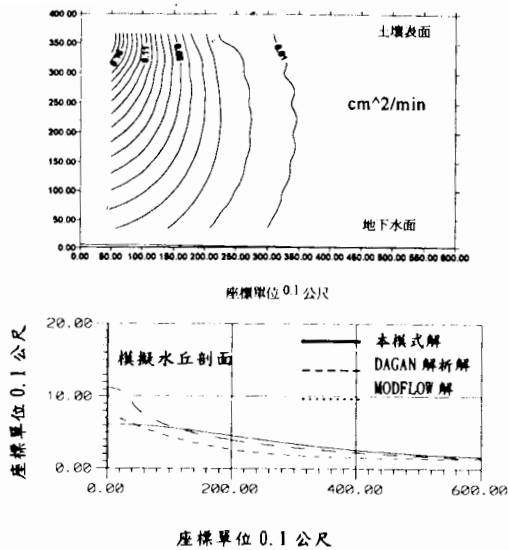


圖 8. 條件一研究區域 U 值等值線與地下水丘剖面線時間 3576min

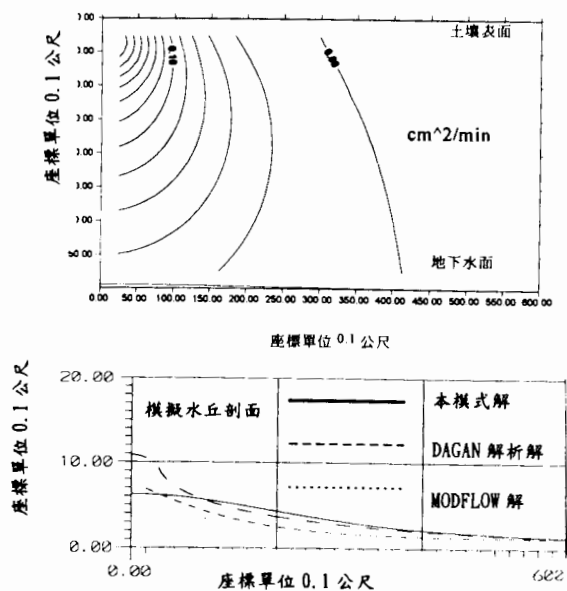


圖 10. 條件二研究區域 U 值等值線與地下水丘剖面線時間 3576min

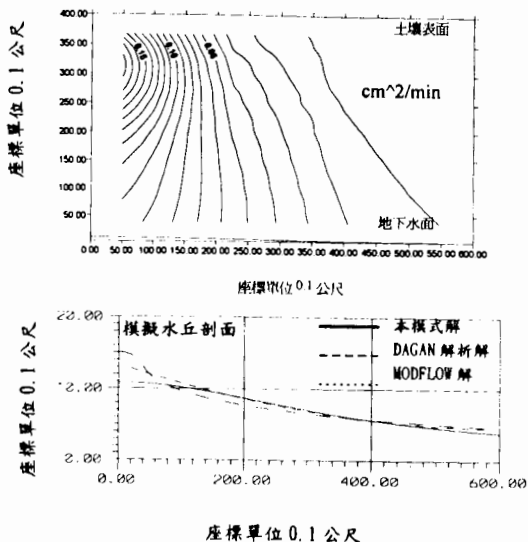


圖 9. 條件一研究區域 U 值等值線與地下水丘剖面線時間 9576min

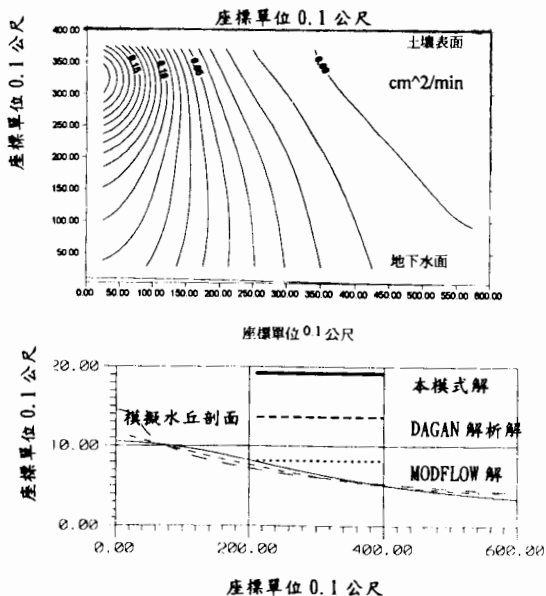


圖 11. 條件二研究區域 U 值等值線與地下水丘剖面線時間 9576min

- (c) 利用 MODFLOW 作為模式演算之比對，對於 MODFLOW 之模擬邊界條件採用 DAGAN 之解析解作為定水頭之邊界，此假設為保守之估計。
- (c) 模擬結果於模擬區域邊界狀況，因入滲條件

於邊界上為不透水邊界，故滲流速度於邊界上當入滲時間加長時，其速度為垂直向上的負值速度，故模擬邊界上之水丘剖面會較

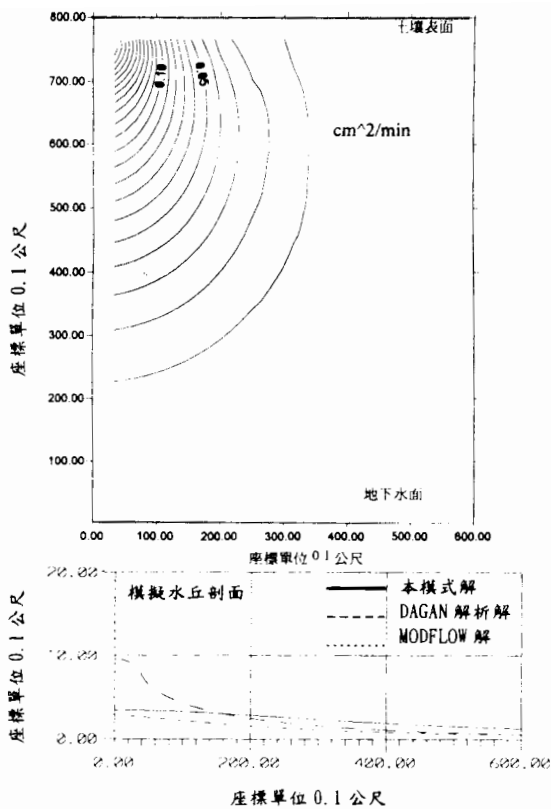


圖 12. 條件三研究區域 U 值等值線與地下水丘剖面線時間 4918min

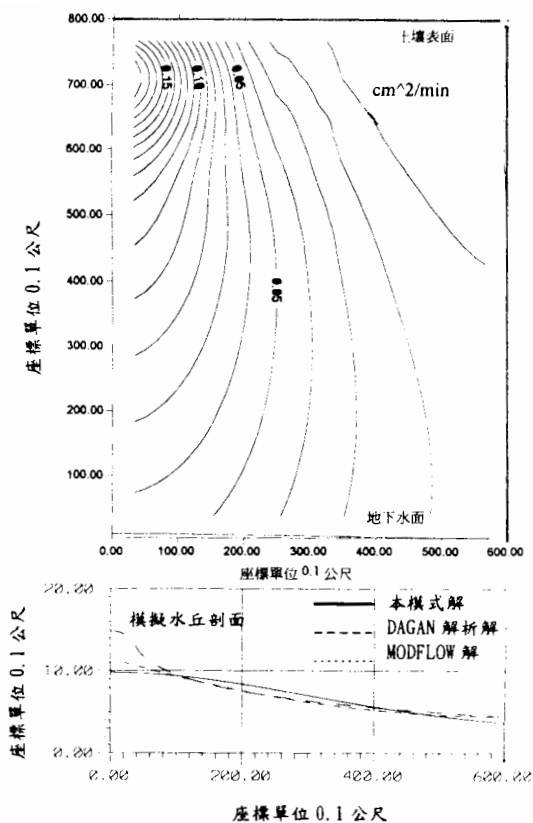


圖 13. 條件三研究區域 U 值等值線與地下水丘剖面線時間 10918min

MODFLOW 模擬結果為低。

(a) 本研究無論於考慮擴散項、地表蒸發散率以及地下水水位等影響，皆會造成補注率的損耗，即補注水滯留於非飽和層或蒸發散的損失，其各條件與 MODFLOW 解所得之水丘體積比見表 1。

(b) 在模擬時段中，程式運算疊代的機制為定時間中水丘成長高度未達 1/1000 公尺，此數值之決定為精度之考量。

(c) Dagan 的解析解中不考慮土壤入滲速度的不均所造成的影響，其水丘剖面於地表補注範圍的邊界會產生一個反曲點，本研究考慮擴散項的影響其模擬結果此反曲點因擴散作用向模擬區域邊界兩旁移動此模擬結果較接近於 MODFLOW 模擬出的剖面趨勢。見圖 14。

(d) 於地表考慮蒸發散的影響，水丘初始形成的時間因蒸發散的作用延後，並於水丘初始形成時土壤中的等勢能線產生下移集中的趨勢，導致初始形成的水丘中心高度高於未考

慮蒸發散影響的模擬狀態，且水丘剖面亦較為陡峭，兩旁邊界處之水丘高因蒸發散影響，其水位遠低於未考慮蒸發散影響之模擬狀態，但隨著時間的進行，水丘剖面形狀漸趨於未考慮蒸發散影響的模擬狀態。見圖 15、圖 16、圖 17 及圖 18。

(e) 考慮地下水位之不同，較深的地下水位會導致地表補注影響水丘初始形成的延後，且因為入滲路徑的加長，擴散項的影響會增大，亦即其所形成的水丘剖面會較地下水深度較淺所形成的剖面較為平緩，同樣隨著時間的進行其剖面將趨近於未考慮蒸發散影響的模擬狀態。見圖 15、圖 19、圖 20 及圖 21。

(f) 入滲導致的補注水滯留於土壤孔隙或考慮地表蒸發散率的因子，導致補注水滯留及蒸發散的損失率，一般而言其損失率會隨蒸發散率的增加或地下水位的加深而增加，但其影響會隨時間的增加亦即土壤孔隙的飽和增加而降低。

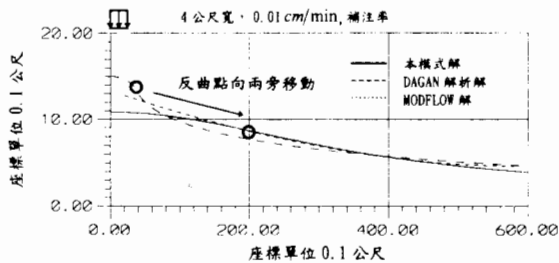


圖 14. 考慮土壤擴散後水丘剖面模擬之反曲點向兩側移動

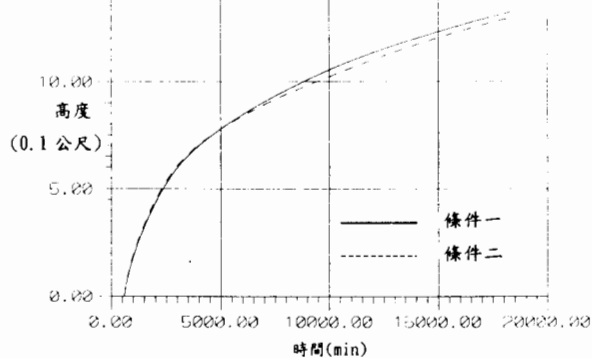


圖 17. 條件一與條件二補注水丘中心高比較圖

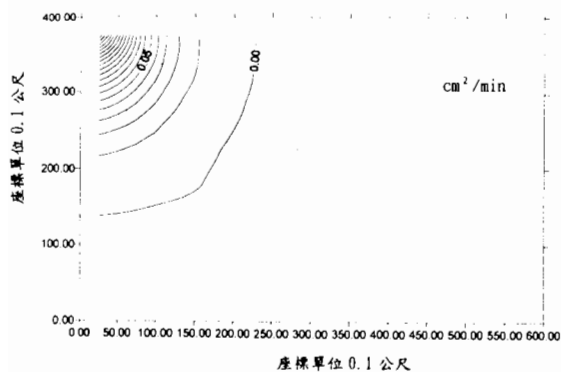


圖 15. 條件一研究區域起始補注 U 值等值線，時間 576min

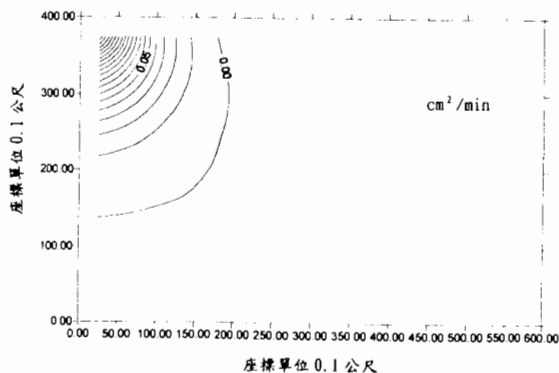


圖 16. 條件二研究區域起始補注 U 值等值線，時間 578min

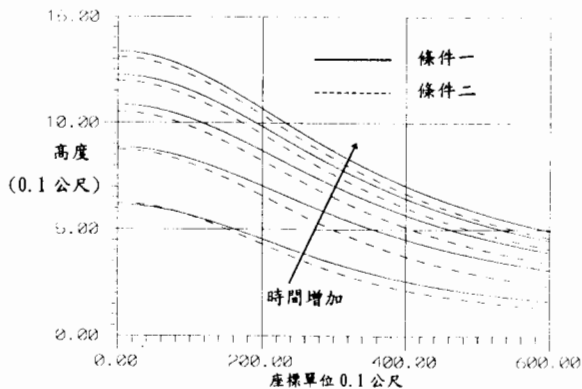


圖 18. 條件一與條件二補注水丘剖面比較圖

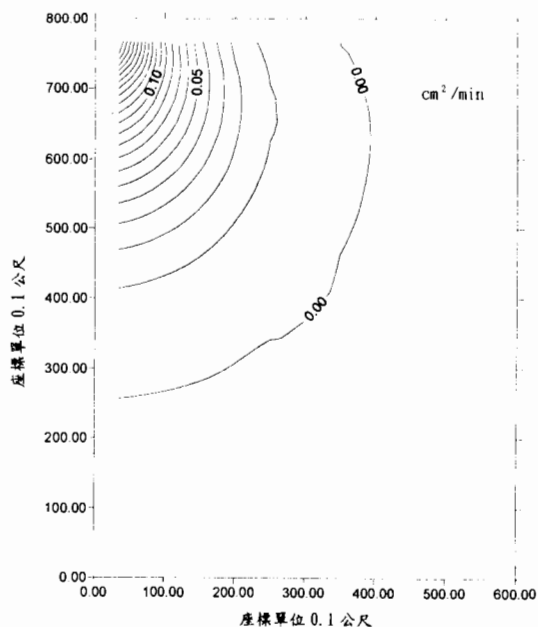


圖 19. 條件三研究區域起始補注 U 值等值線，時間 1918min

## 5-1 結論

- (一)比較經考慮土壤滲漏速度不均模擬地下水丘與DAGAN解析之水丘形狀，所得結果考慮土壤滲漏速度不均模擬地下水丘形狀較符合MODFLOW解。
- (二)模擬結果得知，考慮地表蒸發散與地下水位深淺兩項因子所模擬出之地下水補注水丘形狀會隨時間增加其形狀將趨近於為考慮此兩項因子之水丘形狀，亦即此兩項因子之影響將隨時間增加而減少。
- (三)滲漏導致補注水留置於土壤孔隙中會降低有效補注率，若再考慮地表蒸發散與地下水位深淺兩項因子，則入滲損失率增加，但其影響會隨時間增加而降低。
- (四)本模式可以估計補注水丘初始形成之時間，並於考慮地表蒸發散與地下水位深淺兩項因子所模擬出之地下水補注水丘或其他因子時推估其水丘初始形成之時間，以比較各因子對水丘形成之影響。

## 5-2 建議

- (一)本研究考慮均質、等向、不可壓縮之土壤，對於觀察各種狀況對於水丘之形成影響之觀察具有簡化的效果。若應用於現有地時則可利用先前觀測資料及各地質結構之特性，檢定出一平均之水力傳導係數與孔隙率，作為往後模擬之依據。
- (二)本研究對於邊界的處理為一連續的帶狀入滲，即土壤入滲的水平速度分量於模擬土壤邊界為零，若考慮單一入滲的模擬，則此種邊界條件並不適合，於應用時宜多加考慮。
- (三)為進一步檢定此模式，以砂箱模擬補注區之實驗研究，於砂箱中置入均勻細砂並施以連續帶狀之補注，將模擬結果與模式比較，為今後之工作。

## 謝 誌

感謝國科會經費資助(NSC85-2621-P002-056)，此外感謝台大農業工程研究所劉振宇主任與林俊男教授暨台大地質研究所賈義平教授及中興大學土木研究所蘇苗彬教授之修正意見，在此一併申謝。

$K$ ：非飽和土壤水力傳導係數[ $LT^{-1}$ ]

$K_0$ ：飽和土壤水力傳導係數[ $LT^{-1}$ ]

$h$ ：水頭[L]

$\alpha$ ：常數[ $L^{-1}$ ]

$\theta$ ：土壤含水量

$B_a$ ：系統特性[ $= m \cdot B$ ； $m$ ：質量]

$t$ ：時間[T]

$\bar{V}_{B_a}$ ：系統特性相對於控制體積的移動速度[ $LT^{-1}$ ]

$\bar{q}$ ：系統特性相對於控制體積的通量[ $LT^{-1}$ ]

$\varphi$ ：水頭[L]

$p$ ：壓力[ $NL^{-2}$ ]

$\gamma$ ：流體比重[ $NL^{-3}$ ]

$\bar{N}$ ：自由面地下水補注率[ $LT^{-1}$ ]

$\xi$ ：自由面所在高度[L]

$n_e$ ：有效孔隙率

$D$ ：定義為  $K(\theta) \frac{dh}{d\theta}$  [ $L^2T^{-1}$ ]

$u$ ：入滲水於土壤中的水平速度分量[ $LT^{-1}$ ]

$v$ ：入滲水於土壤中的垂直速度分量[ $LT^{-1}$ ]

$K_X$ ； $K_Y$ ； $K_Z$ ：水力傳導係數[ $LT^{-1}$ ]

$W$ ：單位土壤體積之流量[ $T^{-1}$ ]

$S_g$ ：蓄水係數[ $L^{-1}$ ]

$C$ ： $KA/L$  [ $L^2T^{-1}$ ]

$K_L$ ：滲漏係數[ $T^{-1}$ ]

$\theta_1$ ：土壤入滲速度與垂線之交角  $= \tan^{-1}(\frac{u}{v})$  [度]

$\theta_2$ ：水丘剖面與水平之交角[度]

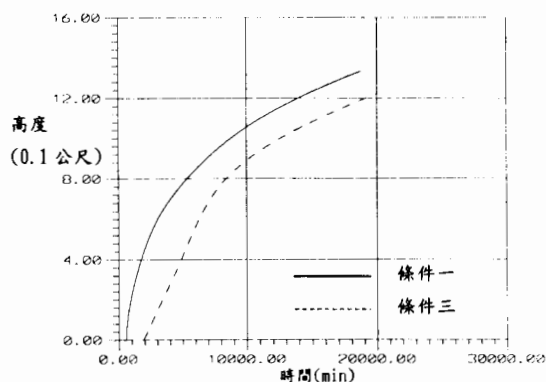


圖 20. 條件一與條件三補注水丘中心高比較圖

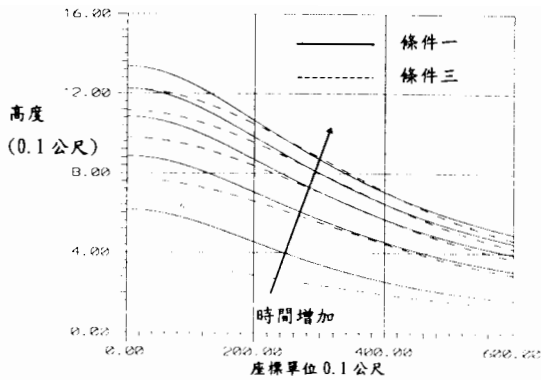


圖 21. 條件一與條件三補注水丘剖面比較圖

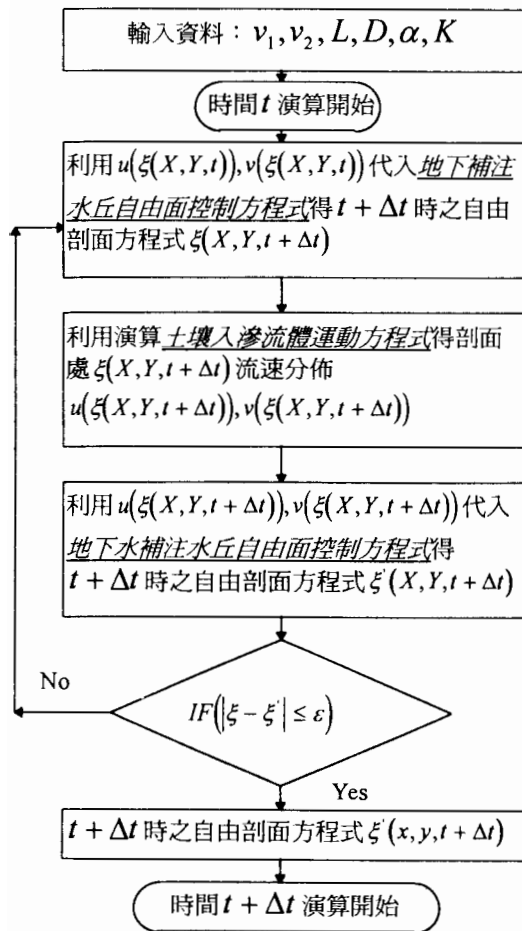


圖 22. 程式撰寫流程圖

## 參考文獻

1. 曹以松、林俊男、譚義績。1984 年。沿海地區海水入侵模式之研究(續)。臺大農業工程學系／行政院國家科學委員會。p5-10。
2. GARDNER, W. R., Some Steady-State Solutions of the Unsaturated Moisture Flow Equation with Application to Evaporation from a Water Table, Soil Sci., 85, p228-232, 1958.
3. KLUTE, A., Some theoretical aspects of the flow of water in unsaturated soils, Soil Sci., 73, p105-116, 1952.
4. PHILIP, J. R., Theory of Infiltration, Advan. Hydrosol., 5, p215-296, 1969.
5. BATU, V., Time-Dependent Two-Dimensional Infiltration and Evaporation from Nonuniform and Periodic Strip Sources, Water Resour. Res., 19, p1523-1529, 1983.
6. DAGAN, G., Linearized Solution of Unsteady Deep Flow toward an Array of Horizontal Drains, J. Geophys. Res., 69, p3361-3370, 1964.
7. DAGAN, G., Linearized Solutions of Free Surface Groundwater Flow with Uniform Recharge, Geophys. Res., 72(4), p1183-1193, 1967.
8. A Modular Three-Dimensional Finite-Difference Ground-Water Flow Model. USGS, 6, 1988.
9. Yeh, G. T., Users' Manual: A-Dimensional Finite Element Model of Water Flow Through Aquifers with Moving Free Surfaces: Version 2.0, 1993.
10. Bear, J., Dynamics of Fluids in Porous Media, Dover Publications, p425-430, 1988.
11. Liggett, J. A., and L. F. Philip, The Boundary Integral Equation Method for Porous Media Flow, George Allen & Unwin, p44-49, 1983.
12. Proceedings of the National Conference on Advances in Infiltration, Advances in Infiltration, American Society of Agricultural Eng., p55-63, 1983.
13. PHILIP, J. R., Numerical solution of equations of the diffusion type with diffusivity-concentration dependent, Trans. Faraday Soc., p885-892, 1955.
14. EAGLESON, P. S., Dynamic hydrology, Massachusetts Institute of Technology, p282-323, 1970.
15. POLUBARINOVA-KOCHINA, P. Y., Theory of groundwater movement, Princeton University Press, p492-517, 1962.
16. ASANO, T., Artificial recharge of groundwater, Butterworth Publishers, p129-149, 1985.

附錄一

利用擾動法線性化的過程為將式(8)代入式(2)中成為：

$$\nabla^2 \varphi = \left( \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial Z^2} \right) + \varepsilon \left( \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial Z^2} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial Z^2} \right) + \dots = 0 \quad \text{(附 1)}$$

因為小擾動  $\varepsilon$  為常數，得  $\nabla^2 \varphi_0 = 0$ ； $\nabla^2 \varphi_1 = 0$ ； $\nabla^2 \varphi_2 = 0$  及其他高次項均為零。

利用泰勒窄開式將於自由面的  $\varphi|_{Z=\xi}$  展開於  $Z = \xi_0$  成為：

$$\varphi(x, y, z, t)|_{Z=\xi} = \varphi_0|_{Z=\xi_0} + \varepsilon \left( \xi_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial Z} + \varphi_1 \right) \Big|_{Z=\xi_0} + \varepsilon^2 \left( \varphi_2 + \xi_2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial Z} + \frac{\xi_1^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial Z^2} + \xi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial Z} \right) \Big|_{Z=\xi_0} + O(\varepsilon^3) \quad \text{(附 2)}$$

利用關係  $\xi = \varphi|_{Z=\xi}$  比較式(附 2)和式(9)得關係式

$$\xi_0 = \varphi_0|_{Z=\xi_0}; \xi_1 = \frac{\varphi_1|_{Z=\xi_0}}{[1 - (\partial \varphi_1 / \partial Z)|_{Z=\xi_0}]}; \xi_2 = \frac{\varphi_2 + \frac{\xi_1^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial Z^2} + \xi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial Z}}{1 - \frac{\partial \varphi_0}{\partial Z}} \Big|_{Z=\xi_0} \quad \text{(附 3)}$$

利用(附 3)的關係是和泰勒展開式分別將  $\partial \varphi / \partial t$ ； $\partial \varphi / \partial X$  及  $\partial \varphi / \partial Y$ ； $\partial \varphi / \partial Z$  分別於  $Z = \xi_0$  展開後代入式(7)，並假設  $N = \varepsilon N_1$ ，由於地表補注量不為零或初始條件為時變性(Unsteady)，故同時假設  $\varphi_0 = 0$ ； $\xi_0 = 0$ ，得下式：

$$N_1 \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \varepsilon \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial Z \partial t} \right) \right] = K \left( \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial X} + \varepsilon^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial X} + \varepsilon^3 \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial X \partial Z} \right) + \left( \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial Y} + \varepsilon^2 \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial Y \partial Z} \right) + \left( \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial Z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial Z} + \varepsilon^3 \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial Z^2} \right) \quad \text{(附 4)}$$

$$- (K + cN_1) \left( \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial Z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial Z} + \varepsilon^3 \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial Z^2} \right) + cN_1$$

因為小擾動  $\varepsilon$  為常數，(式附 4)左右兩邊比較可得式(10)之關係式。

附錄二

求解解析解的過程為考慮初始條件  $U(X, Z, 0) = 0$ ，及邊條件(附圖)數學表示如下：

$$X=0; 0 < Z < \infty; \frac{\partial U}{\partial X} = 0 \quad \text{(附 5)}$$

$$X=H_m; 0 < Z < \infty; \frac{\partial U}{\partial X} = 0 \quad \text{(附 6)}$$

$$0 < X < H_m; Z = \infty; U = 0 \quad \text{(附 7)}$$

$$0 < X < H_m; Z = \infty; \frac{\partial U}{\partial Z} = 0 \quad \text{(附 8)}$$

利用拉普拉斯轉換  $\bar{U} = \int_0^\infty e^{-St} U(X, Z, t) dt$  將式(14)

化成：

$$S\bar{U} = \frac{k}{\alpha} \left[ \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial Y^2} \right] - k \frac{\partial \bar{U}}{\partial Z} \quad \text{(附 9)}$$

利用分離係數法求解式(附 9)得：

$$U(X, Z, S) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[ A_n \exp(M_1 Z) + B_n \exp(M_2 Z) \right] \sin(\lambda_n X) + \left[ C_n \exp(M_1 Z) + D_n \exp(M_2 Z) \right] \cos(\lambda_n X) \right\} \quad \text{(附 10)}$$

$$M_1 = \frac{\alpha}{2} + \left( \lambda^2 + \frac{\alpha}{k} S + \frac{\alpha^2}{4} \right)^{1/2}, M_2 = \frac{\alpha}{2} - \left( \lambda^2 + \frac{\alpha}{k} S + \frac{\alpha^2}{4} \right)^{1/2}$$

利用邊界條件式(附 5)得  $A_n$ ； $B_n$  皆為零，利用式(附 6)得

$\lambda_n = n\pi/H_m; n=0, 1, 2, \dots$ ，利用式(附 7)(附 8)得  $C_n=0$ ，故式(附 10)化簡為：

$$\bar{U}(X, Z, S) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \exp \left\{ \left[ \frac{\alpha}{2} - \left( \frac{n\pi}{H_m} \right)^2 + \frac{\alpha}{k} S + \frac{\alpha^2}{4} \right] Z \right\} \cos \left( \frac{n\pi X}{H_m} \right) \quad \text{(附 11)}$$

考慮地表補注於土壤表層的邊界條件，及利用(15)的關係，經由拉普拉斯轉換得：

$$L\{v(X, 0)\} = L\left\{ \alpha U|_{Z=0} - \frac{\partial U}{\partial Z} \Big|_{Z=0} \right\} = \left( \alpha \bar{U} - \frac{\partial \bar{U}}{\partial Z} \right) S = v_0(X) \dots \quad \text{(附 12)}$$

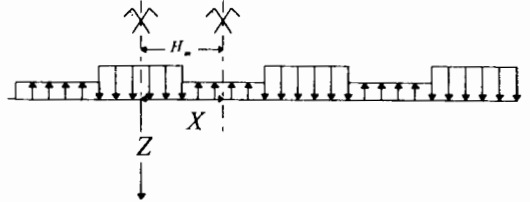
將式(附 11)代入(附 12)得：

$$v_0(X) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos \left( \frac{n\pi X}{H_m} \right) \dots \quad \text{(附 13)}$$

$$E_n = D_n \left\{ \frac{\alpha}{2} + \left[ \left( \frac{n\pi}{H_m} \right)^2 + \frac{\alpha}{k} S + \frac{\alpha^2}{4} \right] \right\} \dots \quad \text{(附 14)}$$

將式(附 13)利用傅力葉展開得  $E_n = \frac{2}{H_m} \int_0^{H_m} v_0(X) \cos \left( \frac{n\pi X}{H_m} \right) dX$  代入式(附 14)中求得  $D_n$ ，再將  $D_n$  代入式(附 11)中，利用附拉普拉斯轉換即可求得  $U$  的解析解。

附圖



收稿日期：民國 85 年 7 月 5 日  
修正日期：民國 85 年 9 月 6 日  
接受日期：民國 85 年 9 月 25 日