

專 論

演算 Laplace-Hankel 區域內之水井力學解析解

Derivation of the Analytical Solution of Well Hydraulics in the Laplace-Hankel Domain

國立臺灣大學農業工程學研究所

周 文 帥

Wen-Shuai Chou

國立臺灣大學農業工程學研究所教授

劉 振 宇

Chen-Wuing Liu

國立中央大學應用地質學研究所教授

陳 家 洵

Chia-Shyun Chen

國立臺灣大學農業工程學研究所講師

陳 增 壽

Tzen-Show Chen

摘 要

水井水力學之解析解在 Laplace 與 Hankel 區域上之運算為快速且精確之方法。依據其建立之電腦模式可經由輸入參數值，有效地計算不同水力情況下水井力學解在 Laplace 與 Hankel 區域上之運算，並可廣泛地應用於透水及不透水之邊界、變動抽水速率以及多井系統之計算。

關鍵詞：水井水力學，部份貫穿，滲漏含水層。

ABSTRACT

The calculation of well hydraulics is effective and accurate in Laplace-Hankel domain. The purpose of this study is to establish a computer model with flexible input parameters to analyze the solution under different hydraulic conditions in Laplace-Hankel domain. The model can be generally applied to permeable and impermeable boundary conditions, variable pumping rate, and multiple well systems.

Keywords : Well hydraulics, Partial penetration, Leaky aquifer.

一、前 言

無論在地下水資源的開發、利用，或地面水與地下水聯合開發運用，以至於地下水之污染整治工作等，水井水力學(Well Hydraulics)皆扮演著

重要的角色。根據水井水力學之基礎，經由抽水試驗(Pumping Test)可求得含水層的參數值，如儲水係數(S)、比出水量(S_y)、流通係數(T)，或其它含水層水文地質的特性。此外，水井力學亦可用來預估因抽取地下水所引起的洩降(drawdown)分

佈，此資料對於地下水水權之分配、地下水資源之規劃，以及水井出水量之判定均可提供重要之參考。

一般而言，含水層因水力情況之不同可分為拘限 (confined)，非拘限 (unconfined)，滲漏 (leaky)，以及破碎 (fracture) 等。拘限含水層 (如圖 1-1(a) 所示) 最早為人們所研究，含水層之上下兩端被不透水層包圍，因此其任一點壓力水頭較含水層厚度為高。非拘限含水層如圖 1-1(b) 所示，下端為不透水層，上端為一自由水面線，開始抽水時，自由水面會隨著抽水時間增加而下降，對自由水面下端飽和含水層造成補注。由於飽和含水層厚度隨著抽水時間增加而改變，使得解析解變得複雜無法處理，故假設洩降與飽和含水層之厚度相比值很小，而將含水層厚度 b 視為一常數加以簡化。滲漏含水層如圖 1-1(c) 所示，上下端為半透水層，其儲水係數假設為零，亦即所有補注量為瞬時補注，當抽水開始後半透水層對含水層即產生一補注量，使得抽水試驗洩降值減低。破碎含水層問題在本文則不加以討論。抽水井與觀測井依鑽鑿之深度可分為完全貫穿與部分貫穿，其設置形式如圖 1-2 所示，其中 b 為飽和含水層厚度， d 為抽水井部分貫穿含水層濾水管開口頂端至自由水面之距離， l 為抽水井部分貫穿含水層濾水管開口底端至自由水面之距離， d_0 為觀測井部分貫穿含水層濾水管開口頂端至自由水面之距離， l_0 為觀測井部分貫穿含水層濾水管開口底端至自由水面之距離。

抽水開始前之初始壓力面

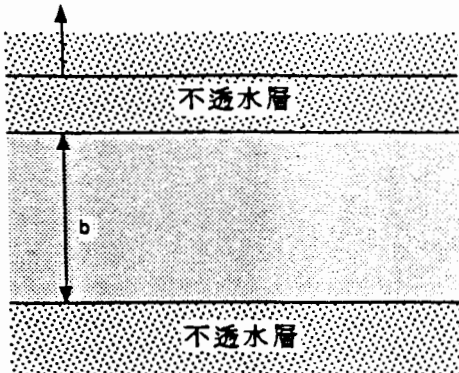


圖 1-1(a) 拘限含水層

抽水開始前之初始水位

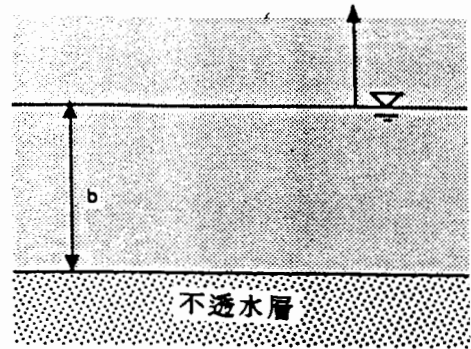


圖 1-1(b) 非拘限含水層

抽水開始前之初始壓力面

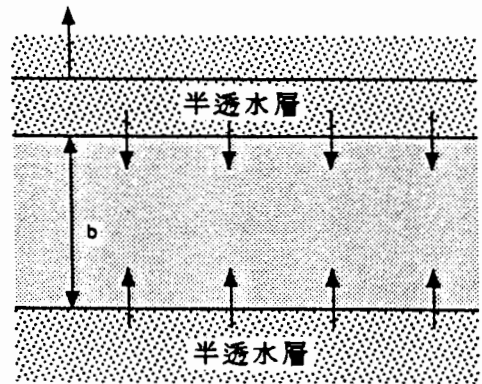


圖 1-1(c) 滲漏含水層

在水井水力學發展上泰斯 (Theis, [1935][1]) 首先推導出一套基本理論，適用於抽水井完全貫穿之拘限含水層情況，Hantush[1961][2] 建立了抽水井部分貫穿拘限含水層之解析解。在非拘限含水層之理論發展來說，由 Boulton[1954][3]、Neuman[1972, 1974][4, 5] 等學者研究。滲漏含水層初由 de Glee[1930][6] 演繹，Hantush[1961, 1964][2, 7] 等人亦曾研究之。更詳盡的水井水力學理論及其應用可參考 Hantush[1964][7]、Streltsova [1987][8] 以及 Kruseman and Deridder[1990][9]。

雖然水井水力學的理論發展已趨近完備，但

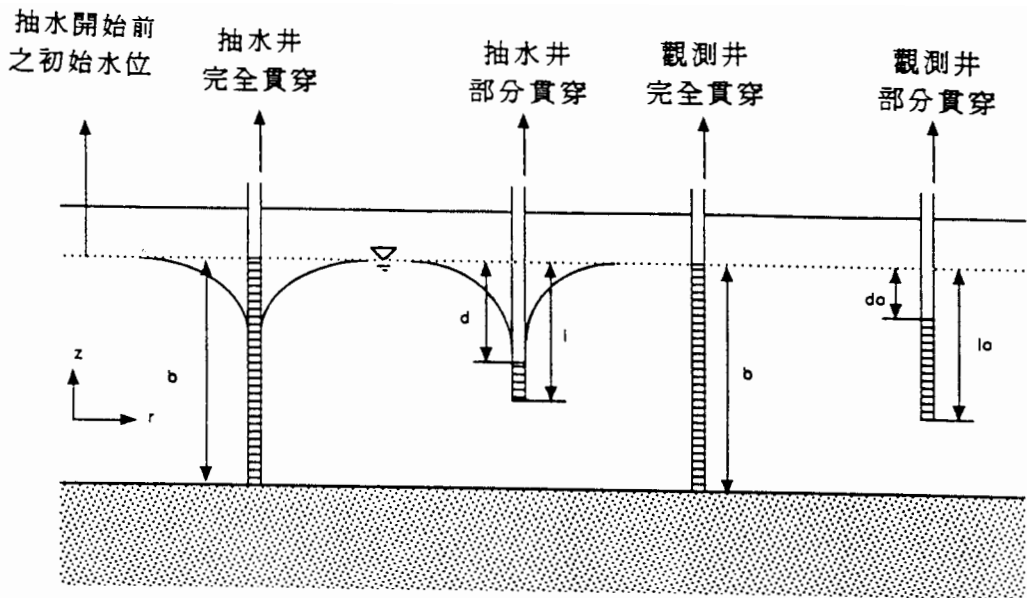


圖 1-2 抽水井與觀測井設置形式

對應用的領域而言，水井水力學的計算有其困難性存在，因為絕大部分的水井水力學均包括積分方程，而積分方程中又包含特殊函數。舉例來說，泰斯解以指數積分函數為主，此一方程無法經由直接積分求得其數值，而由數值法求之亦有精度不足之誤差存在。Neuman[1974]之解析解包含了振動的 Bessel 積分方程與無窮級數積分，其特徵值的求得是非常困難，亦無法經由直接積分求得。Neuman 乃使用數值法將其解析解程式化發展出 DELAY 2 的福傳程式。Rolfes[1980][10]改進 DELAY 2 的數值方式，雖節省了運算時間，但在程式的編寫與執行上仍然複雜。由於水井水力學在解決實際地下水的問題上非常重要，因此如何簡化演算之複雜性、減少計算之時間、增加數值之精確度即為一值得研究的課題。

在求解水井水力學的解析解中，一般使用以指數方程為其轉換核心 (kernel) 之 Laplace 轉換，將時間變數 t 轉換成一個 p 變數，在 p 區域中原始模型的解較容易求得，經過 Laplace 逆轉換後，此一 p 區域的解可以轉換為所需 t 區域的解。Moench [1984b][11]，Chen[1985][12] 利用 Stehfest[1970][13] 之數值方法處理 Laplace 逆轉換，其優點為避免了冗長的數值積分，減少運算的時間。最近 Chen [1993][14] 進一步利用 Laplace 與 Hankel 轉換方法簡

化水井力學之計算。Hankel 轉換是利用 Bessel 方程為其轉換核心方程，在水井力學中，一般是應用在徑向 r ，將 r 區域轉換成 a 區域。而 Hankel 逆轉換使用 Fast Hankel Transform(FHT)，FHT 為地質物理領域常用的方法，其使用數位摺合 (digital convolution) 的方法代替直接數值積分以求得積分值。通常數位摺合的時間較直接數值積分為快，主要在避免計算 Bessel Function 所花的時間。Anderson [1979][15] 詳細的討論了 FHT 之優劣。Anderson[1982][16] 發展了以福傳語言編寫的電腦程式來處理 Hankel 逆轉換。當 Laplace 與 Hankel 轉換連續使用時，許多水井力學模型在 p - a 區域上即呈現有意義的物理組合，根據 Chen et al. [1993] 的研究，Neuman 解 [1974] 在 Laplace-Hankel 區間的解析解為線性的組合，包含了三項，每一項都有特定的物理意義，分別如下：抽水井完全貫穿拘限含水層的泰斯解，非拘限含水層因水位線移動對洩降的影響，以及部分貫穿井對洩降的影響。因此不同水力情況含水層的解析解可經由這三項線性組合求得。

本文目的為延伸 Chen et al. [1993] 以 Laplace-Hankel domain 方法來處理複雜之水井力學，將其應用到滲漏含水層，建立模擬工具，並根據觀測井洩降線性疊加的特性使其能處理多井系統

(Multiple Well Systems) 以及不同之邊界條件，使得模式除了能處理拘限含水層、非拘限含水層、抽水井部分貫穿及完全貫穿含水層、觀測井部分貫穿及完全貫穿含水層、含水層等向性及異向性等問題外，更增加其於水井水力學之實用性。

二、模式演算

水井水力學本分析模式之發展乃根據 Neuman [1974 ; p.309,A.14] 式非拘限含水層解析解、依據 Chen et al. [1993] 此非指限含水層解析解在 Laplace-Hankel 區域上的表示式如下：

$$g(a, z, p) = g_1 - g_2 + g_3 \quad (2-1)$$

$$g_1 = \frac{Q}{2\pi T_p} (a^2 + \frac{pS}{T})^{-1} \quad (2-2)$$

$$g_2 = \frac{Q}{2\pi b K_z} (F_p F_w) \quad (2-3)$$

$$g_3 = \frac{Q}{\pi^2 K_r (l-d)} \sum_{n=1}^{\infty} F_n (a^2 + \frac{pS}{T} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{K_z}{K_r})^{-1} \quad (2-4)$$

其中

$$F_p = \frac{b}{l-d} \frac{\sinh[\eta(b-d)] - \sinh[\eta(b-l)]}{\sinh \eta b} \quad (2-5)$$

$$F_w = \frac{\cosh[\eta(b-z)]}{[\alpha \eta \sinh(\eta b) + p \cosh(\eta b)] \eta^2} \quad (2-6)$$

$$F_n = \frac{1}{n} \cos(\frac{n\pi z}{b}) [\sin(\frac{n\pi l}{b}) - \sin(\frac{n\pi d}{b})] \quad (2-7)$$

其中

$$\alpha_v = \frac{K_z}{S_y}$$

$$\eta^2 = \frac{K_r}{K_z} (a^2 + \frac{pS}{T})$$

其中 T 為含水層流通係數，b 為飽和含水層厚度，S 為儲水係數， S_y 為比出水量， K_z 為垂直水力傳導係數， K_r 為水平水力傳導係數，d 為抽水井濾水管開口頂端至自由水面距離，l 為抽水井濾水管開口底端至自由水面距離。

欲求得 2-1 式在 r 與 t 區域之解， g_1 、 g_2 與 g_3 須經過 Laplace 與 Hankel 之逆轉換，亦即在 2-1 式中，a 須經由 FHT 逆轉換為 r，p 須經由 Stehfest 逆轉換。根據 Gradshteyn and Ryzhik [1980 ; p.678, 6.532.4 式 [17]， g_1 之 Hankel 逆轉換為

$$H^{-1}[\frac{Q}{2\pi T_p} (a^2 + \frac{pS}{T})^{-1}] = \frac{Q}{2\pi T_p} \int_0^{\infty} \frac{a J_0(ar)}{a^2 + \frac{pS}{T}} da = \frac{Q}{2\pi T_p} K_0(r \sqrt{\frac{pS}{T}}) \quad (2-8)$$

再根據 Oberhettinger and Badii [1973 ; p.338, 13.41 式 [18]，則 2-8 式之 Laplace 逆轉換為

$$h_1(r, t) = L^{-1} H^{-1}(g_1) = \frac{Q}{4\pi T} W(u) \quad (2-9)$$

其中 h_1 代表拘限含水層完全貫穿井抽水後之洩降值，而 W(u) 為所謂之指數積分。2-9 式為地下水水井力學中著名之泰斯解。若 g_2 及 g_3 為零時，則洩降的變化即為抽水井完全貫穿拘限含水層的泰斯解。

於 2-1 式中，比出水量僅包括於 g_2 中。比出水量是用來反映地下水水位下降所引起之排水現象，因此 g_2 之物理意義為地下水水位變動對洩降之影響。若比出水量為零時，代表含水層為一拘限含水層，則不再有地下水水位變動之影響。 g_2 前之負號表示因地下水水位變動，使得比出水量對飽和含水層產生補注，造成洩降減小。 g_2 經 Laplace 與 Hankel 逆轉換後為下式

$$h_2(r, z, t) = \frac{Q}{2\pi b K_z} L^{-1} H^{-1}(F_p F_w) \quad (2-10)$$

其中 h_2 代表地下水水位變動對洩降之影響值。由於求得 2-10 式 Laplace 與 Hankel 逆轉換之解析形式極為困難，因此採用 FHT 及 Stehfest 數值法求得 Laplace 與 Hankel 逆轉換。

於 2-1 式中， g_3 的物理意義為抽水井部分貫穿含水層對洩降之影響。若是 $d = 0$ ， $l = b$ ，則 g_3 的值為零，亦即井為完全貫穿含水層。 g_3 經 Laplace 與 Hankel 逆轉換後如下

$$h_3(r, z, t) = L^{-1} H^{-1}(g_3) = \frac{Q}{\pi^2 K_r (l-d)} \sum_{n=1}^{\infty} F_n L^{-1} [\frac{K_0}{P} (\frac{r^2 p S}{T} + n^2 \pi^2 \beta)^{-\frac{1}{2}}] \quad (2-11)$$

其中

$$\beta = \frac{K_z r^2}{K_r b^2} \quad (2-12)$$

其中 h_3 代表部分貫穿井對洩降之影響值，r 為觀測井與抽水井之間距。2-11 式之 Laplace 逆轉換亦須使用 Stehfest 數值法求得。

於 2-1 式 r 與 t 區域中，代表洩降於非拘限含水層中受到抽水井部份貫穿含水層之影響。當觀測井為量測一固定深度之洩降時（亦即 $l \neq b$ 或 $d \neq 0$ 且 $l_0 = d_0 = z$ ），如下式所示

$$h(r, z, t) = h_1 - h_2 + h_3 \quad (2-13)$$

其中 $h(r,z,t)$ 表示總洩降值，而 h'_1 、 h_2 及 h'_3 已由 2-9 式、2-10 式及 2-11 式定義之。

若一觀測井自 d_0 至 l_0 部分貫穿於含水層，則其所量測之洩降代表 d_0 至 l_0 之平均值。故 2-13 式須經過下式垂直平均之運算，以求得平均洩降。

$$\bar{h}(r,z,t) = \frac{1}{l_0 - d_0} \int_{d_0}^{l_0} (h'_1 - h_2 + h'_3) dz = \bar{h}'_1 - \bar{h}_2 + \bar{h}'_3 \quad (2-14)$$

其中

$$\bar{h}_2 = \frac{Q}{2\pi b K_c} L^{-1} H^{-1} (F_p F_w) \quad (2-15)$$

$$\bar{F}_w = \frac{\sinh[\eta(b-d_0)] - \sinh[\eta(b-l_0)]}{\eta^3(l_0-d_0) [\alpha_y \eta \sinh(\eta b) + p \cosh(\eta b)]} \quad (2-16)$$

$$\bar{h}'_3 = \frac{Qb}{\pi^3 K_c (l-d)} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{F}_n L^{-1} \left[\frac{K_0}{p} \left(\frac{r^2 p S}{T} + n^2 \pi^2 \beta \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2-17)$$

$$F_n = \frac{1}{\pi^2 (l_0-d_0)} \left[\sin\left(\frac{n\pi l_0}{b}\right) - \sin\left(\frac{n\pi d_0}{b}\right) \right] \left[\sin\left(\frac{n\pi l}{b}\right) - \sin\left(\frac{n\pi d}{b}\right) \right] \quad (2-18)$$

其中 $\bar{h}(r,z,t)$ 表示部分貫穿井總平均洩降值，而 $\bar{h}_2$ 代表部分貫穿井中地下水水位變動對洩降之平均影響值， $\bar{h}'_3$ 代表部分貫穿井對洩降之平均影響值。

若一抽水井完全貫穿含水層，則 h'_3 為零。若觀測井為量測一固定深度之洩降時（亦即 $d = 0$ 、 $l = b$ 且 $l_0 = d_0 = z$ ），則 F_p 等於 1。在此情況中洩降表示為

$$h(r,z,t) = h'_1 - h_{21} \quad (2-19)$$

其中

$$h_{21} = \frac{Q}{2\pi b K_c} L^{-1} H^{-1} (F_w) \quad (2-20)$$

其中 F_w 的定義如 2-14 式。

若一觀測井自 d_0 至 l_0 部分貫穿於含水層，則其所量測之洩降代表 d_0 至 l_0 之平均值。故 2-19 式須經過下式垂直平均之運算，以求得平均洩降

$$\bar{h}(r,z,t) = \bar{h}'_1 - \bar{h}_{21} \quad (2-21)$$

其中

$$\bar{h}_{21} = \frac{Q}{2\pi b K_c} L^{-1} H^{-1} (\bar{F}_w) \quad (2-22)$$

其中 $\bar{F}_w$ 的定義如 2-16 式。

除了上述情況外，2-13 式稍作修改後亦可應用於滲漏含水層之情況。若一抽水井部分貫穿於滲漏含水層，地層為非等向性且觀測井為量測一固定深度壓力時（亦即 $l_0 = d_0 = z$ ），依據 Hantush

[1961, 1964] 之研究其洩降之表示式如下

$$h(r,z,t) = h_1 + h_3 \quad (2-23)$$

其中

$$h_1 = L^{-1} \left\{ \frac{Q}{2\pi T p} K_0 \left(r \sqrt{\frac{pS}{T} + v} \right) \right\} \quad (2-24)$$

$$h_3 = L^{-1} \left\{ \frac{Q}{\pi^2 K_c (l-d)} \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{K_0}{p} \sqrt{\left(\frac{r^2 p S}{T} + r^2 v + n^2 \pi^2 \beta \right)} \right\} \quad (2-25)$$

其中

$$v = \frac{K'}{Tb'} \quad (2-26)$$

其中 K' 表示半透水層垂直水力傳導係數， b' 為半透水層厚度， $h(r,z,t)$ 代表總洩降值， h_1 表示滲漏含水層完全貫穿井抽水後之洩降值， h_3 表示部分貫穿井對洩降之影響值。在本文中 v 實際上就是所謂滲漏因子 (Leaky Factor) 之倒數平方。當 v 愈大時，水經由半透水層對含水層產生之補注量愈大，使得洩降值愈小，最後趨近於一定值，此時代表抽水量與補注量相等。當 v 等於零時，2-23 式即等於拘限含水層抽水井部分貫穿含水層之情況。故拘限含水層為滲漏含水層之特例。

若一觀測井自 d_0 至 l_0 部分貫穿於含水層，則其所量測之洩降代表 d_0 至 l_0 之平均值。故 2-23 式須經過下式垂直平均之運算，以求得平均洩降

$$h(r,z,t) = \bar{h}_1 + \bar{h}_3 \quad (2-27)$$

其中

$$\bar{h}_3 = \frac{Qb}{\pi^3 K_c (l-d)} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{F}_n L^{-1} \left[\frac{K_0}{p} \sqrt{\left(\frac{r^2 p S}{T} + r^2 v + n^2 \pi^2 \beta \right)} \right] \quad (2-28)$$

$\bar{F}_n$ 的定義如 2-18 式。

若考慮一抽水井完全貫穿於滲漏含水層，地層為非等向性，則不論觀測井是否完全貫穿含水層，其洩降表示式皆為下式

$$h(r,z,t) = h_1 \quad (2-29)$$

其中 h_1 如 2-24 式所示。

因此不論含水層之形態為何（拘限，非拘限或是滲漏），皆可表示為

$$h(r,z,t) = h_1 - h_2 + h_3 \quad (2-30)$$

若含水層為拘限或是非拘限之情況，則 v 即等於零。若含水層為滲漏之情況，則 h_2 等於零、 v 大於零。當觀測井為完全貫穿含水層時，則抽水井部分貫穿含水層之影響 (h_3) 為零。

上述不同情況之數值解可經由本文發展之電腦模式中設定不同參數值來加以控制，例如 S_y 、 S 、 l_0 、 d_0 、 l 、 d 、以及 v 等等，其流程如圖 2-1 所示，而不同情況之洩降組和如表 2-1 所示，共有 10 種不同組合。

在 Laplace 轉換之運算中，當 t 愈大時，則 p 愈小。當 p 等於零時， t 趨近於無窮大，此時 F_w 及 g_3 不再受 p 之影響，亦即與時間相互獨立達到所謂之穩定狀態。當時間愈大時，水位變動對洩降之影響愈趨近於穩定狀態，其如下所示

$$h_w = \frac{Q}{4\pi T} H^{-1} \left(\frac{2K_r}{K_z} F_p F_w^* \right) \quad (2-31)$$

其中 F_w^* 為設定 F_w 中之 p 等於零，而 η^2 用 $a^2 K_j / K_z$ 取代。若含水層為滲漏之情況，則 h_w 等於零、 v 大於零。當時間愈大時，抽水井部分貫穿含水層對洩降之影響亦趨近於穩定狀態，其如下所示

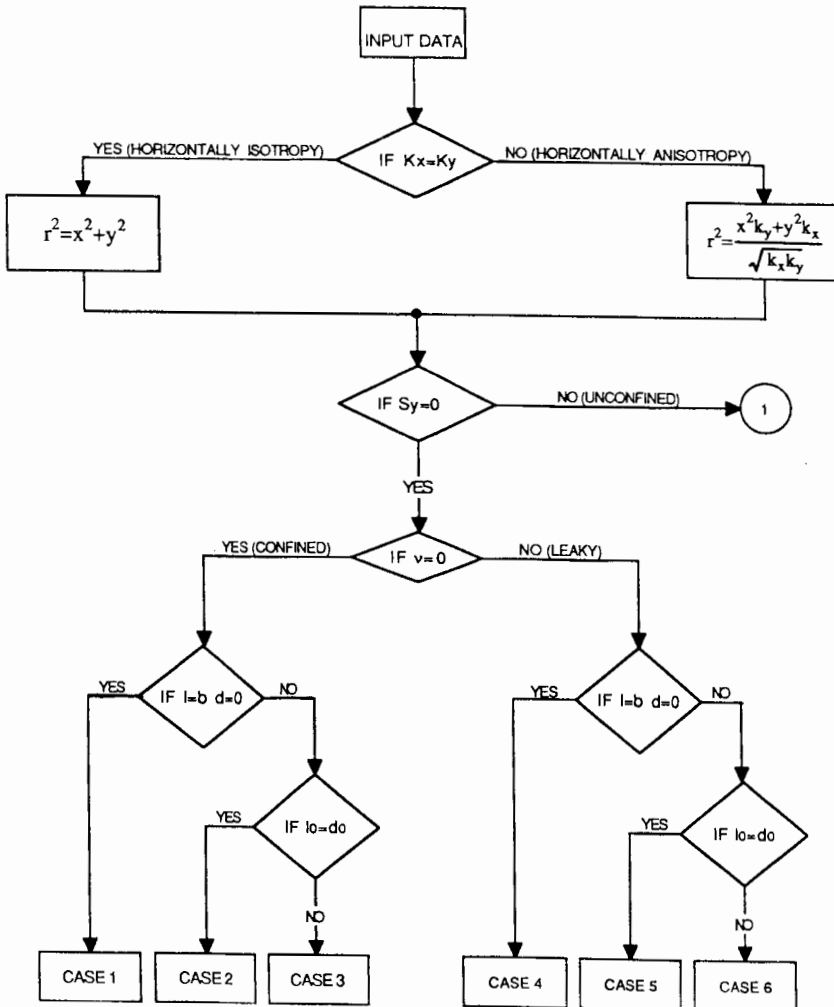
$$h_p = \frac{Q}{4\pi T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4b}{\pi(n-d)} F_n K_0 \sqrt{(n^2 \pi^2 \beta + v)} \quad (2-32)$$

然而 h_1 不會趨近於穩定狀態。因此時間愈大時，其洩降如下所示

$$h(r, z, t) = h_1 - h_w(r, z) + h_p(r, z) \quad (2-33)$$

上述之 2-31 式、及 2-32 式中 Laplace 之逆轉換已不存在。

由 2-33 式可知，當含水層為一非拘限情況且時間愈大時，一給定 r 及 z 之洩降可由泰斯解線性



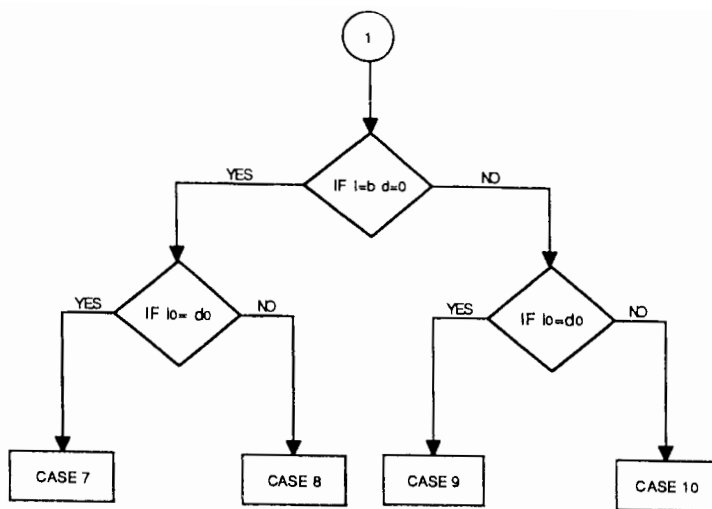


圖 2-1 電腦模式流程

表 2-1 不同水力情況洩降組合

	含水層種類	抽水井型態	觀測井型態	
Case 1	拘限 ($S_y = 0, \nu = 0$)	完全貫穿	觀測 $z = d_0$ 處或濾水管位置由 d_0 到 l_0	h_1
Case 2	拘限 ($S_y = 0, \nu = 0$)	部分貫穿	觀測 $z = d_0$ 處	$h_1 + h_3$
Case 3	拘限 ($S_y = 0, \nu = 0$)	部分貫穿	濾水管位置由 d_0 到 l_0	$h_1 + h_3$
Case 4	滲漏 ($S_y = 0, \nu > 0$)	完全貫穿	觀測 $z = d_0$ 處或濾水管位置由 d_0 到 l_0	h_1
Case 5	滲漏 ($S_y = 0, \nu > 0$)	部分貫穿	觀測 $z = d_0$ 處	$h_1 + h_3$
Case 6	滲漏 ($S_y = 0, \nu > 0$)	部分貫穿	濾水管位置由 d_0 到 l_0	$h_1 + h_3$
Case 7	非拘限 ($S_y > 0, \nu = 0$)	完全貫穿	觀測 $z = d_0$ 處	$h_1 - h_{21}$
Case 8	非拘限 ($S_y > 0, \nu = 0$)	完全貫穿	濾水管位置由 d_0 到 l_0	$h_1 - h_{21}$
Case 9	非拘限 ($S_y > 0, \nu = 0$)	部分貫穿	觀測 $z = d_0$ 處	$h_1 - h_2 + h_3$
Case 10	非拘限 ($S_y > 0, \nu = 0$)	部分貫穿	濾水管位置由 d_0 到 l_0	$h_1 - h_2 + h_3$

疊加 h_w 及 h_p 求得。當 z 改變時， h_w 及 h_p 亦隨之改變，因此固定 r 時，不同之 z 使得洩降分佈平行於泰斯解。當 r 愈大時， h_p 趨近於零，因此抽水井部分貫穿含水層對洩降之影響於 r 與 t 非常大時則可忽略。如果抽水井完全貫穿含水層，則 h_p 等於零，一給定 r 及 z 之洩降可由泰斯解線性疊加 h_w 求得。不論抽水井是否完全貫穿含水層， t 非常大時其洩降始終平行於泰斯解。

本模式亦可應用於多井系統及變動抽水速率等問題。由於拘限、非拘限及滲漏含水層之解析解為線性解，故可使用線性疊加之原則來處理。而抽水速率並不影響無因次單位洩降值，故可依實際情況之抽水來決定是否改變抽水速率。而邊界條件（透水邊界及不透水邊界）之處理方式亦與多井系統相等。

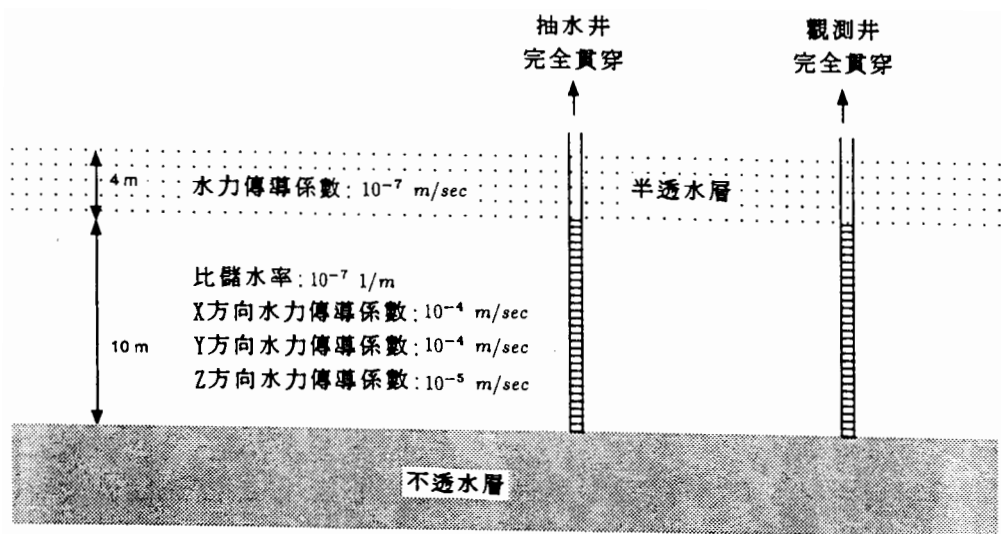


圖 3-1 滲漏含水層示意圖

表 3-1 模式運算值與 Hantush[1964] 無因次參數之比較

u	$r\sqrt{\nu} = 0.01$		$r\sqrt{\nu} = 0.5$	
	本 模 式 $W(u, r\sqrt{\nu})$	Hantush[1964] $W(u, r\sqrt{\nu})$	本 模 式 $W(u, r\sqrt{\nu})$	Hantush[1964] $W(u, r\sqrt{\nu})$
0.200000D+00	1.2226	1.2226	1.0592	1.0592
0.100000D+00	1.8227	1.8227	1.4422	1.4422
0.400000D-01	2.6807	2.6807	1.7603	1.7603
0.200000D-01	3.3536	3.3536	1.8379	1.8379
0.100000D-01	4.0356	4.0356	1.8486	1.8486
0.400000D-02	4.9421	4.9421	1.8488	1.8488
0.200000D-02	5.6271	5.6271	1.8488	1.8488
0.100000D-02	6.3069	6.3069	1.8488	1.8488
0.400000D-03	7.1859	7.1859	1.8488	1.8488
0.200000D-03	7.8192	7.8192	1.8488	1.8488
0.100000D-03	8.3983	8.3983	1.8488	1.8488
0.400000D-04	9.0102	9.0102	1.8488	1.8488
0.200000D-04	9.2961	9.2961	1.8488	1.8488
0.100000D-04	9.4176	9.4176	1.8488	1.8488
0.400000D-05	9.4422	9.4422	1.8488	1.8488
0.200000D-05	9.4425	9.4425	1.8488	1.8488
0.100000D-05	9.4425	9.4425	1.8488	1.8488
0.200000D-06	9.4425	9.4425	1.8488	1.8488

三、模式驗證及應用

3-1 模式驗證

本模式將 Stehfest 及 FHT 數值法應用於非拘限含水層之情況，其準確性已由 Chen et al. [1993] 驗證。在此僅就滲漏含水層之部分作驗證。假設一滲漏含水層如圖 3-1 所示，經模式運算後，其無因次洩降值 ($W(u, r\sqrt{v})$) 列於表 3-1，並與 Hantush [1964, pp.322-324] 之無因次洩降值作一比較。由表中可知其值完全相同。因此，模式亦可應用於滲漏含水層洩降分佈之計算及預測。

3-2 模式應用

模式應用部分依據第二章模式演算之結果，選擇不同水力情況之參數值代入模式中，以說明模式之實用性。下列三個例題皆假設飽和含水層厚度為 10m，水力傳導係數 $K_x = 10^{-4} \text{ m/s}$ 、 $K_y = 10^{-4} \text{ m/s}$ 、 $K_z = 10^{-5} \text{ m/s}$ ，比儲水率為 10^{-1} m ，抽水井為部分貫穿含水層，濾水管設置位置自含水層與半透水層交界向下 3m 至 8m 處 ($d = 3 \text{ m}$ ， $l = 8 \text{ m}$)。

例題一、滲漏含水層之應用

一滲漏含水層之上端為一厚度 1m 之半透水層，其水力傳導係數為 10^{-6} m/s ，下端為一不透水層。抽水井與觀測井之相對位置為一觀測井在抽水井東方相距 10m 處，另一觀測井在抽水井北方相距 10m 處。設置型式為：抽水井東方之觀測井為部分貫穿含水層、濾水管設置位置自含水層與半透水層交界向下 3m 至 8m 處 ($d_0 = 3 \text{ m}$ ， $l_0 = 8 \text{ m}$)，北方之觀測井為量測自含水量與半透水層交界向下 5m 處之固定深度壓力 ($z = d_0 = l_0$)。抽水井之抽水速率為 $2.2716 \text{ m}^3/\text{hr}$ 。當連續抽水 2778 小時後，其洩降分佈如圖 3-2(a) 及 3-2(b) 所示。

圖中並與相同水力條件之拘限含水層作一比較，可知使用抽水試驗量測拘限含水層之洩降分佈時，若含水層上端為一半透水層，則對含水層產生一補注，造成洩降的減小且逐漸趨近一定值，此時抽水量與補注量相等。當抽水時間愈大時，抽水井部分貫穿含水層對洩降之影響趨近於定值。而洩降分佈由於抽水井部分貫穿含水層對洩降之影響，使得洩降值大於泰斯解。

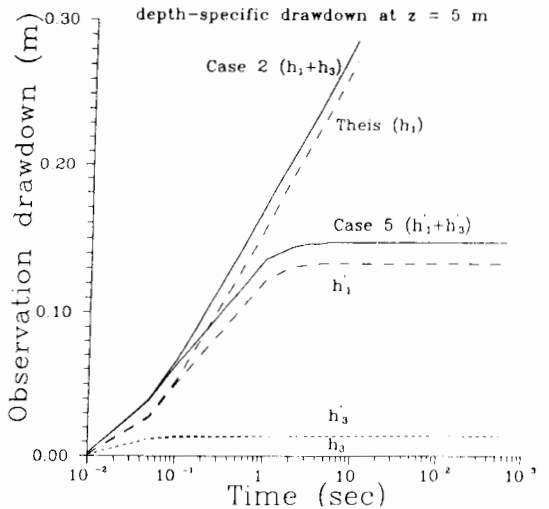


圖 3-2(a) 滲漏含水層觀測井量測固定深度之洩降分佈

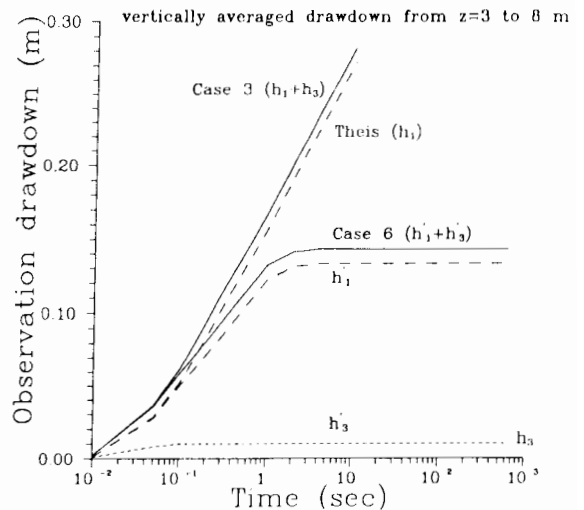


圖 3-2(b) 滲漏含水層觀測井量測平均深度之洩降分佈

例題二、非拘限含水層之應用

一水力情況為非拘限含水層，其下端為一不透水層。抽水井與觀測井之相對位置為一觀測井在抽水井東方相距 10m 處，另一觀測井在抽水井北方相距 10m 處。設置型式為：抽水井東方之觀測井為部分貫穿含水層、濾水管設置位置自含水

層與半透水層交界向下 3m 至 8m 處 ($d_0=3m$, $l_0=8m$)，北方之觀測井為量測自含水層與半透水層交界向下 5m 處之固定深度壓力 ($z=d_0=l_0$)。抽水井之抽水速率為 $2.2716m^3/hr$ 。當連續抽水 2778 小時後，其洩降分佈如圖 3-3(a) 及 3-3(b) 所示。

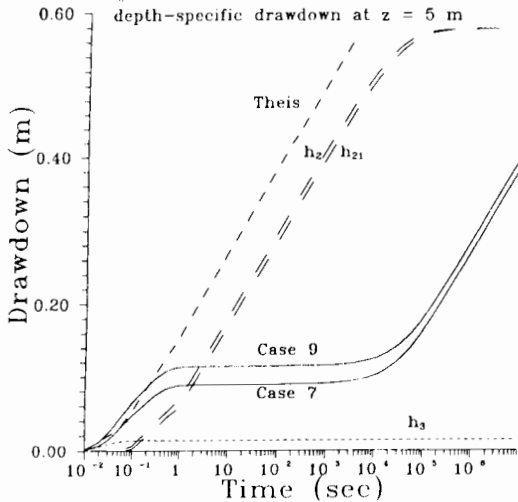


圖 3-3(a) 非拘限含水層觀測井量測固定深度之洩降分佈

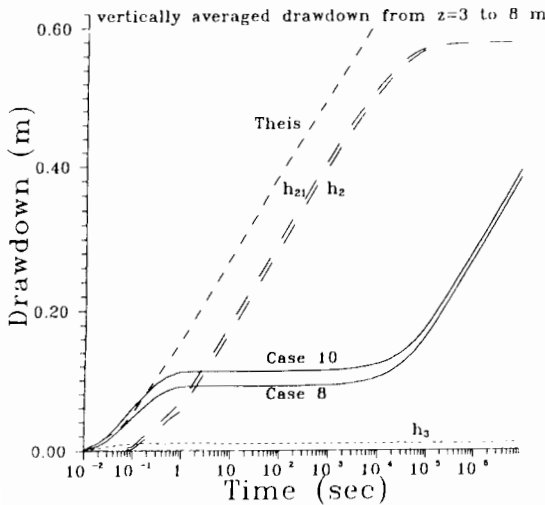


圖 3-3(b) 非拘限含水層觀測井量測平均深度之洩降分佈

圖中並與相同水力條件之拘限含水層作一比較，可知使用抽水試驗量測非拘限含水層之洩降分佈時，其洩降曲線如同一 S 曲線，此乃延遲排水

(delay yield) 之影響。當開始抽水時大孔隙中之水會先排出，而後小孔隙中之水藉由重力影響緩緩排出，因此對飽和含水層產生一補注，造成洩降的減小且逐漸趨近一定值，此時抽水量與補注量相等，當所有孔隙水皆排出後，洩降便持續地增加。由圖中亦可得知：(1) 當時間愈大時，地下水水位變動對洩降分佈之影響與抽水井部分貫穿含水層對洩降之影響趨近於定值，且時間與洩降之分佈關係平行於泰斯解。(2) 當抽水時間很短時，可忽略地下水水位變動對洩降分佈之影響。因此，模式中 Case 7 及 Case 8 抽水井完全貫穿含水層時，洩降分佈在最初時段與泰斯解相符，而 Case 8 及 Case 10 中，抽水井部分貫穿含水層時，洩降分佈由於抽水井部分貫穿含水層對洩降之影響，使得洩降值大於泰斯解。(3) 在任何時段，地下水水位變動對洩降分佈之影響 (h_2 , h_{21} , $\bar{h}_2$, 及 $\bar{h}_{21}$) 變化較小。

例題三、邊界條件與變動抽水速率於非拘限含水層之應用

一水力情況為非拘限含水層，其下端為一不透水層。抽水井與觀測井之相對位置為觀測井在抽水井東方相距 10m 處。設置型式為：觀測井為部分貫穿含水層、濾水管設置位置自含水層與透水層交界向下 3m 至 8m 處 ($d_0=3m$, $l_0=8m$)。抽水井之抽水速率為抽水開始後 27.78 小時以內為 $2.2716m^3/hr$ ，27.78 小時以後抽水速率變為 $1.1358m^3/hr$ 。而距離抽水井北方 10m 處有一不透水層邊界，其平行於抽水井與觀測井之連線。當連續抽水 2778 小時後，其洩降如圖 3-4 所示。

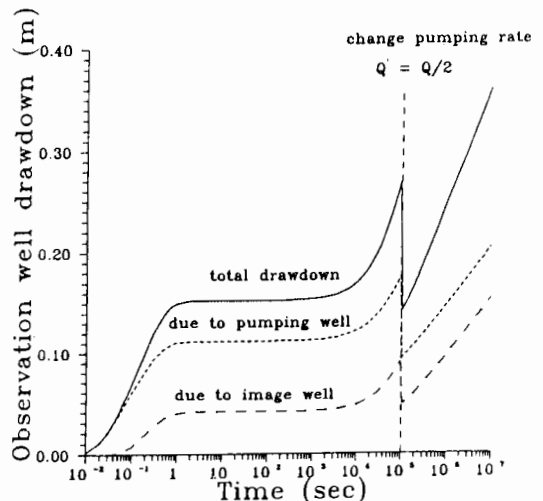


圖 3-4 變動抽水速率及邊界條件下之洩降分佈

由圖可知，洩降分佈於 27.78 小時以後驟減，此及抽水速率改變之結果。而由於抽水井正北方相距 10m 處不透水層之影響，始得洩降較相同水力條件但無透水層邊界之洩降為大。

由上述不同水力情況之應用可知，本模式適用之範圍不僅包含了拘限、非拘限以及滲漏等含水層，更可應用於邊界條件及變動抽水速率等問題。

四、結 論

由上述可知，水井水力學解在 Laplace 與 Hankel 區域上之運算的確為快速且精確之方法。根據 Neuman [1974] 三維非拘限含水層水井水力學解在 Laplace 與 Hankel 區域上運算之結果，可得到三組有意義之組合：抽水井完全貫穿含水層之解，地下水水位變動對洩降分佈之影響，以及抽水井部分貫穿含水層對洩降之影響等。其中地下水水位變動及抽水井部分貫穿含水層對洩降之影響在長時間時將趨近於穩定狀態，而抽水井完全貫穿含水層之解則不會趨近於穩定態。本模式建立之電腦模式可經由輸入參數值，有效地計算不同水力情況下水井力學解在 Laplace 與 Hankel 區域上之運算，以達到廣泛應用之目的。

由於地下水資源之開發及利用、或是地下水污染之整治工作，皆須仰賴水井水力學之基礎。因此如能建立一套完整系統，使得參與地下水相關事項工作者，能迅速而有效地求得抽水後之洩降分佈及水文地質參數，使得決策者能依據其結果作一綜合之研判，以求得最佳之處理方式。本模式結果之驗證具有一定之準確性，將可做為日後地下水工作之基礎。

參考文獻

1. Theis, C. V., "The Relation Between the Lowering of the Piezometric Surface and the Rate and Duration of Discharge of a Well Using Groundwater Storage," Trans. Amer. Geophys. Union, Vol. 16, pp.519-524 (1935).
2. Hantush, M. S. "Drawdown Around a Partially Penetrating Well," Proc. Am. Soc. Civ. Engrs., 87 (HY4), pp.83-98 (1961).
3. Boulton, N. S., "The Drawdown of the Water Table Under Nonsteady Conditions Near a Pumped Well in an Unconfined Formation," Proc. Inst. Civ. Engr., Part 3, pp.564-579 (1954).
4. Neuman, S. P., "Theory of Flow in Unconfined Aquifers Considering Delayed Response of the Water Table," Water Resour. Res., 8(4), pp.1031-1044 (1972).
5. Neuman, S. P., "Effect of Partial Penetration on Flow in Unconfined Aquifers Considering Delayed Gravity Response," Water Resour. Res., 10(2), pp.303-312 (1974).
6. DeGlee, G. J., "Over Groundwaterstromingen bij Wateronttekkings Door Middle van Putten," T. Waltman, Jr., Delft (1930).
7. Hantush, M. S., "Hydraulic of Wells in Advances in Hydrosoci.," ed. V. T. Chow, 1, pp.281-432(1964).
8. Streletsova, T. D., "Well Testing in Heterogeneous Formations," an Exxon Monograph, John Wiley, 413 pp (1987).
9. Kruseman, G. P. and Deridder, N. A., "Analysis and Evaluation of Pumping Test Data," 2nd Ed., ILRI, Wageningen, Netherlands, 337pp (1990).
10. Rolfes, L., "A Numerical Method for the Calculation of the Average Drawdown in a Fully Penetrating Observation Well in an Unconfined Aquifer," Water Resour. Res., 16(5), pp.887-890 (1980).
11. Moench, A. F., "Analysis of Constant Discharge Wells by Numerical Inversion of Laplace Transform Solutions," in Groundwater Hydraulics (J. S. Rosenzhein and G. D. Bennett, eds.), Water Resources Monograph Series 9, AGU, Washington, D. C., pp.146-170 (1984b.)
12. Chen, C. S., "Analytical and Approximate Solutions to Radial Dispersion from an Injection Well to a Geological Unit with Simultaneous Diffusion into Adjacent Strata," Water Resour. Res., 21(8), pp.1069-1076 (1985).
13. Stehfest, H., "Algorithm 368 Numerical Inversion of Laplace Transforms," Commun. ACM, 13(1), pp.47-48 (1970).

14. Chen, C. S., C. Holmes, W. Li. D. Chace, M. Fort, J. He, and J. Liu, "Determination of Three-Dimensional Aquifer Anisotropy of an Unconfined Aquifer Under Partially Penetrating Pumping Conditions," WRI Report No. 279, 209pp., New Mexico Water Resources Research Institute, (1993).
15. Anderson, W. L., "Numerical Intergration of Related Hankel Transforms of Orders 0 and 1 by Adaptive Digital Filtering," *Geophysics*, 44(7), pp.1287-1305 (1979).
16. Anderson, W. L., "Fast Hankel Transforms Using Related and Lagged Convolutions," *ACM Transactions on Mathematical Software*, 8(4), pp.344-368 (1982).
17. Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M., "Tables of Integrals, Series, and Products," Academic Press, pp. 1160 (1980).
18. Oberhettinger, F. and Badii, L., "Tables of Laplace Transforms," Springer-Verlag, pp.428 (1973).

收稿日期：民國 85 年 8 月 10 日

修正日期：民國 85 年 9 月 16 日

接受日期：民國 85 年 10 月 3 日

(上接第 47 頁)

區域性，未來可以對台灣幾個較大的灌溉區域，分別著手進行可挪用率的研究，推求地區性可挪用率之範圍，則決策者也可以根據這些資料，更妥善運用台灣有限的水資源，做出正確的決策，並使乾旱期間之有限水資源得以充分利用，並且降低對農業之衝擊。

參考文獻

1. 甘俊二，"灌溉系統配水技術之分析與研究"，台大農工系，(1979)。
2. 甘俊二、湯松義，"烏山頭水系灌溉配水計畫與農業用水量推估之有關研究"，農業工程研究中心，台大農工系，嘉南農田水利會，P62 ~ 77，P36 ~ 41，(1975)。
3. 林俊男，"地理資訊系統應用於乾旱期安排停頓順序之研究"，國立台灣大學農業工程研究所，P12 ~ 13，(1993)。
4. 易任、王如意、金紹興、徐享崑，"台灣集水區乾旱週期性及乾旱模式之研究"，台灣大學農工系，(1979)。
5. 施嘉昌、徐玉標、曹以松、甘俊二，"灌溉排水原理"，中央圖書出版社，P168 ~ 175，P198 ~ 213，(1984)。
6. 章建勛、甘俊二、湯松義，"烏山頭水系配水計畫有關研究"，農業工程研究中心，台大農工系，嘉南農田水利會，P21 ~ 23，(1973)。
7. 陳明燦，"德國農業政策與農地休耕之探討"，農業金融叢論，30：529 ~ 551，(1993)。
8. 陳買，"水稻栽培灌溉排水原理"，台灣省水利局，(1977)。
9. 陳再添，"稻田休耕之執行與檢討"，台灣農業，26(4)：61 ~ 64，(1990)。
10. 梁星會，"因應農業環境變遷農業用水的調適探討"，農田水利，38(3)：43 ~ 50，(1991)。
11. 楊景淋、謝金佑，"因應農業環境變遷農業用水的調適探討"，農田水利，38(1)：48 ~ 53，(1991)。
12. 農復會，"學甲旱作灌溉試驗報告"，農復會，(1976)。
13. 蔡明華，"由春旱談農業用水之營運管理"，農田水利，39(6)：22 ~ 26，(1992)。

收稿日期：民國 85 年 8 月 14 日

修正日期：民國 85 年 9 月 14 日

接受日期：民國 85 年 11 月 6 日