

三維真實流場之數值模擬研究

Numerical Simulation of Three-Dimensional Viscous Flow

淡江大學水資源及環境工程研究所教授 淡江大學航空工程學系講師 淡江大學水資源及環境工程研究所碩士

曾 振 遠
Cheng-Yuan Tseng

李 世 鳴
Shi-Min Lee

謝 昆 良
Kuen-Liang Shieh

摘 要

本研究利用 Marker-and-Cell (MAC)，配合非均勻網格，以速度、壓力為主要變數，使用顯性有限差分直接求解 Navier-Stokes 方程組，建立三維不可壓縮黏滯層流數值模式。其中對流項採用上風權重差分法，黏滯項則使用中央差分，最後利用壓力差值修正速度及壓力修正量。

為驗證模式之正確性及探討實際應用的可行性，文中針對不可壓縮黏滯層流流經方柱流場進行三維數值模擬，主要探討尾流形成區之流場形態、方柱受力情形及底部邊界影響；模擬結果發現底床邊界對此不穩定流場造成極大之影響，當邊界層與方柱尾流漩渦群交互影響，造成流場向上發展之趨勢，並使得尾流漩渦群產生扭曲之三維運動情形；且流體在流經障礙物時於障礙物底部前產生馬蹄形漩渦 (Horseshoe vortex)，其旋轉中心即為流體流動之奇異點 (A three-dimensional singular point)，此一漩渦可能造成障礙物底部掏蝕之現象。

關鍵詞：MAC 差分法，交錯格點，馬蹄形漩渦，漩渦群。

ABSTRACT

In this study we have established a numerical simulation of three-dimensional viscous flow. The explicit time dependent finite-difference method which based on the Marker-and-Cell technique and nonuniform mesh to solve the Navier-Stokes equations. We employed the methods of weighted-upwind difference for convective terms and central difference for viscous terms. The pressure correction method was used to obtain the velocities and pressure which satisfied the divergence-free constrained.

The numerical study of incompressible viscous laminar fluid flow past a square cylinder is presented. The vortex shedding and the drag force of the square cylinder are discussed particularly. The computed result shows the wall effect and vortex shedding interaction and produces complicated three-dimensional flow pattern, the streaklines and cross-flow velocity fields demonstrate the development of this motion. The velocity profiles indicated the bound-

ary layer and vortex street developments. According to this study we have found the center of the horseshoe vortex is a three-dimensional singular point and it may produce erosion in the bottom of the hydraulic structures.

Keywords : Marker-and-cell, Stagger-Grid, Horseshoe vortex, Vortex Street.

一、前言

1950年電晶體的發明，使得電腦處理複雜事物的能力大增，於是利用數值模擬之計算流體力學(Computational Fluid Dynamics, CFD)蓬勃發展，利用數值分析方法直接求解 Navier-Stokes 方程式之研究陸續推出，造成了近代流體力學研究之主流。

以往由於受限於計算機速度與記憶體等硬體之限制，故當時之研究方向以數值方法的發展，及一般二維流場模擬為主。The Los Alamos Scientific Laboratory 即為當時顯著之代表，許多計算流體力學先期工作及著名之數值方法皆由此所發展[3]。

近年來，由於小型超級電腦工作站、大型高速電腦的相繼發展，大大提高了計算機運算能力及記憶容量，故對於複雜三維流場模擬不再是遙不可及。發展三維數值模擬也成了近年來計算流體力學主要努力之方向，由此更使得計算流體力學之發展更具實用性。

一般計算流體力學模擬流場之方法可概分為兩種[4,5]，一是以流函數(stream function)及渦度值(vorticity)為主要變數，經求解後，再利用其與速度之關係解得速度項；此法之優點是控制方程式本身即已滿足連續方程，且可以模擬高雷諾數(Reynold Number)之流況，但其缺點為邊界處理不易，且不適用複雜流況，更不能擴展為三維流場。另一方法則是以速度、壓力為主要變數，再直接求解 Navier Stokes 方程式；此法克服了上述方法之缺點，而且具有邊界處理容易及易於擴展至三維之優點，但其缺點為無法適用於高雷諾數流場。而本研究主要針對層流流況，故採用此種方法，據以建立三維層流數值模式。

流體流經鈍狀障礙物(bluffbody)之流況，是流體力學中古老、基本而又重要的問題，其包含了

種種基本的物理現象。其所應用之流況在日常生活中更是觸目可見，諸如橋墩等水工構造物、佇立的高樓、急駛中的汽車、飛行中的飛機等等皆是；故針對此種流況之研究，至今仍引起廣泛的注意，但一般的研究中皆以圓柱為主，而針對方柱之研究則有如鳳毛麟角。故本研究以方柱流場進行探討，期使對此種流況能有更深入的了解。

二維數值模擬只能得到流場局部分分析和平面變化之特性，因此對於真實之複雜三維流況，未能做有效模擬分析，更無法適切的表達真實流況，而三維數值模擬克服了二維分析之缺點，其不但能有效模擬複雜三維流況，更兼具了經濟、省時、簡易等優點，故近年來計算流體力學之研究莫不以此為目的。然優良三維數值模式的建立並不容易，其首先須克服許多的困難，諸如大量的數值運算非一般個人電腦所能負荷，須有高速計算機及大量記憶空間的配合，並須適當的選擇數值方法以加快數值收斂速度，更須藉助優良繪圖軟體以展現結果。

本研究嘗試建立三維數值模式，經由模擬結果驗證了其與二維數值分析之差異；當流況結合尾流區與底床邊界層之交互作用，此時流場具有三維運動之複雜現象，由結果可看出其模擬情形與真實流況相近，而對於複雜流場中之物理現象亦有良好之詮釋，由此足可證明三維數值模擬之重要性及可行性。

註：[]表示引用參考文獻

二、理論基礎

應用數值分析模擬流場時，首先需了解流場之特性，並選擇適當的控制方程式，方能據以建立優良之數值模式，以對流場作妥切的模擬；本文主要模擬流場，為一三維非穩態不可壓縮黏滯流場，故其流動需滿足那威爾-史托克方程式(Navier-Stokes equations)，及連續方程式(Continuity

equation)。

爲了簡化上述之控制方程式的變數及方便運算，應用動力相似理論 (dynamically similar)，利用特性參考尺度，將控制方程式無因次化 (dimensionless) 如下：

1. 動量方程式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

2. 連續方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

式中： $Re = \frac{UD}{\nu}$

三、差分方程式

本研究主要應用 **Marker-and-Cell (MAC)** 法，以速度、壓力爲主要變數，再以有限差分直接求解 Navier-Stokes 方程式。MAC 法由 Harlow 和 Welch 等人於 1965 年發展而成 [6,7]，主要應用於非穩態、不可壓縮、黏滯且具自由表面之流體，此法直至目前爲止仍被廣泛的應用於各種數值模擬研究中。

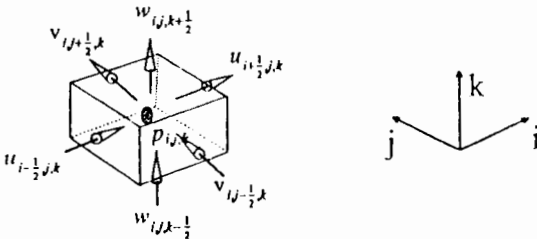


圖 3-1-3 計算晶格

3-1 計算晶格

本研究採用交錯格點 (Stagger-Grid) [8]，其晶格內配置爲速度位於晶格之六個面上，而壓力則位於晶格之中心點，此晶格之優點有以下幾種：

- (1) 不會產生壓力振動之現象。
- (2) 晶格中滿足能量守恆。
- (3) 處理邊界容易。
- (4) 程式選寫容易。

3-2 動量差分方程式

本文利用有限差分 (Finite difference)，直接求解動量方程式，其對式中各項差分方法如下：

1. 時間項：前向差分 (Forward difference)。

2. 對流項：上游權重差分 (Weighted Upstream difference)，式中使用 α 爲權重因子，當

$$\begin{cases} \alpha = 0 & \text{爲中央差分 (Central difference)} \\ \alpha = 1 & \text{爲上風法 (Upwind method)} \end{cases}$$

3. 壓力項：中央差分 (Central difference)。

4. 黏滯項：中央差分。

根據以上之差分法，可將無因次 Navier-Stokes 方程式，改寫成如下之差分式：

$$\begin{aligned} u_{i,j,k}^{n+1} &= u_{i,j,k}^n + \delta t \left[- \left(\frac{P_{i+1,j,k}^{n+1} - P_{i-1,j,k}^{n+1}}{\delta x_{i,j,k}} \right) - FUX - FUY - FUZ + VISX \right] \\ v_{i,j,k}^{n+1} &= v_{i,j,k}^n + \delta t \left[- \left(\frac{P_{i,j,k+1}^{n+1} - P_{i,j,k-1}^{n+1}}{\delta y_{i,j,k}} \right) - FVX - FVY - FVZ + VISY \right] \\ w_{i,j,k}^{n+1} &= w_{i,j,k}^n + \delta t \left[- \left(\frac{P_{i,j,k+1}^{n+1} - P_{i,j,k-1}^{n+1}}{\delta z_{i,j,k}} \right) - FWX - FWY - FWZ + VISZ \right] \end{aligned}$$

$$\text{式中：} \quad \delta y_{i,j,k} = \frac{1}{2} (\delta y_j + \delta y_{j+1})$$

$$\delta x_{i,j,k} = \frac{1}{2} (\delta x_i + \delta x_{i+1})$$

$$\delta z_{i,j,k} = \frac{1}{2} (\delta z_k + \delta z_{k+1})$$

$$FUX, FUY, FUZ = u \frac{\partial u}{\partial x}, v \frac{\partial u}{\partial y}, w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$FVX, FVY, FVZ = u \frac{\partial v}{\partial x}, v \frac{\partial v}{\partial y}, w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$FWX, FWY, FWZ = u \frac{\partial w}{\partial x}, v \frac{\partial w}{\partial y}, w \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$VISX = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$VISY = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$VISZ = \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

3-3 壓力修正差分式

由於 Navier-Stokes 為三式聯立，但需求解之未知數有四個 (u,v,w,p)，故須將連續方程式經過轉換以解得壓力項，並藉此壓力值來修正速度項 [8]。

首先假設壓力項改變量可表示如下：

$$P_{ijk}^{n+1} = P_{ijk}^n + \delta P_{ijk}$$

利用顯性差分式，依疊代原理求得之任意晶格速度值 (u,v,w)ⁿ⁺¹，仍需滿足連續方程，其可表示如下：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^{n+1} = 0 \quad (4)$$

經轉換可將連續方程轉變為一卜松方程式 (Poisson's equation)，據此便可解得壓力項改變量，為了加速收斂，引進超鬆弛法 (Successive Over-relaxation Method, SOR) [9]，其可表示如下：

$$\delta P_{ijk} = \frac{-\omega D}{2\delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)} \quad (5)$$

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

ω ：超鬆弛係數

故經修正後速度值，其差分式可表示如下：

$$\begin{cases} u_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} = u_{i+\frac{1}{2},j,k}^n + \delta t \frac{\delta P_{ijk}}{\delta x_i} \\ v_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} = v_{i,j+\frac{1}{2},k}^n + \delta t \frac{\delta P_{ijk}}{\delta y_j} \\ w_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} = w_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n + \delta t \frac{\delta P_{ijk}}{\delta z_k} \end{cases} \quad (6)$$

四、流場模擬

4-1 拉板掏穴流場

在計算流體力學中，為了驗證數值模式之準確性及收斂情況，往往先選用某些特殊流場進行模擬，以了解數值模式之特性並做為模式未來應用、發展、修正之基礎；一般被視為標準之測試流場者諸如：拉板掏穴 (Driven Cavity)、突張管、分岐管路…等，本文因三維數值模式之運算，故選用標準之拉板掏穴流場作為先期模擬驗證之

用。

拉板掏穴為一封閉且穩定之流場，其中並無質量之進出，流場流動完全由流體黏滯性所影響，且其邊界簡單、對稱，故易於驗證數值方法之正確性與收斂模式；本文中所模擬之拉板掏穴雷諾數為 1000。

經過本數值方法模擬結果，得到驗證流場正確性與程式收斂情況。以下便將本模式對拉板掏穴流場所得結果表示如圖 4-1-2 至圖 4-1-5，經與 Vanka(1985)[10]，利用多重網格法 (Multigrid method)，對此流場之三維數值研究結果比較；由圖 4-1-1 可看出，由於本文所取之網格於邊界附近較密，故對於流場邊界部分模擬更為顯明、精確並充分掌握三維流場效應，成功的捕捉到發生在角落之流場迴流現象。

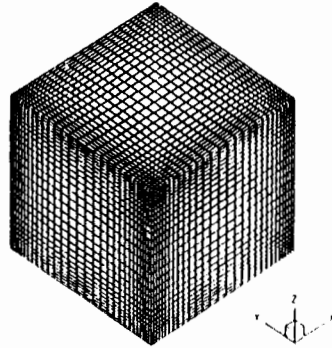


圖 4-1-1 拉板掏穴流場網格 (29 × 29 × 29)

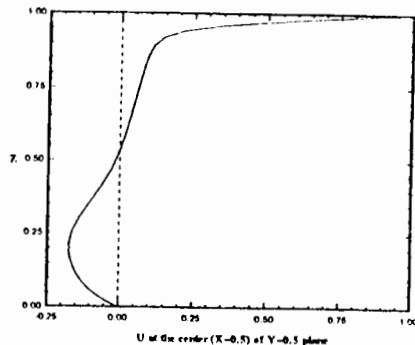


圖 4-1-2 拉板掏穴 Y = 0.5 之 X-Z 平面上中間直軸 U 速度分佈

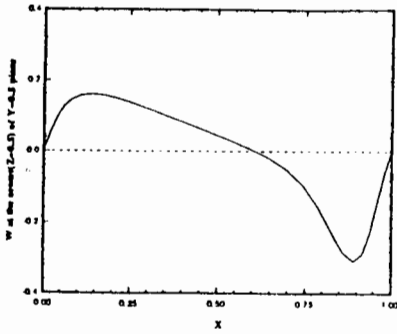


圖 4-1-3 拉板掏穴 $Y = 0.5$ 之 X - Z 平面上中間水平軸 W 速度分佈

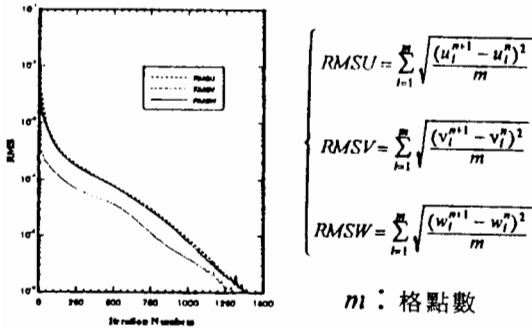


圖 4-1-4 拉板掏穴流場數值收斂情形

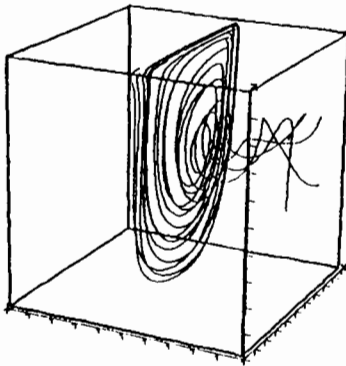


圖 4-1-5 拉板掏穴流場煙線圖

4-2 均勻流流經方柱流場

此流場為本研究主要探討之主題，其模擬的流況可概分為二：一為無限延伸對稱流場，另一

則為具底床邊界之流場；在計算的過程中，首先假設流場起始為一均勻流況 (uniform flow)，而由於障礙物之存在造成流動分離，並產生擾動形成尾流區，此干擾往兩側及上游傳遞為有限值，但其尾流區將繼續往下游傳遞至無窮遠處 [1,2,11]，故於計算時除了須有足夠大的下游計算區間，更須仰賴良好的邊界控制，才能有效的模擬此流況。

本研究為了兼顧有效率的計算機時間，並且精確的模擬流場特性，在參考前人之研究 [12, 13]，並針對流場特性經連續測試後，選定了如下之幾何邊界，作為數值模擬之區域，並將方柱置於距入口 $3D$ 位置，使得流場能充分發展完成，儘量減少人為邊界之影響，期使能獲得更有效及精確之模擬。

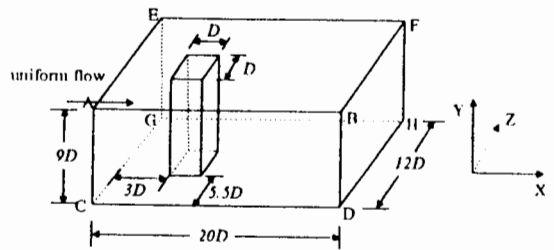


圖 4-2-1 均式流流經方柱流場示意圖

五、結果與討論

本研究針對均式流流經方柱流場進行三維數值模擬，其流況有二：一為無限延伸對稱流場，其所模擬之雷諾數包括 100、150 及 250，文中主要探討其史脫荷數 (Strouhal Number) 與雷諾數及曳力係數 (Drag coefficient) 間之關係，並分析方柱受力情形，以及尾流形成區之流場形態，最後以等壓力圖、等渦度值圖來表示此流況。其二為具底床及上對稱軸之流場，所模擬之雷諾數為 100 及 150，文中主要探討底床邊界對此不穩定流場之影響及其發展情形，由於此複雜流況以二維平面圖不足以說明，故嘗試以煙線圖 (streak line) 來表示渦流變化，以及三維二次流 (Secondary flow) 等值圖表示流場，最後輔以速度剖面圖以觀察細部流

場變化。

5-1-1 無限延伸對稱流場

此流況即假設其為無限延伸廣大流場中的部分，上下兩邊已不受自由表面與底床之影響，為一完全發展流況，其結果在理論上應與二維模擬所得相近，即其流場在 Z 方向中每一平面流況皆相同，但其已擴展為三度空間之流況，故其結果應更近似於真實流況。

分析方柱後尾流區之頻率特性，一般使用史戴荷數 [14]，其定義如下：

$$s = \frac{fD}{U}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

- 式中， f ：頻率
 D ：特徵長度（方柱寬）
 U ：均勻流速
 T ：分離週期

在運算過程中，由曳力係數及速度收斂情況，皆可得到漩渦之分離週期，據此即可求得史戴荷數；表 5-1-1 即為不同雷諾數下之週期、史戴荷數、曳力係數值之比較表，由表中可看出當雷諾數增大，則史戴荷數及曳力係數值皆隨著增加，此一趨勢與 Davis 與 Moore(1982)[13] 所得二維數值模擬結果比較如表 5-1-2，其結果相當吻合。

由表中可看出本研究結果不但在趨勢上吻合，更在週期、史戴荷數與曳力係數上得到相當不錯之結果。經過與前人研究比較，證明了本模式之準確性，以下便就本模式數值運算所得結果，作進一步的討論與分析：

表 5-1-1 無限延伸對稱流場週期、史戴荷數、曳力係數值比較表

雷諾數 (Re)	週期 (T)	史戴荷數 (S)	曳力係數 (Cd)
100	7.8	0.13	1.73
150	7.43	0.14	1.76
200	7.35	0.14	1.82
250	7.25	0.14	1.87

表 5-1-2 數值模擬結果比較表

Re	Domain*	Grid	S**	Cd***	Author
100	15*12	41*40	0.15	1.64	Davis et al. [13]
	20*12	65*61	0.14	1.49	吳村木等 [12]
	20*12*9	52*42*32	0.13	1.72	Present
250	15*12	41*40	0.16	1.76	Davis et al. [13]
	20*12	65*61	0.14	1.64	吳村木等 [12]
	20*12*9	52*42*32	0.14	1.86	Present

- 註：* 計算區域
** 史戴荷數
*** 曳力係數

1.數值收斂判斷

在數值運算的過程中，由於此流況為上下均勻對稱之流場，故選取垂直軸一半之平面為參考面，並在此平面上位於方柱約三倍方柱長處，選擇四個參考點，經由此四個參考點之速度與時間變化，可明顯看出，當雷諾數愈大，則收斂速度愈快；而由速度振盪情形可發現，愈接近方柱之參考點，其速度振幅愈大，此乃因漩渦形成後，其往下游傳遞能量、強度皆遞減，故在後面之參考點，其速度變化較小，最後將在足夠遠處回復成均勻流；由模擬結果更可發現四個參考點之速度週期與曳力係數之週期相同，證明了此不穩定流場週期性不隨距離而變，而此週期性是因流動分離，所形成上下交替運動之卡門漩渦群造成。

2.方柱受力情形

由前人研究發現，甚少有人針對方柱四個面的受力情形加以詳細分析，然此四個力乃構成方柱曳力的主要因素。欲探討方柱曳力，首先便需對此四個面上之受力情形加以研究，故本研究將對其作進一步的探討。

由本研究所模擬之結果可知，方柱主要受力來源為上下游兩邊之壓力，而沿流線兩側由流體黏滯性所產生之摩擦剪力非常小，故在構成總曳力時，沿流線兩側之剪應力可忽略掉，此與圓柱

流場有很大的差異，因圓柱由於其先天上之幾何形狀造成流動分離點的位置往後延，故在受力分析時，黏滯剪力項之重要性倍增。由圖 5-1-1 中可看出此四個力之週期大小一樣，且與 C_D 及速度之週期一致，但明顯的可發現上下游兩壓力之週期相位一致，而沿流線兩側黏滯剪力則成相位交替狀，此時並可發現，在 $Re > 150$ 時，剪應力之振盪由正至負，此情況在 $Re > 200$ 以後則更明顯，此現象證明了當 $Re > 150$ 時，流體在方柱左邊兩端點發生流動分離後，隨即在方柱上下兩面形成小漩渦，因而造成流體回捲，此現象隨雷諾數增大而更明顯。

根據方柱下游壓力比較可看出，當 $Re > 150$ 時壓力變化逐漸形成二次週期，此乃因 Re 愈大則其尾流形成區距方柱愈近，且漩渦擺動愈大所造成。

3.曳力係數

經由前述障礙物受力分析，可知總曳力主要由方柱上下游兩邊壓力所影響。由圖 5-1-2 可看出，當 Re 愈大時其 C_D 值愈大，且振幅亦隨 Re 增加而增大，此亦驗證了隨著 Re 的增加，渦流分離 (vortex shedding) 將愈加明顯且尾流區擺動愈大，此亦可由流場壓力圖中看出。

4.流況討論

此流場不受上自由表面與底床邊界之影響，其流場發展在垂直 (Z) 軸之變化非常的小，圖 5-1-3 及圖 5-1-4 分別為 $Re = 100$ 和 $Re = 150$ 之二次流 (v,w) 等值面圖，由圖中亦可明顯看出此流場只具二維運動現象，故模擬結果與二維分析相近。圖 5-1-5a 為 $Re = 200$ ， $t = 200$ 之等壓力圖，由圖中可發現方柱右下方之漩渦正在形成，圖 5-1-5b ($t = 204$) 右下方之漩渦已形成並往下游移動，由此時右上方之漩渦則正在形成，到了圖 5-1-5c ($t = 207.3$) 又換成右下方之漩渦正在形成，而右上方之漩渦已形成並往下游移動；如此不斷產生上下交替運動的卡門漩渦群，使得流場呈週期性動態穩定。

5-2 具底床流場

由於此流場具底床邊界之影響，經模擬結果可看出其複雜性，非前述之無限延伸對稱流場所

能比擬，其中包含許多三維複雜之物理現象，此為二維模擬無法解析的，以下將對本研究模擬所得做一說明與討論。

此流場受底部邊界影響，流體因黏滯性而黏附於底床，然隨著邊界層之發展產生一向上之速度 (W)，再加上流體流經方柱所產生流動分離形成之尾流區，造成了此一複雜流場；由圖 5-2-2 及圖 5-2-3 之煙線圖可明顯看出漩渦往上運動發展之情形，此一結果與 Kwak, Chang 等人 [15]，對流經圓柱三維流場所作數值模擬不謀而合。

表 5-2-1 為數值模擬結果，由表中可明顯看出，此流場與無限延伸對稱流場有很大的差異；雖然流場形態隨高度而變，但顯然的從 C_D 平均值之變化可證明此流場仍為週期性流場，經與表 5-1-1 比較可看出具底床流場，由於底部邊界層與方柱後尾流區形成交互作用，造成流場週期變大。

表 5-2-1 具底床影響流場週期、史戴荷數、曳力係數值之比較

雷諾數(Re)	週期(T)	史戴荷數(S)	曳力係數(C _D)
100	8.19	0.12	1.73
150	8.29	0.12	1.74

1.數值收斂判斷

在數值運算的過程中，仍然利用參考面上的參考點速度變化做為收斂判斷的依據，當 $Re = 100$ ，參考點之速度很早即達穩定週期，但 $Re = 150$ 雖很早形成週期性變化，但卻歷時很久才達穩定，此現象亦可由 C_D 值收斂情形看出。

2.曳力係數

圖 5-2-1 為 C_D 值比較，由圖中 C_D 值變化證明此為週期性流場，但其振幅非常小且呈二次週期性變化。

3.流況討論

為針對流場特性，本研究在接近底床部份採用較密網格，結果顯示對於底部邊界層影響有良好之模擬，此可由速度剖面圖得到驗證；流場中邊界層發展受到方柱尾流區影響而產生壓抑作用，造成複雜流況，並迫使漩渦群向上發展，將

此結果與無限延伸對稱流場驗證可知，底床之影響將隨垂直(Z)軸增加而遞減，最後流場形態將與無限延伸對稱流場相同。圖 5-2-4 及圖 5-2-5 為流場二次流 (u,v) 等值面圖，圖中可明顯看出方柱後尾流受底床影響，產生三維扭曲運動現象。

圖 5-2-2 及圖 5-2-3 中之煙線圖，可看出渦流上捲情形，此現象中底床影響將隨高度及 Re 增加而遞減，此與邊界層理論相符；由此情形可知若底床有微小顆粒物質時，將受流場影響而產生漂浮移動。

流體流經方柱時，於接近方柱底部前方即產生馬蹄形漩渦(Horseshoe vortex)，此種現象在 $Re = 100$ 及 $Re = 150$ 皆很明顯，根據 Tobak 和 Peake (1982)[16] 之研究指出，其旋轉中心即為流體流動奇異點(A three-dimensional singular point)；而此一漩渦可能造成障礙物底部掏蝕之現象；又在方柱後速度場明顯成向上發展之 L 型，由此可追蹤到尾流漩渦群隨高度變化之發展情形，當流體接近底部時受到邊界層流之影響，但隨著高度增加則邊界層影響漸小，此時流況由流動分離造成之漩渦群所主導。

根據 X-Y 平面速度剖面圖可看出，流場擺動情形隨高度增加而變大，且其擺動方向亦不盡相同，此點證明了流場尾流具有扭曲之三維運動，且當 $Re = 150$ 可看出其變化更明顯，當高度稍增邊界層影響便遞減，此時尾流擺動即很明顯。

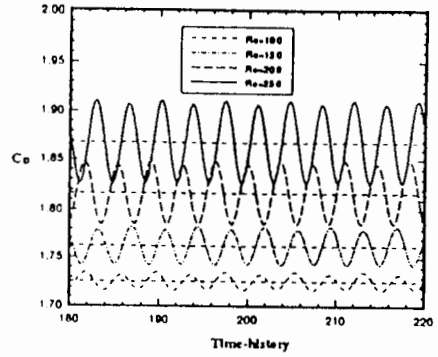


圖 5-1-2 無限延伸對稱流場，方柱曳力係數比較

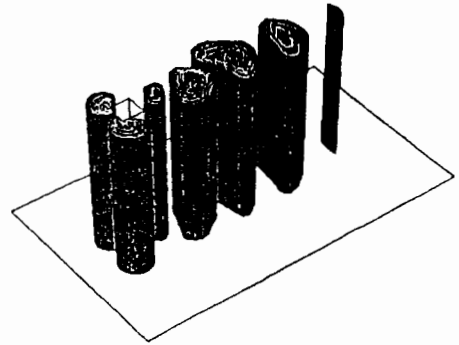


圖 5-1-3 無限延伸對稱流場 ($Re = 100, t = 200$) 二次流 (v,w) 等值面圖

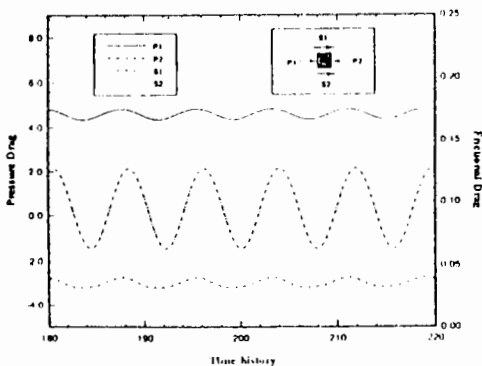


圖 5-1-1 無限延伸對稱流場 ($Re = 100$)，方柱四面受力分析

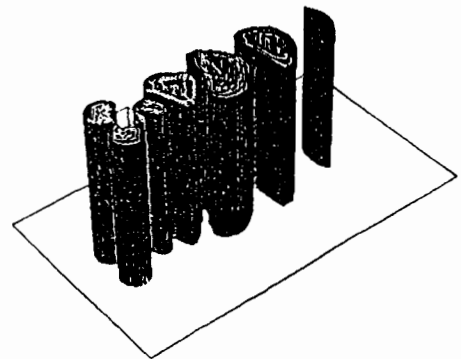


圖 5-1-4 無限延伸對稱流場 ($Re = 150, t = 200$) 二次流 (v,w) 等值面圖

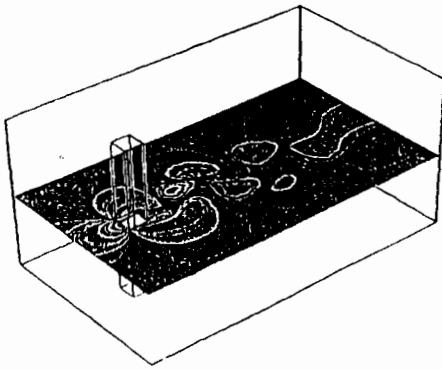


圖 5-1-5a 無限延伸對稱流場 ($Re = 200, t = 200$) 壓力圖

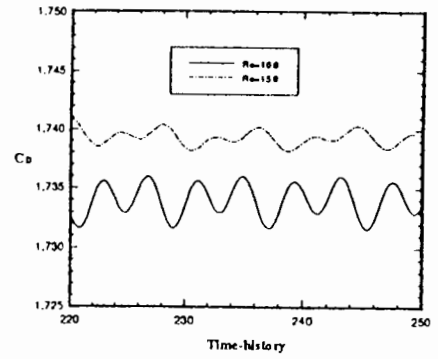


圖 5-2-1 具底床影響流場，方柱曳力係數比較

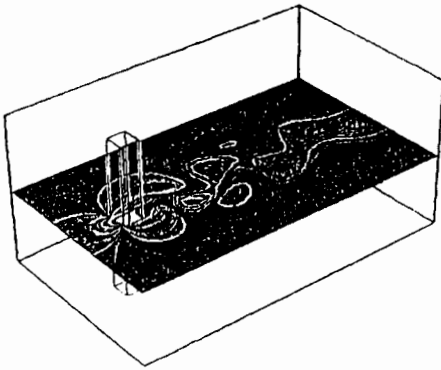


圖 5-1-5b 無限延伸對稱流場 ($Re = 200, t = 204$) 壓力圖

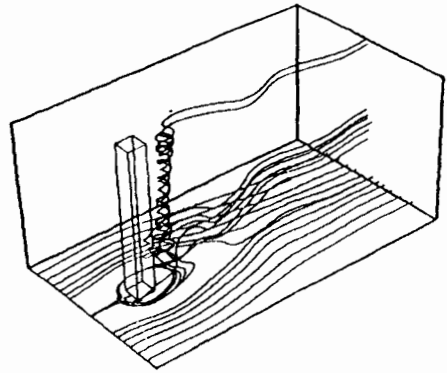


圖 5-2-2 具底床影響流場 ($Re = 100, t = 220$) 煙線圖

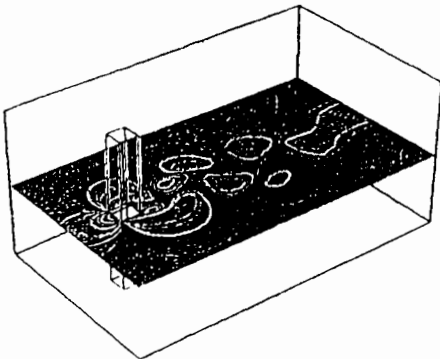


圖 5-1-5c 無限延伸對稱流場 ($Re = 200, t = 207.35$) 壓力圖

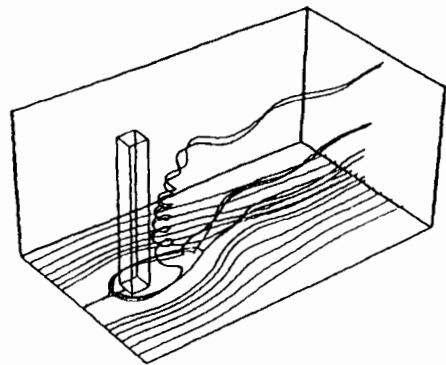


圖 5-2-3 具底床影響流場 ($Re = 150, t = 220$) 煙線圖

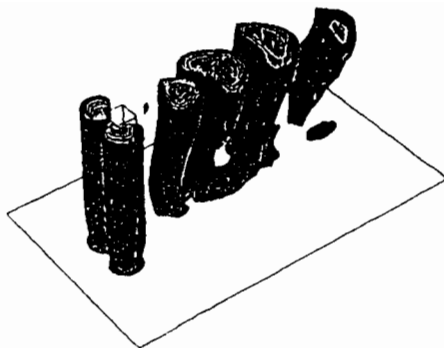


圖 5-2-4 具底床影響流場 ($Re = 100, t = 220$) 二次流 (v, w) 等值面圖

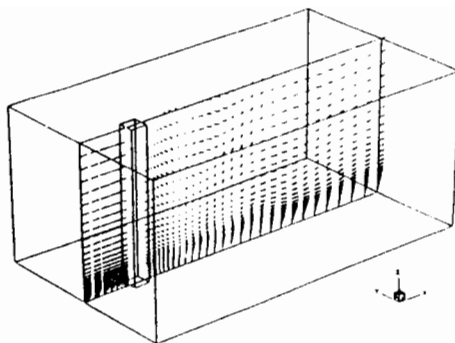


圖 5-2-7 具底床影響流場 ($Re = 150, t = 220$) Y-Z 平面速度剖面圖

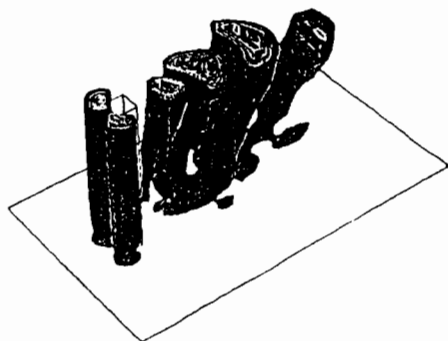


圖 5-2-5 具底床影響流場 ($Re = 150, t = 220$) 二次流 (v, w) 等值面圖

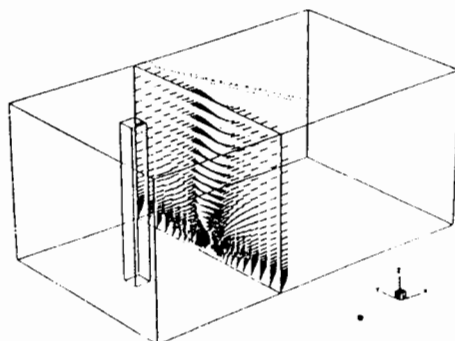


圖 5-2-8 具底床影響流場 ($Re = 150, t = 220$) X-Z 平面速度剖面圖

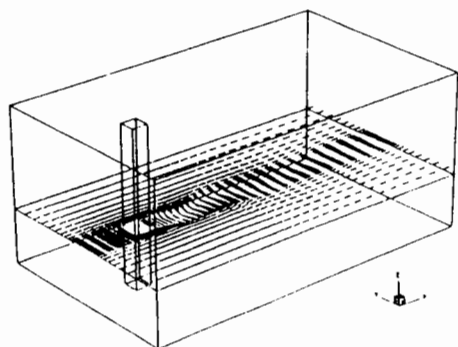


圖 5-2-6 具底床影響流場 ($Re = 150, t = 220$) X-Y 平面速度剖面圖

六、結論與建議

本文旨在經由三維數值模式，提供一簡易、快速、精確且經濟之方法，用以模擬流經方柱之三維複雜物理現象，經綜合以上之研究結果，得到如下之結論與建議。

6-1 結 論

1. 本研究已建立三維數值模式之錐形，並在流場模擬及數值經驗上得到初步的成果；藉由成果的表現，證明了三維數值模式之準確性及實用性，皆非二維流況分析所能比擬。

2. 對於流經方柱之流場，不論在二維或三維之研究上皆未如圓柱流場般完整 [14]。但無可諱言的，此二種流場在許多地方皆有其共通性與一致

性，故在研究上須將兩者加以相互驗證。

3. 本研究模擬發現，不論是無限延伸對稱流場亦或是具底床邊界流場，經由障礙物阻力分析及 C_D 值之探討，皆明顯可看出兩者都為週期性流場；但具底床流場之週期顯然要比無限延伸對稱流場大，此乃因底床之黏滯作用所影響。

4. 邊界層與方柱尾流漩渦群交互作用，使流體產生向上發展之趨勢，並造成漩渦群扭曲之三維運動特性。

5. 流體在流經障礙物時於障礙物底部前產生馬蹄形漩渦，其旋轉中心即為流體流動之奇異點，此一漩渦可能造成障礙物底部掏蝕之現象。

6-2 建議

1. 本模式對於 Navier-Stokes 方程式中之對流項，採用上游權重有限差分，其誤差為一階精度，且對於權重因子之取決難定，故希望能改進並採用更高階之差分方法。

2. 三維數值運算耗時甚巨，故在往後之研究上，若能採用更為快速之計算機，如國家高速電腦中心之高速電腦…等，將可節省大量的時間，並獲得更良好之結果。

3. 在結果的呈現，若能將數值結果藉由電腦技術錄製成動畫，將使得結果更具可看性，且必能增進對此一複雜流況之了解。

4. 三維之數值模擬確實優於二維之模式，其能補二維模式之不足。故對於各種流況之模擬，應儘可能使用三維模式，如此必能增進研究之結果，且使模擬流況更趨近於自然現象。

5. 未來發展可進而嘗試不同幾何形狀、不同攻角 (Attack angle) 之障礙物流況模擬，甚至可擴展探討群組障礙物之流場運動情形。

參考文獻

1. 曾振遠，“黏性尾流之渦流運動預測模式”，中國農業工程學報第三十四卷第三期，民國 77 年 9 月。
2. 曾振遠，劉佳興，“黏性流通過方形障礙物之模擬”，中國農業工程學報第三十五卷第三期，民國 78 年 1 月。
3. Roache P. J., *Computational Fluid Dynamics*, 1972.

4. Patankar S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*.
5. Fletcher C. A. J., *Computational techniques for Fluid Dynamics I & II*, Spring-Verlag, U. K., 1988.
6. Harlow F. H. and J. E. Welch, *Phys. Fluids* 8; J. E. Welch, F. H. Harlow, J. P. Shannon, and B. J. Daly, "The MAC Method: A Computing Technique for Solving Viscous, Incompressible, Transient Fluid Flow Problems Involving Free Surface", Los Alamos Scientific Laboratory report LA-3425, 1966.
7. Hirt C. W., B. D. Nichols, and N. C. Romero, "SOLA-A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows", Los Alamos Scientific Laboratory report LA-5852, 1975.
8. Gerhart Philip M., R. J. Gross and J. I. Hochstein, *Fundamentals of Fluid Mechanics*, second edition, pp. 368-387, Addison-Wesley Publishing Company, 1992.
9. Hoffman J. D., *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill, 1992.
10. Vanks S. P., "A Calculation Procedure for Three-Dimensional Steady Recirculating Flow Using Multigrid Methods", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 55, pp. 321-328 North-Holland, 1986.
11. Panton R. L., *Incompressible Flow*, John Wiley & Sons, Inc, 1984.
12. 林三益，成培宇，吳村木，施昇昌，"Numerical Studies of Suppression of Vortex Shedding From a Square prism", *Proc. of 2nd Nat. Conf. on. C. F. D.*, AASRC, May 28, 1993.
13. Davis R. W. and E. F. Moore, "A numerical study of vortex shedding from rectangles", *J. Fluid Mech.*, Vol. 116, pp. 475-506, 1982.
14. Daily J. W. and D. R. F. Harleman, *Fluid Dynamics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1968.
15. Kwak D., S. E. Rogers, U. K. Kaul and J. C. L. Chang, "A Numerical Study of Incompressible Junction Flows", *NASA Tech Memo* 88319, 1986.
16. White F. M., *Viscous Fluid Flow*, Mc Graw-Hill, 1991.

收稿日期：民國 83 年 6 月 28 日

修正日期：民國 85 年 7 月 30 日

接受日期：民國 85 年 8 月 6 日