

應用邊界拟合座標轉換及序列化網格編排技術 求解二維不可壓縮層流

Applied Body-Fitting Coordinate Transformation and Serial Grid Arrangement to Solve Two-Dimension Incompressible Flow

淡江大學水資源及環境工程研究所副教授

曾 振 遠
Cheng-Yuan Tseng

淡江大學水資源及環境工程研究所碩士

楊 國 威
Kuo-Wei Yang

摘 要

本研究發展一數值模式以模擬各種不同幾何邊界下之二維不可壓縮層流流場。此數值模式應用邊界拟合座標轉換處理邊界，多區間型展開方式及二邊界線性內插方式產生計算網格，並將網格予以序列化編排，將格點座標及各計算參數等資料依序列化的方式記錄，並使用雙倍密度網格及拉氏元素之權重內插函數計算轉換參數，與 MAC 計算方式結合成為一數值模式。

本研究向後突張管路、垂直分歧管路及均勻流通過圓形障礙物等三種流場為模擬對象，將所得結果與前人研究比較、驗證。結果顯示本數值模式具備精確性高、收斂速度快、使用彈性大、擴充能力強等優點，可用於解析不同之二維不可壓縮層流流場。

本研究結果顯示以邊界拟合座標轉換及序列化網格之模式架構確為有限差分法在流場模擬上開拓更廣之空間。

關鍵詞：邊界拟合座標，多區間劃分，序列化網格編排，向後突張管路，垂直分歧管路，圓形障礙物。

ABSTRACT

The goal of this research is to construct a numerical model to simulate two-dimensional incompressible laminar flows with various geometric boundaries. This numerical model utilizes Body-Fitting Coordinate Transformation, Multi-Block, Two-Boundary Linear Interpolation to generate computational grid and rearranges grid by serial. The transformation parameters are calculated by using double density grid and Lagrangian Element weighted function. The MAC scheme is used as solver.

Three two-dimensional incompressible laminar flows have been simulated to demonstrate

the applications of the proposed model. There are flow past a backward step, flow past a 90 degree bifurcation, and flow past a circular cylinder. The numerical results show that the model has good accuracy, well convergent rate and robust. The model does provide a new process for the Finite Difference Method to cope with the geometric boundaries easily.

Keywords : Body-fitting coordinate, Multi-block, Serial grid arrangement, Backward step, 90 degree bifurcation, Flow past a circular cylinder.

一、緒 論

1-1 前 言

目前計算流體力學常使用之求解方法可區分為四大類，即有限差分法(Finite Difference Method)、有限元素法(Finite Element Method)、有限體積法(Finite Volume Method)及波譜法(Spectral Method)[8]。其中有限差分法因離散過程(Discretize)簡單、程式撰寫容易，故被廣泛使用，但有限差分法之離散過程對網格依賴性頗大，故於邊界之處理必須作更完整之考慮。

有限差分法邊界處理方式一般可分為兩種：一為利用體積佔有率之方式處理，即著名之 FAVOR 法(Fractional Area/Volume Obstacle Representation)[2][3][4]；另一為使用邊界附合座標轉換(Body-Fitting Coordinate Transformation)[7]。FAVOR 法之優點為直接在原座標系統下處理各種形狀之邊界，可省略座標轉換之步驟，但此一邊界處理方式過於粗糙，無法模擬邊界附近流場之細部現象，為其缺點。而邊界附合座標轉換則是利用變數轉換將問題由原來所處之物理域(Physical Domain)轉換至以曲線座標(Curvilinear Coordinates)為準之計算域(Computational Domain)進行計算，如此可使有限差分法在邊界處理上獲得圓滿的解決；但控制方程式因座標轉換更形複雜，且邊界附合座標轉換之過程費時耗力，均為其缺點。

有限差分法於計算時係完全根據網格進行計算，故網格產生系統之優劣直接影響其應用之彈性。一般為了方便，常使用單一矩形網格為計算面，此方式雖在方程式撰寫上得到最大簡化，但卻嚴格限制其應用彈性，故衍生出多區間(Multi-Blocks)之網格型式以解決此問題，但多區間型網

格之交割線(Branch Cut)易造成新邊界，而各邊界之處理及計算程序之安排皆加深程式設計之困難，為程式設計上之瓶頸，為打破此一瓶頸，本文創先將有限元素法中處理非結構化網格及非矩形網格所慣用的資料結構一序列化資料結構，應用於多區間型規則網格的產生上，即所謂的序列化網格編排技術。應用此一技術將多區間網格重新予以編碼，不但得以解決由交割線造成的邊界問題，亦可簡化計算過程，使其能夠不受邊界幾何形狀限制，快速正確地模擬不同二維不可壓縮層流流場，擴展有限差分法的應用之彈性，而達有效地模擬不同流場問題之目的。

1-2 研究目的

本文擬將多區間型展開方式、邊界附合座標轉換、序列化網格編排技術、二邊界線性內插網格[9]、及 MAC (Maker and Cell)[2] 逐點計算方式結合成一計算模式，期以具備高度的使用彈性與正確性，可快速模擬多種不同之二維不可壓縮層流之流場。

二、數值模式之建立

本文之數值模式可分成兩大部分：一為計算網格之建立；一為計算模式之建立。

第一部分 計算網格之建立

本文所使用的網格其產生方式是先將物理域利用多區間型展開方式劃分成數個區間，然後於每個區間內使用二邊界線性內插法計算出雙倍密度的網格，再利用拉氏元素(Lagrangian Element)的權重內插函數計算邊界附合座標轉換所需之各轉換參數，再建立序列化的網格關係矩陣，將格點座標及各計算參數等資料依序列化的方式記錄於檔案上，其流程如圖 2-1 所示。

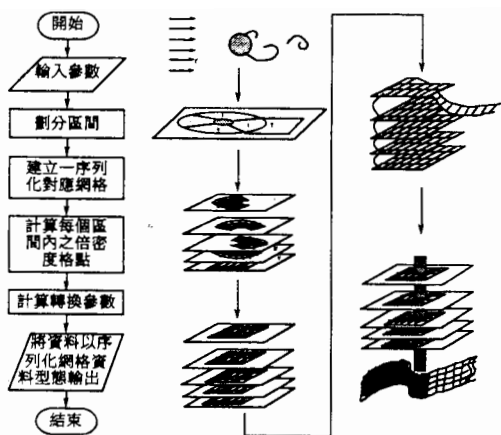


圖 2-1 建立序列化網格之計算流程

2-1 邊界附和座標轉換

Thompson 在 1978 年首度將邊界附合座標轉換應用於求解偏微分方程式。邊界附合座標轉換所使用的曲線座標函數，於整個轉換過程中並不需求出，只需求出該函數在各個格點上的各階導數，故可以待邊界上的格點佈置完畢後，使用各種不同的方式來產生曲線座標函數。不論使用何種方法均需滿足下列條件：

1. 若邊界附合座標分別為 ξ 及 η ，則 $\xi = \xi(x, y)$ 與 $\eta = \eta(x, y)$ 。

2. $J(\frac{\xi, \eta}{x, y}) \neq 0$ 則轉換及逆轉換必存在一對一之對應。

2-2 計算平面之展開

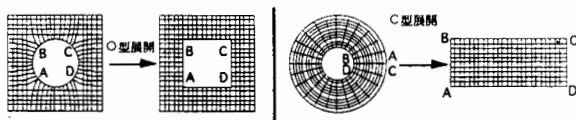


圖 2-1 O 型、C 型展開方式示意圖

使用邊界附合座標轉換時，都會面對計算平面展開方式之選擇，而展開方式因支割線之有無，而有 O 型展開方式與 C 型展開方式之分別。所謂 O 型展開方式為一展開過程中不增加任何支割線，故內部障礙物仍存在於計算面內部；C 型展開方式為一使用支割線將物理面切割至障礙物邊界後再予以展開，使障礙物不再存於計算面內

部。不論展開方式為何，原物理邊界及支割線所造成之新邊界之處理，以及計算面的形狀，都是程式設計時困難之所在。

2-2 多區間型展開方式

多區間型展開方式是將物理面先行切割成數個區間，而後依區間之對應關係分別將區間內的格點轉至計算面上加以組合，故多區間型展開方式可作 O 型或 C 型或混合二者之展開方式，使其擁有最大之網格產生彈性。本文採用多區間型展開方式，其衍生出的邊界處理問題則使用序列化網格編排技術加以解決。

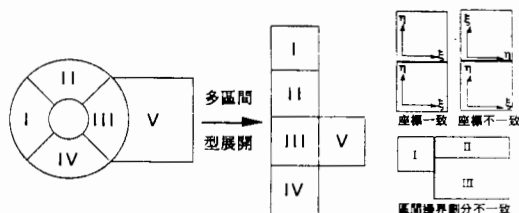


圖 2-2 多區間型展開方式、邊界劃分及座標一致性示意圖

本文採取的多區間型展開方式其區間劃分規則如下：

1. 每個區間必須擁有 4 個邊與 4 個頂點。
2. 計算面上所有的區間其邊界附合座標必須一致，即所有的區間轉換致計算面之後僅擁有一組座標。（如圖 2-2 所示）
3. 一支割線所形成的兩個邊界需必須一致，即一條支割線僅能劃分兩個區間，不能劃分兩個以上的區間。（如圖 2-2 所示）
4. 各區間邊界僅能擁有單一幾何形狀（如圓弧、直線、拋物線、橢圓邊界...）及有單一邊界條件。

2-3 格點之產生

本文之網格產生方式為區間劃分完畢後，先佈置各區間邊界上之格點，然後再產生各區間內部之格點，其流程如圖 2-1 所示。

2-3-1 區間邊界上格點之佈置

本文採用三種方式來控制格點佈置之位置：

1. 等分。
2. 使用控制函數 1 (Cluster 1)：可將計算格點向

某一點集中。

$$A = \frac{1}{2\beta} \ln \left[\frac{1 + (e^\beta - 1) d}{1 + (e^{-\beta} - 1) d} \right]$$

$$y = d \left\{ 1 + \frac{\sinh(\beta(\eta - A))}{\sinh(\beta A)} \right\} \quad (2-3-1)$$

其中：d 為格點集中之無因次位置 $0 < d < 1$
 η 為格點在計算域上之座標
 β 為控制集中度之參數 $0 < \beta < 1$ ，
 當 $\beta = 0$ 時表均勻。

3. 使用控制函數 2 (Cluster 2)：可將計算格點向一側或兩側集中。

$$y = H \frac{(2\alpha + \beta) \left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right)^{\frac{\eta - \alpha}{1 - \alpha}} + 2\alpha - \beta}{(2\alpha + 1) \left[1 + \left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right)^{\frac{\eta - \alpha}{1 - \alpha}} \right]} \quad (2-3-2)$$

其中： α 為控制參數 $\alpha = 0$ 向 $y = H$ 集中；
 $\alpha = 1$ 向 $y = 0$ 集中
 β 為控制集中度之參數 $1 \leq \beta \leq \infty$

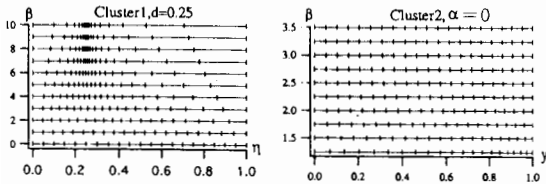


圖 2-3-1 控制函數之參數與佈點位置示意圖

2-3-2 網格之產生

本文區間內之網格產生方式為線性內插二邊界法(Two-boundary Method)，此方法之限制有二：一為區間內只能擁有兩個非直線邊界；另一為此二非直線邊界不得相鄰。

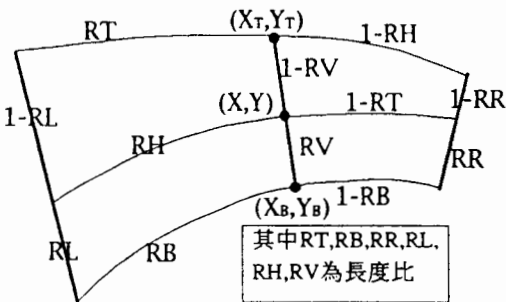


圖 2-3-1 線性內插二邊界法示意圖

$$\begin{cases} X = (X_T - X_B) RV + X_B \\ Y = (Y_T - Y_B) RV + Y_B \end{cases} \quad \begin{cases} RH = \left(\frac{RR + RL}{2} \right) RT + \left(1 - \frac{RL + RR}{2} \right) RB \\ RV = \left(\frac{RT + RB}{2} \right) RR + \left(1 - \frac{RT + RB}{2} \right) RL \end{cases} \quad (2-3-3)$$

其中 RT, RB, RR, RL, RH, RV 為長度比

其中 RT, RB, RR, RL, RH, RV 為長度比

2-4 計算網格

本文於計算時所採用之網格為壓力交錯網格(Pressure Stagger Grid)，此一網格為庫茲涅索夫(Kuznetsov, 1968)與佛丁(Fortin, 1971)等人[6]首先採用。其速度點位於晶格的角落上，壓力點位於晶格之中央(如圖2-4所示)。此晶格有下列特點：

1. 速度分量 u 、 v 位於同一點且位於晶格之角落，可直接設定邊界條件而不需使用特殊方式來處理，方便又快速。
2. 速度點與壓力點交錯開，方便壓力疊代修正之進行。
3. 晶格本身滿足質量守恆之要求。
4. 計算時可應需要模擬交錯網格或非交錯網格。

本文為方便結果之比較及節省資料儲存空間，於最後計算結果輸出時，採用非交錯網格的方式輸出資料，即將壓力值轉換至與速度點相同的位置輸出。

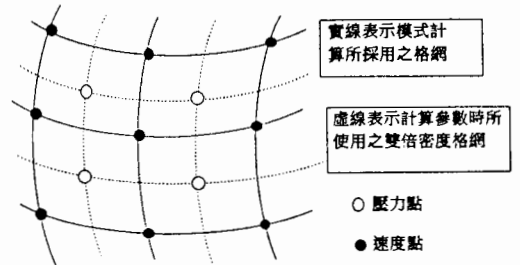


圖 2-4 非交錯網格示意圖

2-5 轉換參數之計算

計算轉換參數為進行邊界附合座標轉換必須之步驟，而轉參數計算之正確與否，直接影響數值計算之精確度，故其重要性非常明顯。轉換參數之計算於計算面內部一般採用中央差分，具有兩階之精確度，邊界點則使用上風法，具有一階之精確度，所使用之格點為周圍網格上之格點，

故若欲提高精確性而採用高階之差分方式，則必須使用更多周圍之格點，其精確度雖提高，但靈敏度相對降低。而一階轉換參數所表示之意義，即格點上邊界附合座標其 x、y 方向上之導數，應重視能否正確反應局部的特性，故使用高階差分來提高精確度，在網格皆為平滑時有其效果，但若變化劇烈，則易生反效果 [12]。因此，本文為提高轉換參數計算之精確度，並配合壓力交錯網格之產生，特別使用雙倍密度網格及有限元素法中拉氏元素之權重內插函數 [7] 來計算轉換參數。其可在不增加使用點數之情況下，將精確性與靈敏度同時提高，期望因此能將因轉換參數之誤差所導致計算時之誤差降至最低。

拉氏元素之權重內插函數 Φ_i 可表示成：

$$\Phi_i = L^3(\xi) L^3(\eta) \quad (2-5-1)$$

物理面之座標 X、Y 與權重內插函數 Φ_i 之關係為：

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^9 x_i \Phi_i \\ Y = \sum_{i=1}^9 y_i \Phi_i \end{cases} \quad \text{其中 } i \text{ 為節點代碼} \quad (2-5-2)$$

圖 2-5 拉氏元素示意圖

各轉換參數可由下列關係式求出：

$$\begin{bmatrix} X_{\xi} \\ X_{\eta} \\ Y_{\xi} \\ Y_{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{\xi} \\ \xi_{\eta} \\ \eta_{\xi} \\ \eta_{\eta} \end{bmatrix} \quad (2-5-3)$$

$$\begin{cases} \xi_{\xi} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} [(Y_2^2 Y_9 - 2 Y_1 Y_2 Y_9 + Y_1^2 Y_9)(X_1 - X_2) + (Y_1^2 X_9 - 2 Y_1 Y_2 X_9 + Y_2^2 X_9)(-Y_1)] \\ \xi_{\eta} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} [(Y_2^2 Y_9 - 2 Y_1 Y_2 Y_9 + Y_1^2 Y_9)(-X_1) + (Y_1^2 X_9 - 2 Y_1 Y_2 X_9 + Y_2^2 X_9)(Y_1)] \\ \eta_{\xi} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} [(X_1^2 Y_9 - 2 X_1 X_2 Y_9 + X_2^2 Y_9)(X_1 - X_2) + (X_1^2 X_9 - 2 X_1 X_2 X_9 + X_2^2 X_9)(-Y_1)] \\ \eta_{\eta} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} [(X_1^2 Y_9 - 2 X_1 X_2 Y_9 + X_2^2 Y_9)(-X_1) + (X_1^2 X_9 - 2 X_1 X_2 X_9 + X_2^2 X_9)(Y_1)] \end{cases}$$

(2-5-4)

2-6 序列化網格編排

所謂序列化網格編排 (Serial Grid Arrangement) 即是當所有的網格形成後給予每個格點 (Node) 及晶格 (Cell) 一個序號，然後將所有的相關資料如座標、轉換參數等，依序號存放於矩陣當中，另外亦利用序號將網格間的空間關係記錄下來，提供計算時讀取周圍相關各點的資料時使用。故一組完整的序列化網格可分成兩大部分：一為網格資料矩陣，一為網格關係矩陣。

本文因採用壓力交錯網格，速度點與壓力點交錯分佈，故編排序列化網格時，除各自須擁有獨立的資料矩陣外，在網格的空間關係的記錄上，必須記錄壓力點與速度點各自的空間關係及壓力點與速度點之間彼此的空間關係，故共需要使用四個矩陣來儲存，其定義如下：

1. 速度點間之空間關係的矩陣 $BTV(J,K)$ ，儲存速度序號為 J 的鄰近四點之速度序號，其中 L 為方向指示參數。K = 1 表示左側；K = 2 表示上方；K = 3 表示右側；K = 4 表示下方。（如圖 2-6-1 所示）
2. 壓力點間之空間關係的矩陣 $BTC(I,L)$ ，儲存壓力序號為 I 的鄰近四點之壓力序號，其中 L 為方向指示參數。L = 1 表示左側；L = 2 表示上方；L = 3 表示右側；L = 4 表示下方。（如圖 2-6-1 所示）
3. 速度點與壓力點間之空間關係的矩陣 $NVD(J,K)$ ，儲存速度序號為 J 的鄰近四點之壓力序號，其中 K 為方向指示參數。K = 1 表示左下角；K = 2 表示左上角；K = 3 表示右上角；K = 4 表示右下角。（如圖 2-6-1 所示）

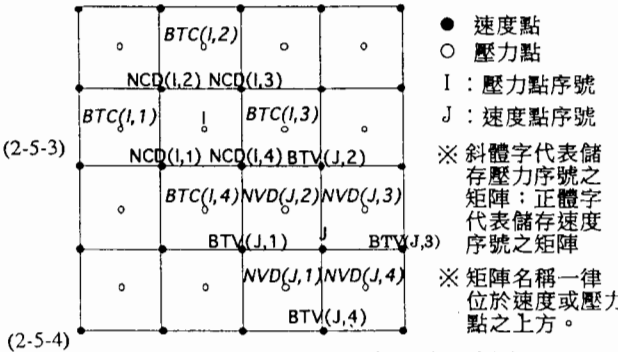


圖 2-6-1 空間關係矩陣示意圖

4. 壓力點與速度點間之空間關係的矩陣 NCD(I, L)，儲存壓力序號為 I 的鄰近四點之速度序號，其中 L 為方向指示參數。L = 1 表示左下角；L = 2 表示左上角；L = 3 表示右上角；L = 4 表示右下角。（如圖 2-6-1 所示）

本文採用壓力交錯網格及 MAC 計算模式，計算動量方程式時以速度晶格為主，壓力疊代修正時以壓力晶格為主，因此為簡化計算流程以發揮更大的計算效益，特別於序列化網格編碼時作以下之安排：

1. 將物理邊界角落上之速度點編排於資料矩陣的最前段（如圖 2-6-2 所示）。

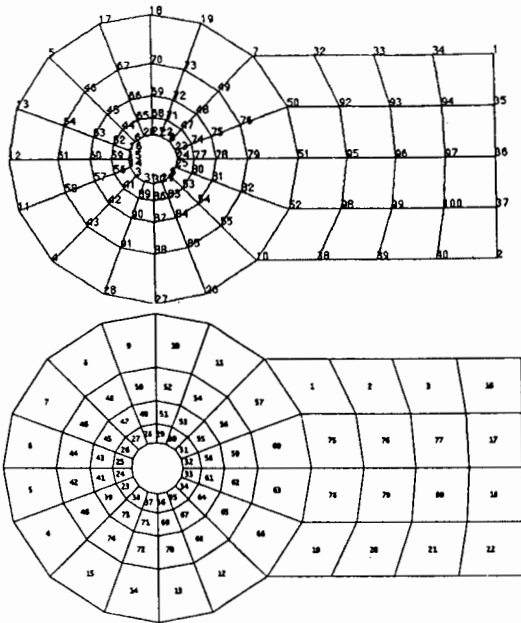


圖 2-6-2 速度點及壓力點編排示意圖

2. 物理邊界上其他之速度點編排於資料矩陣的中段（如圖 2-6-2 所示）。
3. 其他計算域內部之速度點編排於後段（如圖 2-6-2 所示）。
4. 壓力點之編碼以計算域邊界之壓力晶格優先（如圖 2-6-2 所示）。

如此編排的好處有三：

1. 不規則之物理域及支割線所引起計算上之困擾，已透過序列化網格編排處理完畢，計算流程不會受物理邊界及其邊界條件影響，故

可模擬各種不同的流場。

2. 配合壓力交錯網格的邊界設定及 MAC 逐點運算法的壓力疊代修正，減少程式之中判斷分岔的使用，提高程式的執行效率。
3. 網格產生系統與計算模式相互獨立，利於計算模式之修改及更換。

以圖 2-2 之計算域展開為例，經序列化編排後其速度點編排及壓力點之編碼如圖 2-6-2 所示。

第二部分 計算模式之建立

2-7 計算模式

本論文所使用之數值計算模式為 MAC 計算模式，MAC 計算模式為 Amsdem 與 Harlow[4] 於 1970 年為計算自由水面問題時所提出，主要使用連續方程式作為壓力疊代之依據，為一顯性法。

二維不可壓縮動量方程式其差分式可寫成：

$$\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{\Delta t} + A(\vec{V}^n) = -\nabla P^{n+1} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{V}^n \quad (2-7-1)$$

其中 $\vec{V}^{n+1}$ ：更新時刻之速度 $\vec{V}^n$ ：原時刻之速度

P^{n+1} ：更新時刻之壓力 A ：偏微分運算子

假設
$$\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{\Delta t} + A(\vec{V}^n) = -\nabla P^{n+1} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{V}^n \quad (2-7-2)$$

$$\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{\Delta t} = -\nabla P \quad (2-7-3)$$

$$P^{n+1} = P^n + \delta P \quad (2-7-4)$$

將 (2-7-3) 移項整理得：

$$\vec{V}^{n+1} = \vec{V}^n - \Delta t \nabla(\delta P) \quad (2-7-5)$$

其中 $\vec{V}^n$ 為使用原時刻之壓力值計算所得之速度中繼值

由於流場必須滿足連續方程式，即

$$\text{div} \vec{V}^{n+1} = 0 \quad (2-7-6)$$

$$\text{div} \vec{V}^n = 0 \quad (2-7-7)$$

但中繼速度無法滿足連續方程式，其原因為計算中繼速度時所使用之壓力非下一時刻之壓力值，即

$$\text{div} \vec{V}^n \neq 0 \quad (2-7-8)$$

將 (2-7-5) 式取散度可得

$$\text{div} \vec{V}^{n+1} = \text{div} \vec{V}^n - \Delta t \nabla^2 (\delta P) = 0 \quad (2-7-9)$$

$$\text{div} \vec{V} = \Delta t \cdot \nabla^2 (\delta P) \quad (2-7-10)$$

利用 (2-7-10) 式得可道晶格內之速度殘值與壓力修正值之間的關係

$$\text{令 } \text{div} \vec{V} = D^k = \frac{\partial u^k}{\partial x} + \frac{\partial v^k}{\partial y} \quad (2-7-11)$$

利用牛頓－雷夫森法 (Newton-Raphson Method)，假設：

$$D^{k+1} = D^k + \frac{dD^k}{d(\delta P)} \delta P = 0 \quad (2-7-12)$$

移項整理可得

$$\delta P = \frac{-D^k}{\frac{dD^k}{d(\delta P)}} = \frac{-D^k}{\frac{d(\nabla^2(\delta P))}{d(\delta P)} \Delta t} \quad (2-7-13)$$

(2-7-5)(2-7-11)(2-7-13) 式即為 MAC 法求解之過程所使用之壓力疊代方程式。

2-8 控制方程式之座標轉換

本數值模式所使用之控制方程有二：一為二維不可壓縮動量方程式，又稱為 Navier-Stokes 方程式，其在卡氏座標下為：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2-8-1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2-8-2)$$

另一為二維不可壓縮連續方程式，其在卡氏座標下可表示為：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2-8-3)$$

假設邊界附合座標為 ξ 及 η ，則 $\xi = \xi(x, y)$ 與 $\eta = \eta(x, y)$ ，利用鏈鎖定理 (Chain Rule) 將動量方程式逐項轉換後可得二維不可壓縮動量方程式之邊界附合座標表示式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \left(\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + v \left(\xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = & - \left(\xi_x \frac{\partial p}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) \\ & + \frac{1}{\text{Re}} \left(\left(\xi_{xx} + \xi_{yy} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(\eta_{xx} + \eta_{yy} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} + \left(\xi_x^2 + \xi_y^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \left(\xi_x \eta_x \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\eta_x^2 + \eta_y^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (2-8-4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \left(\xi_x \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + v \left(\xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = & - \left(\xi_y \frac{\partial p}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) \\ & + \frac{1}{\text{Re}} \left(\left(\xi_{xx} + \xi_{yy} \right) \frac{\partial v}{\partial \xi} + \left(\eta_{xx} + \eta_{yy} \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} + \left(\xi_x^2 + \xi_y^2 \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2 \left(\xi_x \eta_x \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\eta_x^2 + \eta_y^2 \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (2-8-5)$$

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x} & \eta_x &= \frac{\partial \eta}{\partial x} & \xi_y &= \frac{\partial \xi}{\partial y} & \eta_y &= \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \xi_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x} & \eta_x &= \frac{\partial \eta}{\partial x} & \xi_y &= \frac{\partial \xi}{\partial y} & \eta_y &= \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned}$$

二維不可壓縮連續方程式之邊界附合座表示式：

$$\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} + \xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad (2-8-6)$$

2-9 差分方程式之建立

二維不可壓縮動量方程式在卡氏座標下可表示成 (2-8-1) 式及 (2-8-2) 式，經邊界附合座標轉換後逐項改寫成差分式如下。

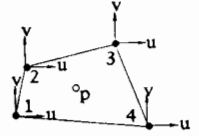
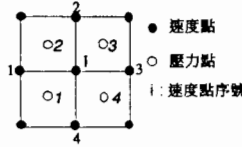


圖 2-9-1 速度及壓力點代號示意 圖 2-9-2 壓力計算晶格示意圖

1. 時間項：採用前進差分

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \quad (2-9-1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} \quad (2-9-2)$$

2. 對流項：採用部分上風法，其各項差分式可寫成：（參考圖 2-9-1 所示）

$$\begin{aligned} \text{FUX} &= \frac{1}{4} \left\{ \left[\xi_x (u_1 + u_2)^2 + \alpha \xi_x (u_1 + u_2) (u_1 - u_2) \right] \cdot \left[\xi_x (u_1 + u_2)^2 + \alpha \xi_x (u_1 + u_2) (u_1 - u_2) \right] \right. \\ & \quad \left. - \left[\eta_x (u_1 + u_2)^2 + \alpha \eta_x (u_1 + u_2) (u_1 - u_2) \right] \cdot \left[\eta_x (u_1 + u_2)^2 + \alpha \eta_x (u_1 + u_2) (u_1 - u_2) \right] \right\} \quad (2-9-3) \\ \text{FUY} &= \frac{1}{4} \left\{ \left[\xi_y (u_1 + u_2) (v_1 + v_2) + \alpha \xi_y (v_1 + v_2) (u_1 - u_2) \right] \cdot \left[\xi_y (u_1 + u_2) (v_1 + v_2) + \alpha \xi_y (v_1 + v_2) (u_1 - u_2) \right] \right. \\ & \quad \left. - \left[\eta_y (u_1 + u_2) (v_1 + v_2) + \alpha \eta_y (v_1 + v_2) (u_1 - u_2) \right] \cdot \left[\eta_y (u_1 + u_2) (v_1 + v_2) + \alpha \eta_y (v_1 + v_2) (u_1 - u_2) \right] \right\} \\ \text{FVY} &= \frac{1}{4} \left\{ \left[\xi_y (v_1 + v_2)^2 + \alpha \xi_y (v_1 + v_2) (v_1 - v_2) \right] \cdot \left[\xi_y (v_1 + v_2)^2 + \alpha \xi_y (v_1 + v_2) (v_1 - v_2) \right] \right. \\ & \quad \left. - \left[\eta_y (v_1 + v_2)^2 + \alpha \eta_y (v_1 + v_2) (v_1 - v_2) \right] \cdot \left[\eta_y (v_1 + v_2)^2 + \alpha \eta_y (v_1 + v_2) (v_1 - v_2) \right] \right\} \quad (2-9-4) \\ \text{FVX} &= \frac{1}{4} \left\{ \left[\xi_x (u_1 + u_2) (v_1 + v_2) + \alpha \xi_x (u_1 + u_2) (v_1 - v_2) \right] \cdot \left[\xi_x (u_1 + u_2) (v_1 + v_2) + \alpha \xi_x (u_1 + u_2) (v_1 - v_2) \right] \right. \\ & \quad \left. - \left[\eta_x (u_1 + u_2) (v_1 + v_2) + \alpha \eta_x (u_1 + u_2) (v_1 - v_2) \right] \cdot \left[\eta_x (u_1 + u_2) (v_1 + v_2) + \alpha \eta_x (u_1 + u_2) (v_1 - v_2) \right] \right\} \end{aligned}$$

α 上風因子。 $\alpha = 1$ 時為上風法； $\alpha = 0$ 時為中央差分法。

3. 壓力項：採用中央差分（參考圖 2-9-1 所示）

$$\text{DPDX} = -\xi_x \left(\frac{P_3 + P_4 - P_1 - P_2}{2} \right) - \eta_x \left(\frac{P_3 + P_4 - P_1 - P_2}{2} \right) \quad (2-9-5)$$

$$\text{DPDY} = -\xi_y \left(\frac{P_3 + P_4 - P_1 - P_2}{2} \right) - \eta_y \left(\frac{P_3 + P_4 - P_1 - P_2}{2} \right) \quad (2-9-6)$$

4. 黏滯項：採用中央差分（參考圖 2-9-1 所示）

$$\text{VISX} = \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \text{AU} \left(\frac{u_2 - u_1}{2} \right) + \text{AV} \left(\frac{u_2 - u_4}{2} \right) + \text{AUU} (u_2 - 2u_1 + u_4) \right. \\ \left. + \text{AVU} \left(\frac{u_2 + u_1 - u_4 - u_4}{2} \right) + \text{AVV} (u_2 - 2u_1 + u_4) \right\} \quad (2-9-7)$$

$$VISY = \frac{1}{Re} \left[AU \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) + AV \left(\frac{v_2 - v_4}{2} \right) + AUU(v_2 - 2v_1 + v_4) \right. \\ \left. + AUV \left(\frac{v_2 + v_4 - v_1 - v_4}{2} \right) + AVV(v_2 - 2v_1 + v_4) \right] \quad (2-9-8)$$

$$AU = (\xi_{xx} + \xi_{yy}) \quad AV = (\eta_{xx} + \eta_{yy}) \quad AUU = (\xi_x^2 + \xi_y^2) \quad AUV = 2(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y)$$

$$AVV = (\eta_x^2 + \eta_y^2)$$

壓力晶格內之連續方程式之差分式：（參考圖 2-9-2 所示晶格）

$$D^k = \xi_x \frac{u_2 + u_4 - u_1 - u_3}{2} + \eta_x \frac{u_2 + u_3 - u_1 - u_4}{2} + \xi_y \frac{v_2 + v_4 - v_1 - v_3}{2} \\ + \eta_y \frac{v_2 + v_3 - v_1 - v_4}{2} \quad (2-9-9)$$

其中 ξ'_x 、 ξ'_y 、 η'_x 、 η'_y 為壓力點上的轉換參數

$$\frac{d(V^2/\delta P)}{d(\delta P)} = -2[(\xi_x'^2 + \eta_x'^2) + (\xi_y'^2 + \eta_y'^2)] \quad (2-9-10)$$

各速度點之疊代修正式：

$$\begin{cases} u_1^{k+1} = u_1^k + C(-\xi_x|_1 - \eta_x|_1) \\ u_2^{k+1} = u_2^k + C(-\xi_x|_2 + \eta_x|_2) \\ u_3^{k+1} = u_3^k + C(\xi_x|_3 + \eta_x|_3) \\ u_4^{k+1} = u_4^k + C(\xi_x|_4 - \eta_x|_4) \end{cases} \quad \begin{cases} v_1^{k+1} = v_1^k + C(-\xi_y|_1 - \eta_y|_1) \\ v_2^{k+1} = v_2^k + C(-\xi_y|_2 + \eta_y|_2) \\ v_3^{k+1} = v_3^k + C(\xi_y|_3 + \eta_y|_3) \\ v_4^{k+1} = v_4^k + C(\xi_y|_4 - \eta_y|_4) \end{cases} \quad (2-9-11)$$

$$C = \frac{D^k \cdot \omega}{-2[(\xi_x'^2 + \eta_x'^2) + (\xi_y'^2 + \eta_y'^2)]} \quad \omega \text{ 為超鬆弛因子 (Overrelax factor)}$$

2-10 時間間距之選取

數值模式之求解過程屬於顯性法者，時間間距之大小有兩個限制：

1. 每一時間距內，質點移動不可超過一個晶格之長度，因差分方程式中各種流速變化率僅能透過兩相鄰之格點加以計算。時間間距須小於 $\frac{\Delta x_i}{|u_i|}$ 與 $\frac{\Delta y_i}{|v_i|}$ 即：

$$\Delta t < \min \left\{ \frac{\Delta x_i}{|u_i|} \text{ and } \frac{\Delta y_i}{|v_i|} \right\} \quad \text{對於計算域內每個 } i \quad (2-10-1)$$

2. 計算黏性流時，每一時間間距內之動量擴散不能超過一晶格長度。由線性分析化簡為

$$v \Delta t < \frac{1}{2} \frac{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \quad \text{其中 } v \text{ 為動力黏滯係數} \quad (2-10-2)$$

(2-10-1) 與 (2-10-2) 須同時考慮並選取較小值作為時間間距限制值，由於 (2-10-2) 限制較嚴，故通常直接使用 (2-10-2) 所得值為最大時間間距之限制值。

三、流場之模擬與分析

本文選擇了三個具有代表性的流場加以模

擬，分析所得結果，並與前人之研究結果相比較以驗證模式之正確性，所模擬之流場及模擬目的如下：

3-1 流體通過向後突張管路之流場 (Flow Past a Backward Facing Step)

3-1-1 流場特性

1. 入流與下游無限遠處出口為一完全展開流。
2. 流場為壓力驅動流場。
3. 雷諾數低於 800 時為一穩定流場。
4. 雷諾數小於 400 時，流場僅存在一迴流區位於階梯後方，稱為主迴流區；雷諾數大於 400 後，上方管壁亦生成一迴流區稱次迴流區。此二迴流區之大小隨雷諾數高低而改變。
5. 當雷諾數藉於 1200 與 6600 之間時，流場呈劇烈變化，迴流區內之渦流結構由二維發展成為三維的結構，且除主、次迴流區外，流場亦產生許多小渦流。
6. 雷諾數高於 5500 後，流況發展為亂流，渦流結構由三度空間恢復成二度空間，主、次迴流區趨向穩定，其大小不再隨著雷諾數之增加而有所改變，迴流區之大小與擴張比有關，而與雷諾數無關。

3-1-2 文獻回顧

Armaly[11] 等人於 1983 年利用雷射都卜勒流速儀測量流體通過後方突張管路之流場，所測流場的擴張比為 1:1.94，並使用數值模式預測迴流區之大小，並將結果與實驗結果相故比較驗證，發現當 $Re < 400$ 時數值解與實驗值相吻合，但當 $Re > 400$ 時數值解與實驗值開始產生明顯差距，數值模式所得之主迴流區長度較實驗所得小。因雷諾數大於 800 後流場進入漸變流，故數值模式僅模擬至 $Re=800$ 為止。

Kim[12] 於 1988 年使用高密度網格的有限元素法模擬此一流場，並將所得之結果對照 Armaly 等人於 1983 年所得的實驗值與數值解，其數值結果較 Armaly 之結果優良，但於 $Re > 400$ 之部分仍與實驗值有所差異。

3-1-3 模擬過程

本文模擬向後突張管流所使用的網格如圖 3-1-1 所示，所模擬之擴張比為 1:2，長度為 26 倍入口寬度長，模擬之雷諾數由 100 至 900，因邊界層隨

邊界朝下游發展，未避免強烈的對流效應造成數值震盪，故使用上風法模擬以增強結果的正確性。

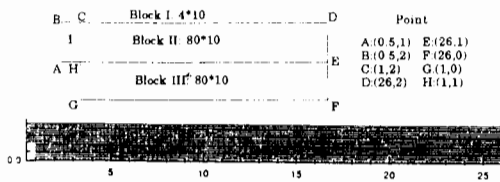


圖 3-1-1 向後突張管路所使用之網格及區間之劃分狀況

3-1-4 結果與比較

1. 向後突張管路於迴流區之邊緣，即邊界層之邊緣，為速度梯度變化最大之區域，應使用較高密度之網格才得以正確掌握速度劇烈變化之情形，網格數不足則無法解得正確速度值，各速度剖面之誤差由上游累積至下游，反應於迴流區之長度上，以致於各模式於雷諾數提高時發生較大誤差。

2. 本研究計算所得之主迴流區長度與 Armaly (1986) 利用雷射都卜勒測試儀 (L.D.V.) 所量測之數值相比較，於雷諾數 > 400 後，依然出現較大之誤差，但趨勢維持不變，唯較 S.W.Kim 利用高密度網格之有限元素法所得之結果為差，但已較 Armaly 之數值結果優良許多（如圖 3-1-2 所示）；其原因應係網格數目不足所致。又因本研究使用網格收縮技術使網格集中於突張管路之上游面，故於下游區之模擬上，其解析性較差，故主迴流區長度隨雷諾數增加而增加時，誤差發生機會相對提高。另計算採用部分上風法，由上風法造成之數值消散於高雷諾數時更加明顯，影響結果之正確性。

3. 雷諾數高於 500 後，始於上方管壁產生一副迴流區，其大小隨雷諾數增加而增加，此結果與實驗結果一致。本研究模擬之擴張比為 1:2，與 S.W.Kim 及 Armaly 之 1:1.94 有些微之差距。

4. 由上述之結果可知模式於處理半開放流場之問題上，若配合適當網格，所得結果仍具良

好之解析性與正確性。

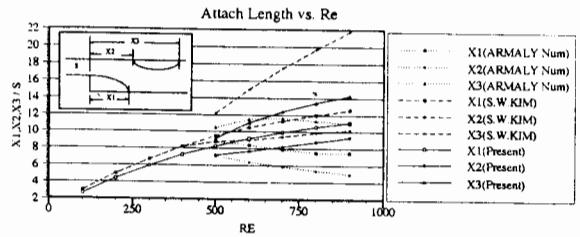


圖 3-1-2 向後突張管路主、副回流區分離點發生位置與雷諾數之關係

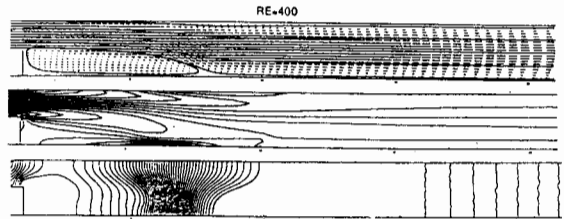


圖 3-1-3 向後突張管路雷諾數 400 之流線圖、等壓圖、等速度圖

3-2 流體通過垂直分歧管路之流場 (Flow Past a 90 Degree Bifurcation)

目前利用數值方法求解分歧管流 (Bifurcation) 及匯流 (Junction) 問題，所遭遇之困難包括：

1. 計算區域係由二或三個狹長區域構成，若使用單一區間網格處理時，將會出現計算空間不足或浪費之情況。

2. 使用區間劃分方式處理此類問題時，將引發兩區間交界面上計算處理及計算程序安排等困難。因此求解該問題之數值模式在發展上，困難度較高。

本研究所採用之計算方法，對分歧管流於計算上易造成之困擾可有效地解決，選擇模擬此類問題可顯示本模式於處理不同幾何邊界之適應性與優越性。

3-2-1 流場特性

1. 入流與無限遠處之出流為完全展開流。
2. 主流因受側管分流影響，於側管附近之管壁上有渦流產生，其大小受雷諾數、分流比、及側支流寬度所影響。
3. 側管入口處因流體之慣性作用，靠上游面之，

管壁上有渦流產生。

4. 在兩出口處壓力相等之情況下，主流之流量隨雷諾數增加而增加，側支流則相反。
5. 主流開始出現渦流之臨界雷諾數，隨側支流流量（出口壓力）增加而提高，而隨側支流寬度增加而降低。

3-2-2 文獻回顧

R.E.Hayes 等人 [19] 於 1989 年利用有限元素法求解二維垂直分歧管路問題，雷諾數為 10 至 800，所使用之邊界條件為入、出口皆設定為完全展開流，且除了模擬兩出口為等壓下之流場外，亦模擬不同分流比，及側支管寬度對流場之影響，並將模擬所得之斷面速度剖面與 Liepsch 利用 L.D.V. 量測所得結果吻合，發現其誤差不超過 5%。

D.Lee(1992)[20] 利用有限體積法及網格增補技術模擬生物體內大動脈分歧部分之流場，即研究週期脈衝流動下，具有不規則邊界之分歧管流迴流亦發生之地點。並比較入流為週期脈衝或穩定流情況下流場之差異，以垂直分歧管路即後方突張管路為例驗證其模式。

3-2-3 模擬過程

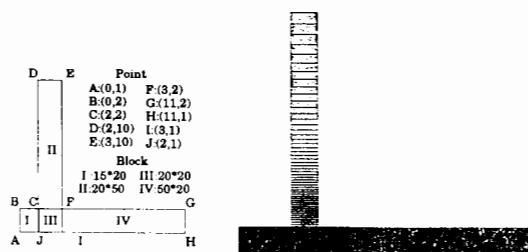


圖 3-2-1 模擬垂直分歧管路流場所使用之網格區間之劃分狀況

模擬垂直分歧管路流場所使用之網格如圖 3-2-1 所示，垂直管路與水平管路之寬度比為 1:1，入流邊界為完全展開流，出流邊界為連續流，模擬之雷諾數為 30、45、60、75、150、300、450、600、750、900，使用部分上風法模擬，上風因子為 0.5。時間間距為 0.005 或 0.0025

3-2-4 結果與討論

1. 主流約於雷諾數大約 300 後，始有迴流區 (Recirculation Zone) 產生，其大小隨雷諾數增

加而增加。迴流區前方之分離點位置隨雷諾數提高而向上游移動，其結果與 R.E.Hayes 試算之結果一致 (圖 3-2-2)。

2. 側支流之迴流區於雷諾數大於 25 後開始產生，其大小隨雷諾數之增加而增加，增加長度於雷諾數高於 300 後有減緩趨勢，其原因為側流之分流比降低 (圖 3-2-3)。
3. 側支流分流比隨雷諾數之增加而降低，雷諾數為 75 時，因主流產生阻塞 (Choke) 現象，側支流分流比在此區域內呈現不連續之現象 (圖 3-2-3)，管路發生阻礙後，分流比變化趨勢減緩，進入亂流後，變化轉變加大。
4. 雷諾數大於 450 後，進入亂流之流況，側支流之迴流區內開始產生渦流分離現象，且於管壁產生渦流交替出現之現象，主流則於較高之雷諾數下使進入亂流流況。

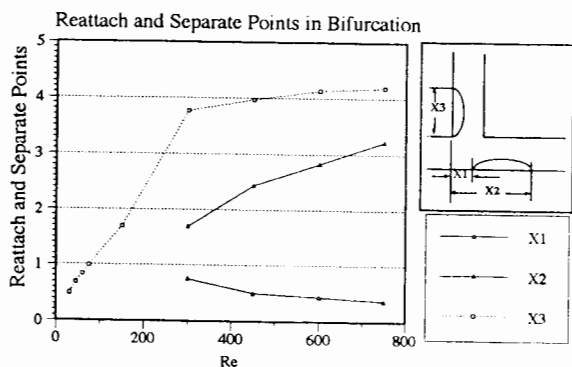


圖 3-2-2 分歧管回流區分離點與停滯點位置與雷諾數之關係

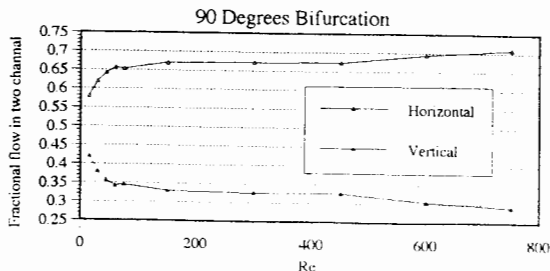


圖 3-2-3 分歧管流垂直管路與水平管路流量比與雷諾數之關係

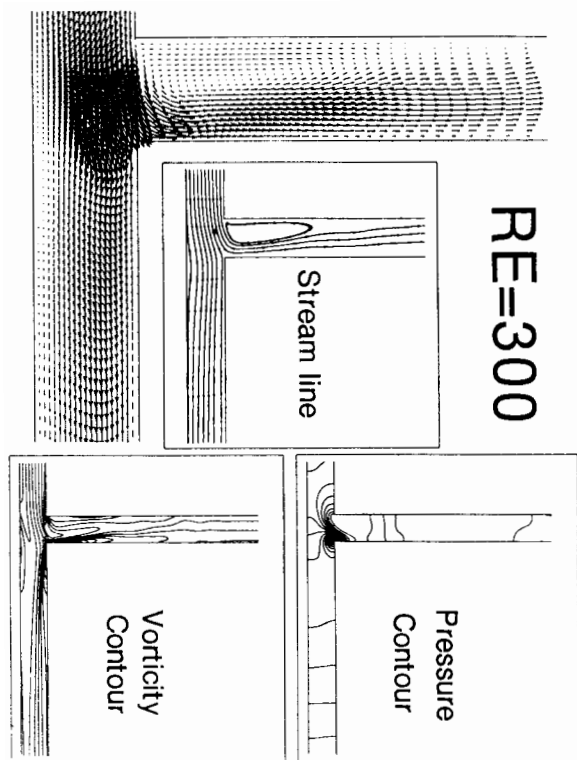


圖 3-2-4 分岐管流雷諾數 300 之流線、等壓線、等渦度線及局部速度圖

3-3 二維均勻流通過圓形障礙物所造成之流場

流體通過圓柱型障礙物所衍生之流場，其尾流形成卡門渦流群 (Karman Vortex Street)，其形成區渦流形成之流況非常複雜，若對此問題進行完整之模擬，則可進一步探討更複雜之流場。本研究發展之數值模式亦以此為初步目的，提供相關研究使用。

3-3-1 流場特性

1. 雷諾數 < 5 時，無流場分離現象，其流場與勢能流相似。
2. $5 < \text{雷諾數} \leq 40$ 時，圓柱後方產生一對相互對稱之渦流，緊隨圓柱之後，流場係上下對稱，為一穩定流場。
3. 雷諾數 > 40 時，尾流之渦流開始呈現不穩定狀況而脫離圓柱，分離點及接觸點隨渦流之脫離而呈左右移動形態，渦流於脫離後即在圓柱後方形成卡門渦流群。當 $60 < \text{雷諾數} < 150$ 時，渦流構成之流場結構完整，變化不

大，（卡門渦街內之渦流其大小、距離均相同）；但雷諾數再往上升時，卡門渦流群內之渦流大小不再保持相同，因渦流結構由二維轉換為三維之故。

3-3-2 文獻回顧

M.Braza, P.Chassaing 與 H.Ha. Minh[15] 於 1985 年使用改良自 SMAC 法之有限元素法，在圓柱座標下模擬此一流場，研究形成區 (Formation Zone) 內渦流分離現象發生之過程，速度場與壓力場間之關係，及速度場與壓力場於尾流區內及形成區內之差異。因計算程序中壓力修正部分係使用 A. D.I. 法，故計算須加入一擾動方可造成渦流之分離，且需較長計算時間才可達準穩定狀態 (Quasi-steady)，所模擬之雷諾數為 100、200 及 1000。

R.Franke, W. Rodi 與 B. Schonung (1990)[16] 利用有限體積法模擬流體通過圓柱及方柱所造成之渦流分離現象，利用具有三階精確度之 QUICK 法處理對流項。該研究模擬使用之雷諾數，圓柱由 50 至 5000，方柱由 40 至 300，而不同雷諾數下，圓柱及方柱之拖曳係數 (Cd) 及昇力係數 (Cl)，並圓柱之分離點及停滯點之位置，亦有所探討。

黃榮鑑、蔣德普、趙茂吉 [5] (民國七十五年) 利用邊界附合座標轉換探討非壓縮黏滯流通過圓柱體流場之流況變化，其中座標轉換係以 C 型方式展開，使用卜松方程式作為產生內部格點之控制方程式。以隱式數值渦度一流函數法 (Stream Function Vorticity) 求解流場，以 ADI 法求解渦度函數，以 SOR 法求解流函數。所計算之雷諾數分別為 100、200 與 500，研究流場之速度、壓力、阻力、昇力、轉矩和渦流分離頻率等物理量。

3-3-3 模擬過程

模擬均勻流通過圓柱之流場所使用之網格其區間劃分方式如圖 2-2 所示，其計算網格如圖 3-3-1 所示。

3-3-4 結果與討論

流體通過圓柱之結果分析如表 3-3-1 所示。

1. 雷諾數低於 40 時，為一穩定流場，由所模擬結果可清楚看出一對渦流滯留於圓柱後方，

其大小隨雷諾數增加而增大。

2. 雷諾數大於 40 後，停滯渦流出現不穩定之現象，開始緩慢地上下擺動；雷諾數高於 50 時，則開始出現渦流分離 (Vortex Shedding) 之現象。

3. 雷諾數為 100 時，渦流分離之週期為 $T=5.2$ 秒；雷諾數為 200 時，週期為 $T=4.5$ 秒。Cd 值受渦流分離的影響有週期振盪的現象發生，但振幅很小。不同雷諾數下圓柱之分離點、停滯點位置如表 3-3-1 所示。

4. 前方停滯點與後方尾流相同，亦呈週期擺動之現象，其運動方向（順時針、逆時針）與後方停滯點之運動方向相同，其極值發生於圓柱壁上渦度值之和為零時。

5. 圓柱壁上渦度值之和為極值（極大或極小值）時，表示渦流完全脫離形成區，進入尾流區。

6. 由圓柱上方產生之渦流為順時針運動方向，下方產生之渦流為逆時針方向，兩者交替產生，因交互之作用影響，形成上下移動之現象。

7. 渦流於分離點後方形成後，於形成區內由小逐漸變大，發展完成後即脫離形成區，進入尾流區，此為一完整之渦流發展循環週期。渦流進入尾流區後，至另一同向渦流產生間存在一時間間距，該時間間距內因僅有一渦流（與甫脫離形成區者反向）位於形成區內，故其發展迅速，致使後方停滯點快速移動，俟另一向之渦流產生（與甫脫離形成區者同向）後，牽制在形成區內渦流之發展，而使後方停滯點之移動速度驟減。渦流產生時，分離點之角度最大。

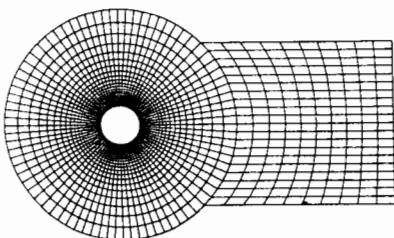


圖 3-3-1 均勻流通過圓柱計算網格

表 3-3-1 不同雷諾數下圓柱之分離點、停滯點位置 (單位: 度)

Re	Separation point1	Separation point2	Attach point1	Attach point2
20	41.7	-41.7	180	0.128
30	47.5	-47.5	180	0.113
40	51.1	-51.1	180	0.09
50	53.3	-54.3	180.6±0.15	±1.1
100	58.2±3.0	-58.5±3.3	180±1.14	±31.6
200	62.4±5.1	-61.8±6.1	180±1.9	±40.5

※註：分離點、停滯點位置參考 圖 3-3-6 之圖例說明

8. 本研究於計算初期（約 10 秒內），即產生渦流分離現象，且於 20 秒後，流場達到準穩定狀態。此結果較 Braza (1985) 與 Franke (1990) 之數值模式須計算至 60 秒～80 秒後，才達準穩定狀態之情形，節省更多之計算時間。

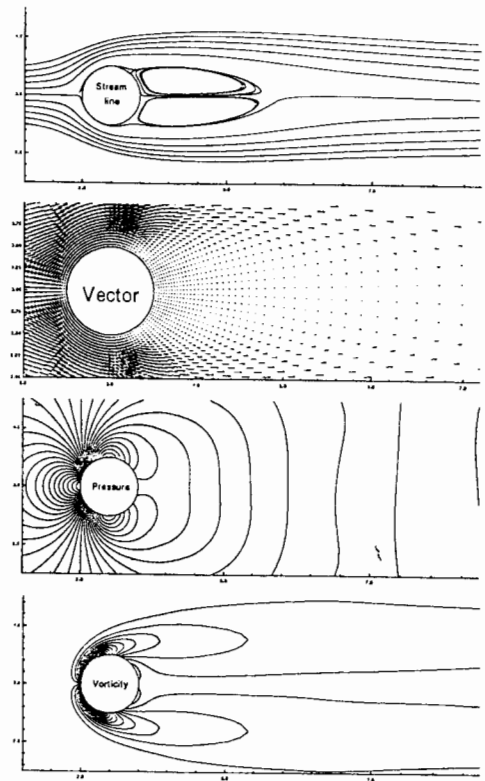


圖 3-3-2 雷諾數 40 之流線、等渦度線圖

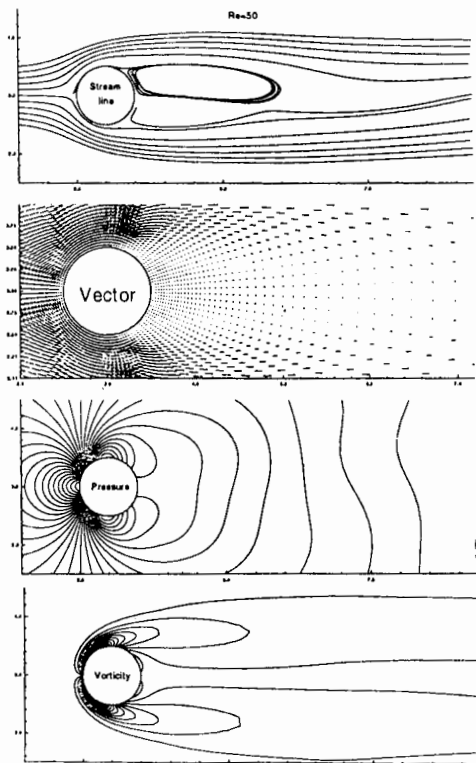


圖 3-3-3 雷諾數 50 之流線、等渦度線圖

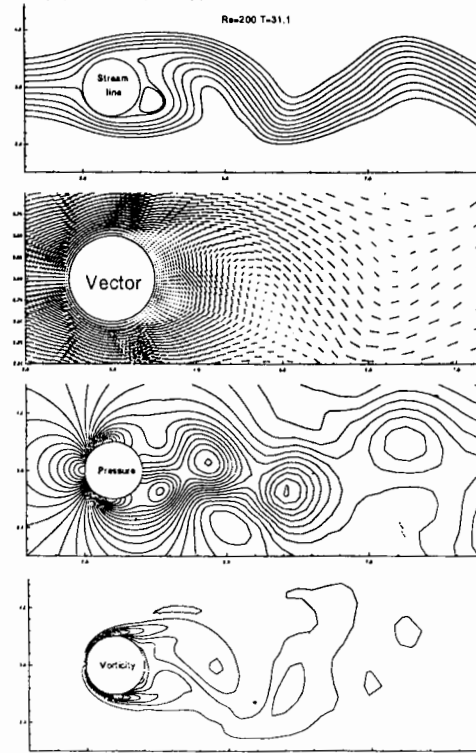


圖 3-3-4 雷諾數 200, $T = 31.1$ 之流線、等壓線、等渦度線及局部速度圖

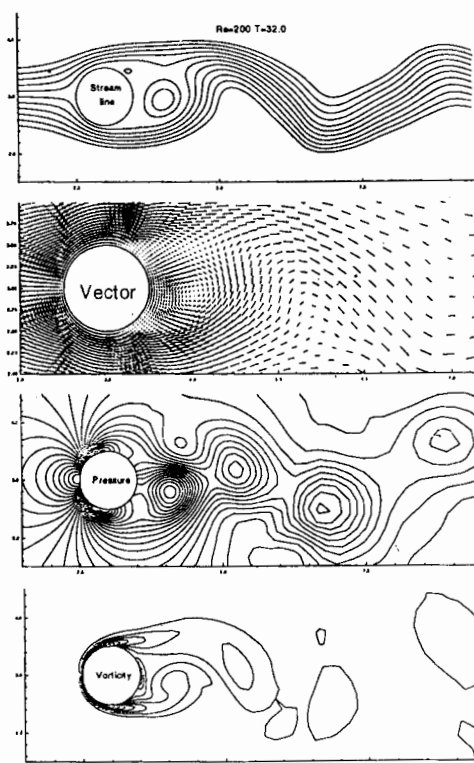


圖 3-3-5 雷諾數 200, $T=32.0$ 之流線、等壓線、等渦度線及局部速度圖

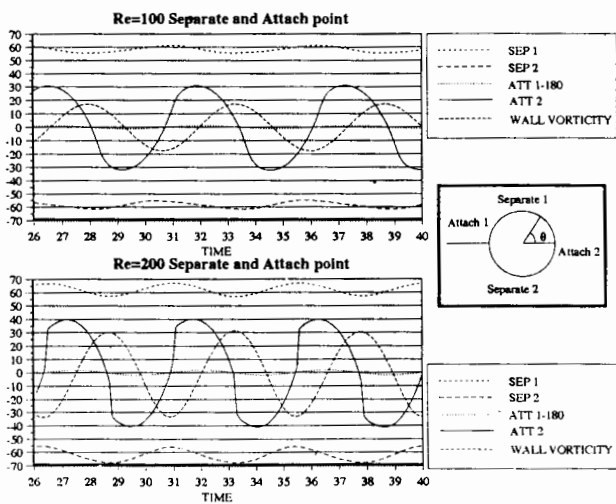


圖 3-3-6 雷諾數 100, 200 滯滯點、分離點、圓柱壁上總渦度值時變圖

四、結論與建議

4-1 結論

1. 本研究建立一給合邊界附合座標轉換、多區間型展開方式、線性內插網格、序列化網格技術及有限差分法求解 Navier-Stokes 方程式之模式架構，在此模式架構下可不受邊界幾何形狀限制，快速正確地模擬不同二維不可壓縮層流之流場。本模式具備高度之延伸性 (Extension Ability) 及擴充彈性，在此模式架構下可發展各種不同之數值方法，供模擬不同之流況使用。
2. 本模式使用線性內插方式產生網格，較使用偏微分方程式具備更快速精確控制網格疏密之能力，有助於提高計算結果之正確性。
3. 使用壓力交錯晶格可直接設定邊界條件而無需使用特別方式處理，具備精確性佳、方便、完全合乎邊界條件等優點。
4. 本研究發展之數值模式適應型極佳，可在不修改程式內容之情況下，直接模擬拉板洩穴、向後突張管路、垂直分歧管路、流體通過各種障礙物等諸多流場，供日後研究各流場現象使用。
5. 由拉板洩穴流場之模擬結果可驗證本模式具備高度之精確性與收斂快速之優點。
6. 由流體通過垂直分歧管路之模擬結果可驗證序列化網格技術可用於處理不同幾何邊界之流場，並打破以往單一區間網格於模擬上所受之限制及多區間型網格於應用上之不便。
7. 由流體通過圓柱之流場模擬結果可知本模式比使用過度一流函數解法之模式，更快速地達到準穩定狀態，節省計算時間。

4-2 建議

1. 網格產生技巧方面

- (1) 可嘗試使用其他之內插方式來產生內部格點，如代數法中之四面法或偏微分方程式。
- (2) 評估將網格產生部分發展為動態網格 (Adaptive Grid) 或三維之可能性。

2. 計算模式方面：

- (1) 動量方程式中對流項可嘗試使用其他差分

方式，如斜向上游差分 (Skew Upwind Differencing)、人工截斷之斜向上游差分 (Skew Upwind Differencing with Artificial Cut off)、體積權重斜向上游差分 (Volume-weighted Skew Upwind Differencing)、角落斜向上游差分 (Corner Skew Upwind Differencing)、及方向性上游傳導差分 (Directional Transportive Upwind Differencing) 等方法，以增進模式以精確度與適用性。

(2) 發展適於自由水面問題之數值模式。

(3) 推展至三維之應用。

3. 使用此模式作為研究工具，模擬不同流場，除探討更多不同流場現象外，並提供模式改良之參考。

參考文獻

1. 楊國威，非結構化網格及邊界複合座標轉換解析二維不可壓縮層流之研究，私立淡江大學水資源及環境工程研究所碩士論文，民國八十二年六月。
2. 曾振遠、劉佳興，“黏滯流通過方形障礙物之流場模擬”，中國農業工程學報第 35 卷第 3 期，78 年 9 月 1 日。
3. 許敏能，黏滯性層流通過不同幾何形狀障礙物尾流區之數值模擬，私立淡江大學水資源及環境工程研究所碩士論文，民國七十九年六月。
4. 曾振遠、王惠茹，“流體通過圓柱其漩渦群形成區之數值分析”，中國農業工程學報第 39 卷第 1 期，82 年 3 月 1 日。
5. 黃榮鑑、蔣德普、趙茂吉，“非壓縮黏滯流通過圓柱的流場研究”，中國工程學刊第 9 卷第 6 期，75 年。
6. Anderson, D. A. et al., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, McGrawHill, U. S. A. (1984).
7. Roger, P., and T. D. Tylor, Computational Method for Fluid Flow, Spring-Verlag, U. K. (1983).
8. Fletcher C. A. J., Computational Techniques for Fluid Dynamics I & II, Spring-Verlag, U. K., 1988.
9. Shih, T. I-p., R. T. Bailey, H. L. Nguyen, and R. J. Roelke, "Algebraic Grid Generation for Complex Geometries", *Int. J. for Numerical Method in Fluids*, Vol.