

由生態環境觀點估計水田入滲之數學理論

Mathematical Theory to Estimate Paddy Field Infiltration from the View of Ecological Environment

國立台灣大學農業工程學系博士後研究

郭 勝 豐
Sheng-Feng Kuo

國立台灣大學農業工程學系教授

劉 振 宇
Chen-Wuing Liu

摘 要

爲因應政府加入 GATT 後之農業政策，水田對地下水補注之生態性功能正爲學者及政府單位熱烈討論中。目前國內對水田入滲量之估算仍止於田間試驗之經驗公式而無較嚴謹的數學理論加以佐證。本文分析 Shan & Stephens 等依據 Philip 方法所提出之一簡單數學理論來了解水田于定水頭下之入滲情形。其推導一系列解析解來模擬水田之入滲率、累積入滲量及土壤水份剖面等狀況，然此解析中所含的四個基本函數需先用疊代法解之。日後希望於本省擇點進行田間試驗來驗證其建立之理論模式，相信能客觀的估計全省水田對地下水之補注量，以提供政府單位由生態環境觀點對水田之定位。

關鍵詞：生態環境，入滲，疊代法，理查方程式。

ABSTRACT

The ecological environment function of paddy field to groundwater recharge is paid attention by researchers and government officials for planning the agricultural policy after Taiwan entering the GATT. Currently, there are little robustic mathematical theory to estimate the paddy field infiltration, but only empirical equation was used from past study. The purpose of this study is to introduce and analyze the mathematical theory that developed by Shan & Stephens to understand the ponded infiltration with constant water head. A series of generalized equations are introduced to estimate the ponded field's infiltration rate and cumulative infiltration. Yet, the four basic functions that included in each equation need be calculated by iterative method. It is expected that the total amounts of groundwater recharge to paddy field infiltration can be estimated based on the mathematical model with the field experiment in future study.

Keywords : Ecological environment, Infiltration, Iterative method, Richard equation.

前言

水稻田具有生產性機能、生態性機能及生活性機能。近年來，為因應我國加入關稅暨貿易總協定(GATT)後，水田之生態性機能被學者及政府單位熱烈討論中。蔡明華等(1994)指出水田之生態性機能包括：(1)涵養地下水源，(2)安定河川流況，(3)調蓄暴雨洪水，(4)減低下游排水尖峰流量，(5)淨化水質，(6)防止土壤沖蝕，(7)調節微氣候，(8)洗鹽及(9)提供水鳥庇護、繁殖、覓食場所。本文即針對水稻田涵養地下水源之功能加以討論。

台灣自民國73年推行轉作計畫後，水稻田之栽培面積急遽減少，因此水田對地下水之補注亦大幅減少。蔡明華(1994)估計台灣地區由民國71年到81年水田對地下水之補注涵養水量如表1所示。由表1看出民國81年之地下水補注涵養總水量減為35.19億 m^3 。此值僅約為民國71年(58.33億 m^3)之60%，又由民國71年到81年累積減少之地下水總涵養水量達134.73億 m^3 。此估計值雖需進一步深入探討，然地下水總涵養水量急遽減少對水質源所造成的衝擊，生態環境的影響，及間接影響到的地盤下陷等問題實不容忽略。

表 1. 台灣地區水田對地下水補注涵養水量
(蔡明華 1993)

民國 (年)	水稻栽培面積		對地下水之補 注涵養水量(億 m^3)	涵養水量以71 年為基準比較 減少量(億 m^3)
	第一期作 (公頃)	第二期作 (公頃)		
71	316,516	343,075	58.33	0
72	324,449	321,406	57.19	1.14
73	285,903	301,283	51.94	6.39
74	277,533	286,854	49.94	8.39
75	268,872	268,851	47.59	10.74
76	255,356	246,725	44.45	13.88
77	240,828	230,632	41.73	16.60
78	243,215	233,337	42.19	16.14
79	242,422	212,995	40.35	17.98
80	227,517	201,421	38.00	20.33
81	209,477	187,776	35.19	23.14
合計				134.73

近年來水田對生態環境所造成影響被相繼討論中(溫理仁 1995, 陳焜耀、沈克毅 1995)。然本省對於水田入滲量之研究較為完整者則應追溯到民國46年到53年由陳尙及李德滋(1964)于全省

433處所做的田間試驗。該試驗于1960年前採用同心圓式雙圓筒法，自1961年起則採用定水頭馬利奧法(Mariott)來施測。依不同土類及母質將全省分成六種土壤，其建議若對於某一地區之土類及母質資料難以取得可將西部沖積土歸為第(I)類，東部沖積土合併為第(II)類及紅棕壤土為第(III)類。針對上述I、II、III類及美國農業部標準，推導出：(1)質地與水分當量，(2)水分當量與水田垂直入滲率之經驗公式如表2所示。

表 2. 全省之質地與水分當量及水分當量與水田垂直入滲率之經驗公式(陳尙、李德滋 1964)

土類	質地與水分當量關係	水分當量與水田垂直入滲率關係
(I) 西部沖積土	$Me = 0.0255S_a + 0.216S_i + 0.603C$	$\log_{10} i = 1.9394 - 0.0478Me$
(II) 東部沖積土	$Me = 0.0195S_a + 0.224S_i + 0.801C$	$\log_{10} i = 2.0752 - 0.0409Me$
(III) 紅棕壤土	$Me = 0.0215S_a + 0.151S_i + 0.592C$	$\log_{10} i = 1.5087 - 0.0411Me$

由表2看出，僅需知道該區域之砂，粘，粉粒百分比便可利用質地與水分當量之經驗式求出水分當量，復利用水分當量與水田垂直入滲之經驗式求出所需要之水田垂直入滲率。水田垂直入滲率求出後便可概略估算水田對地下水涵養補注量。若于短時間內欲估算全省水田對地下水涵養補注量，該經驗公式實不失為簡便方法，然土壤砂、粘、粉粒之百分比則為必備之基本資料。水利局設計規範之經驗公式亦為本省對於水田入滲率估算之另一方法，此經驗公式如下所示：

$$P = \frac{240}{c \cdot I}$$

式中：P 表入滲率(mm/day)

c 表粘粒百分比(%)

I 表係數

此法僅需利用粘粒百分比便可估算出入滲率，其準確性有待商榷，但其可做為設計之參考。

由上面文獻回顧得知，本省目前對水田之入滲僅止於經驗公式之推估，無甚嚴密之數學理論基礎。本文介紹並分析Shan & Stephens(1992)等依據Philip(1958)方法所提出之一簡單數學理論來了解水田于定水頭下之入滲情形。並配合規劃後續于嘉南農田水利會學甲試驗站之田間試驗，以便驗證此一數學模式。並應用到全省，以便從數學

理論觀點量化全省水田對地下水之補注，協助政府單位因應我國加入 GATT 後對水田生態機能之定。

數學理論

圖 1 可表示水田于湛水深 (H) 下之土層垂直剖面狀況，圖中 z_0 為飽和層及非飽和層之界面。Shan & Stephens(1992) 依據 Philip(1958) 之理論推導了一新的方法來解此飽和層及非飽和層共存之複雜現象。並發展了一電腦模擬水田之入滲率、累積入滲量及土壤水份剖面等情形。本文依據 Shan & Stephens 所提之數學理論加以分析。

Richards(1931) 所提出之一維偏分方程可代表水于土層中流動之物理現象。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[k \frac{\partial h}{\partial z} \right] - \frac{\partial k}{\partial z} \quad (1)$$

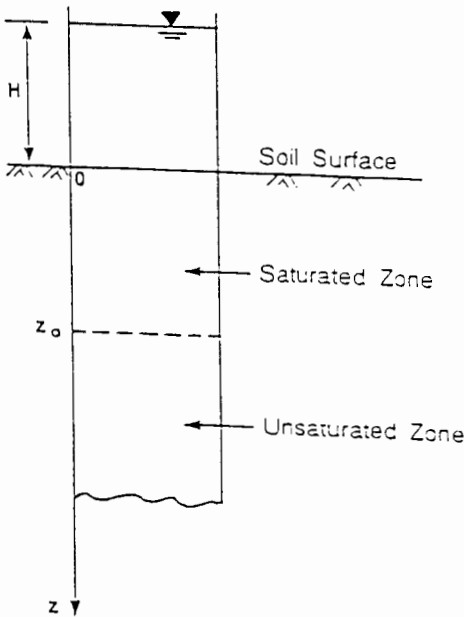


圖 1. 定水頭之水田垂直入滲剖面圖 (Shan & Stephens 1992)

式中： θ 表水分含量 (%)

h 表壓力水投 (cm)

z 表向下之垂直深度 (cm)

k 表導水係數 (cm/day)

t 表時間

圖 1 飽和區內 ($0 \leq z \leq z_0$) 之 k 值為常數，公式(1)

則為線性。而非飽和區 ($z > z_0$) 之 k 值為土壤水分之函數，故公式(1)為非線性。

為簡化分析起見，首先定義擴散係數 (D) 如下：

$$D = k \frac{dh}{d\theta} \quad (2)$$

則公式(1)可轉換為 D 之函數來代表非飽和層之水流如下：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] - \frac{\partial k}{\partial z} \quad (3)$$

定義飽和層上方之邊界條件為：

$$h(0, t) = H$$

其中： H 表定水深之水頭

定義非飽和層上方之邊界條件為：

$$\theta(z_0, t) = \theta_s$$

其中： θ_s 表飽和含水量

飽和層之深度， z_0 ，以下式計算之 (Philip 1958)：

$$z_0 = K_s H / \left\{ \frac{d}{dt} \left[\int_0^{\theta_s} Z d\theta \right] + k_i - K_s \right\} \quad (4)$$

其中： θ_i 表起始土壤含水量

k_i 及 k_s 表起始及飽和之導水係數

Shan & Stephens 利用 van Genuchten(1980) 之理念決定無因次之土壤擴散係數 (D^*) 及導水係數 (k^r)：

$$D^* = \left[\frac{1}{m} - 1 \right] \Theta^{1/2-1/m} \left\{ (1-\Theta^{1/m})^{-m} + (1-\Theta^{1/m})^m - 2 \right\} \quad (5)$$

$$K^r = \sqrt{\Theta} [1 - (1 - \Theta^{1/m})^m]^2 \quad (6)$$

而 D^* ， k^r 及 Θ 被定義為：

$$D^* = \frac{\alpha_v \Delta \theta}{k_s} D \quad (7)$$

$$k^r = k/k_s \quad (8)$$

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\Delta \theta} \quad (9)$$

其中： α_v 及 m 是 van Genuchten 方法之參數

$$\Delta \theta = \theta_s - \theta_r$$

Philip 於 1958 年推導出土壤水分剖面 (z) 及累積入滲量公式如下：

$$z = \phi t^{1/2} + X t + \Psi t^{3/2} + \omega t^2 + \dots \quad (10)$$

$$I = t^{1/2} \int_{\phi} + t(k_i + \int_x) + t^{3/2} \int_{\Psi} + t^2 \int_{\omega} \quad (11)$$

為了無因次化公式(10)及(11)，乃定義下列無因次變數及參數：

$$z_D = \alpha_v Z \quad (12)$$

$$t_d = \frac{k_s \alpha_v t}{\Delta \theta} \quad (13)$$

$$\Phi = \sqrt{\frac{\alpha_v \Delta \theta}{k_s}} \varphi \quad (14)$$

$$X = \frac{\Delta \theta}{k_s} X \quad (15)$$

$$\Psi = \frac{\Delta \theta}{k_s} \sqrt{\frac{\Delta \theta}{k_s \alpha_v}} \Psi \quad (16)$$

$$\Omega = \frac{(\Delta \theta)^2}{k_s^2 \alpha_v} \omega \quad (17)$$

將公式(14)到(17)之無因次參數及變數代入(10)及(11)式可得無因次之土壤水分剖面及累積入滲量如下：

$$Z_D = \Phi t_D^{1/2} + X t_D + \Psi t_D^{3/2} + \Omega t_D^2 + \dots \quad (18)$$

$$I_D = t_D^{1/2} \int_0^1 \Phi + t_D (K_f + \int_x) + t_D^{3/2} \int_0^1 \Psi + t_D^2 \int_0^1 \Omega + \dots \quad (19)$$

公式(19)對 t 微分可得到無因次之入滲率(i_D)如下：

$$i_D = \frac{1}{2} t_D^{-1/2} \int_0^1 \Phi + (K_f + \int_x) + \frac{3}{2} t_D^{1/2} + 2 t_D \int_0^1 \Omega \quad (20)$$

其中 I_D and i_D 定義為：

$$I_D = \frac{\alpha_v}{\Delta \theta} I \quad ; \quad i_D = \frac{i}{k_s} \quad (21)$$

而(19)及(20)式中之四個無因次積分項被定義為：

$$\int_F = \int_0^1 F d\theta \quad (F = \Phi, X, \Psi, \Omega)$$

公式(18)，(19)及(20)中之四個基本函數， Φ ， Z ， Ψ ， Ω ，須先求得方可進一步計算無因次之土壤水分剖面(Z_D)，累積入滲(I_D)及入滲率(i_D)。Philip (1957) 及 Kirkham & Powers (1972) 建議之數值計算步驟過於複雜，因此 Shan & Stephens (1992) 發展了一簡單步驟來推導此四個基本函數值並利用疊代法求之後代入公式(18)，(19)及(20)等一般解便可估算土壤水分剖面、累積入滲及入滲率。經過了一系列的推導，四個基本函數值可表示如下：

Φ函數

$$\Phi_2 = \sqrt{\Phi_1^2 - 4(D_1^* + D_2^*)} \quad (22)$$

$$\Phi_{k+1} = \sqrt{(\Phi_1 + 2\Phi_2 + \dots + 2\Phi_{k+1} + 2\Phi_k)^2 - 4(D_1^* + D_{k+1}^*)} \\ - (\Phi_1 + 2\Phi_2 + \dots + 2\Phi_{k-1} + \Phi_k) \quad (2 \leq k \leq 2) \quad (23)$$

疊代法 (Iterative Method) 求解公式(22)，及(23)如下：

(1) 假設 Φ_1 求得 Φ_2 ， Φ_3 ，……， Φ_{1+1}

(2) 利用下列邊界條件來計算 H^*

$$H^* = \frac{\Phi_{1+1} \int_0^1}{2}$$

H^* 定義為 $H^* = H^* \alpha_v$

(3) 調整 Φ_1 繼續疊代直到 H^* 之誤差於容忍度範圍之

內

X函數

$$X_2 = \frac{(A_1 + 1)X_1 + B_1}{A_1 - 1} \quad (24)$$

$$X_{k+1} = \frac{a_1 c_1 + b_1 + d_1}{C_1 - 0.5} ; (2 \leq k \leq 1) \quad (25)$$

$$A_1 = 2 \left[\frac{D_1^*}{G_1^2(1)} + \frac{D_2^*}{G_1^2(2)} \right] / (\Delta \theta)^2$$

$$B_1 = -4 \left[\frac{K_f + K_{\frac{1}{2}}}{2} - K_f \right] / \Delta \theta$$

$$G_1(k) = \frac{\Phi_{k+1} - \Phi_{k-1}}{2\Delta \theta} ; (2 \leq k \leq 1)$$

$$a_1 = X_k$$

$$b_1 = X_1 + 2X_2 + \dots + 2X_{k-1} + \frac{3}{2}X_k$$

$$c_1 = \left[\frac{D_k^*}{G_1^2(k)} + \frac{D_{k+1}^*}{G_1^2(k+1)} \right] / (\Delta \theta)^2$$

$$d_1 = -(K_k + K_{k+1} - 2K_f) / \Delta \theta$$

疊代法公式(24)，(25)求X函數之步驟與 Φ 函數相同，然計算 H^* 之公式應為：

$$H^* = X_{1+1} (\int_0^1)^2 / (4\Delta K_f)$$

Ψ函數

$$\Psi_2 = \frac{(A_2 + 1)\Psi_1 + B_2}{A_2 - 1} \quad (26)$$

$$\Psi_{k+1} = \frac{a_2 c_2 + b_2 + d_2}{C_2 - 0.5} ; (2 \leq k \leq 1) \quad (27)$$

其中：

$$A_2 = \frac{4}{3} \left[\frac{D_1^*}{G_1^2(1)} + \frac{D_2^*}{G_1^2(2)} \right] / (\Delta \theta)^2$$

$$B_2 = \frac{4}{3} \left[\frac{G_1^2(1)D_1^*}{G_1(1)} + \frac{G_1^2(2)D_2^*}{G_1(2)} \right] / \Delta \theta$$

$$a_2 = \Psi_k$$

$$b_2 = \Psi_1 + 2\Psi_2 + \dots + 2\Psi_{k-1} + \frac{3}{2}\Psi_k$$

$$c_2 = \frac{2}{3} \left[\frac{D_k^*}{G_1^2(k)} + \frac{D_{k+1}^*}{G_1^2(k+1)} \right] / (\Delta \theta)^2$$

$$d_2 = \frac{2}{3} \left[\frac{G_1^2(k)D_k^*}{G_1(k)} + \frac{G_1^2(k+1)D_{k+1}^*}{G_1(k+1)} \right] / \Delta \theta$$

疊代法解公式(26)，(27)求 Ψ 函數之步驟同上述，而求解 H^* 之公式應為：

$$H^* = \frac{1}{2} \Psi_{1+1} (\int_0^1)^3 / \left[4(\Delta k')^2 - 3 \int_0^1 \int_0^1 \right]$$

Ω函數

$$\Omega_2 = \frac{(A_3 + 1)\Omega_1 + B_3}{A_3 - 1} \quad (28)$$

$$\Omega_{k+1} = \frac{a_3 C_3 + b_3 + d_3}{C_3 - 0.5}; (2 \leq k \leq 1) \quad (29)$$

$$A_3 = \frac{4}{3} \left[\frac{D_1^*}{G_1^2(1)} + \frac{D_2^*}{G_1^2(2)} \right] (\Delta \Theta)^2$$

$$a_3 = \Omega_k$$

$$b_3 = \Omega_1 + 2\Psi_2 + \dots + 2\Omega_{k-1} + \frac{3}{2}\Omega_k$$

$$c_3 = \frac{1}{2} \left[\frac{D_k^*}{G_1^2(k)} + \frac{D_{k+1}^*}{G_1^2(k+1)} \right] (\Delta \Theta)^2$$

$$d_3 = \frac{1}{2\Delta\Theta} \left\{ \frac{G_2^2(k)D_k^*}{G_1(k)} [2G_3(k) - G_2(k)] \right. \\ \left. + \frac{G_2^2(k+1)D_{k+1}^*}{G_1(k+1)} [2G_3(k+1) - G_2(k+1)] \right\}$$

疊代法公式(28)、(29)求 Ω 函數之步驟同上述而求解 H^* 之公式應為：

$$H^* = \frac{1}{8} \Omega_{i+1} \left(\int_0^1 \right)^4 / [2(\Delta K')^3 - 3\Delta K' \int_0^1 \int_0^1 - (\int_0^1)^2 \int_0^1]$$

如此利用此四個基本函數 Φ 、 X 、 Ψ 、 Ω ，代入解析解中即可求得入滲率(i_D)、累積入滲量(I_D)及土壤水分剖面(Z_D)，隨著時間、土壤特性及定水頭水深變化而改變情形。

結果與討論

θ_i 、 H^* 及 m 是此數學模式應輸入之三個無因次參數，其中 θ_i 表起始土壤水分， H^* 表定水頭水深， m 是 van Genuchten 方法中之參數。為了解起始土壤水分(θ_i)及定水頭水深(H^*)對入滲率(i_D)及累積入滲(I_D)之影響，此數學模式被執行數次，參數變化如下(m 固定為0.5)：

執行 次數	參數	
	θ_i	H^*
1	0.1	0.5
2	0.3	0.5
3	0.5	0.5
4	0.3	0.2
5	0.3	0.5
6	0.3	0.8

圖2表示起始土壤水分對入滲率及累積入滲之影響，而圖3表示定水頭水深對入滲率及累積入滲之影響。圖2及圖3均顯示入滲率隨著時間之延長而遞減，而累積入滲相對的增加。圖中亦顯示入滲率曲線最後幾近水平，此即為基本入滲率，而累積入滲曲線最後成直線狀態，此表示入

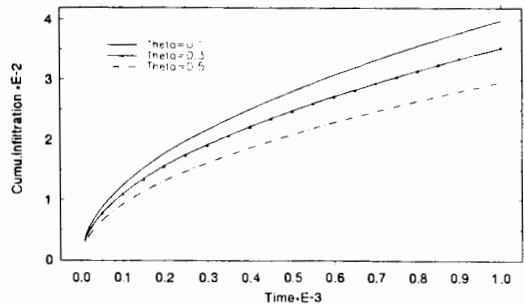
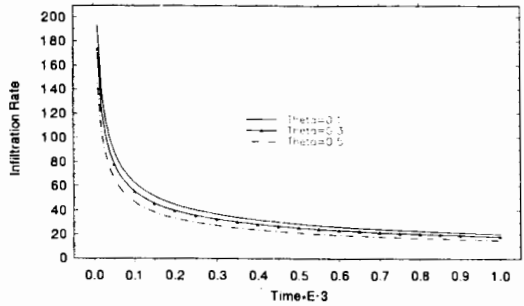


圖 2. 起始土壤水分(θ_i)對入滲率(i_D)及累積入滲(I_D)之影響)

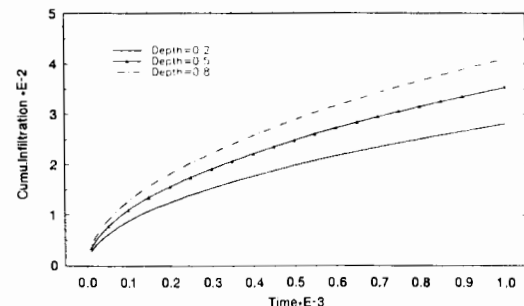
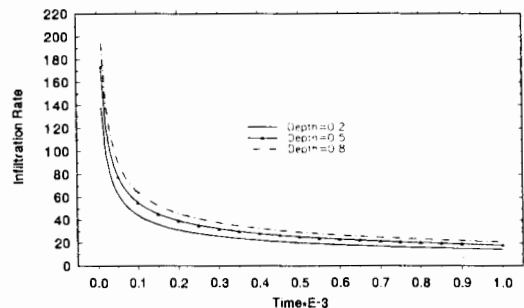


圖 3. 定水頭深度(H^*)對入滲率(i_D)及累積入滲(I_D)之影響)

滲率已固定而累積入滲則穩定的增加。圖2顯示起始土壤水分愈低($\theta_i=0.1$)，最後之入滲率及累積入滲率愈高。圖3顯示定水頭水深愈高($H^*=0.8$)，最後之入滲率及累積入滲愈高。圖2及圖3均以無因次表示，將此結果代入公式(10)並配合土壤特性資料即可將其因次化而求得實際之入滲率(cm/day)及累積入滲(cm)。

結 論

爲因應我國加入 GATT 後對農業所造成的衝擊，農政單位正積極的研擬未來之農業對策。而水稻田對生態環境所產生之公益機能更被學者及農政單位熱烈的討論，以便訂定水田未來之耕種面積。水田對地下水補注爲其重要生態性功能之一，故水田之入滲情形必須了解方能定量全省水田對地下水之補注量。

目前國內對水田入滲之估計仍侷限於田間試驗之經驗公式或較不客觀的觀點來推估。因此，本文依據 Shan & Stephens(1992)等提出之方法來討論此飽和及非飽和層共存之複雜物理現象，期能由較嚴謹之數學理論觀點定量並了解水田之滲之情形。Shan & Stephens(1992)根據 Philips 的理論，發展了簡化之解析解，用以了解定水頭水田之入滲情形。此解析解須先利用疊代法求出包含其中的四個基本函數值， Φ ， X ， Ψ ， Ω 。將求出之四個基本函數值代入解析解中便可求得其入滲率(i_D)、累積入滲量(I_D)及土壤水分剖面(Z_D)，隨著時間、土壤特性及定水頭水深之變化而變化的情形。

本文目前僅止於數學理論之探討，尚未實際應用到田間。作者等正研擬於農工中心及嘉南水利會之學甲試驗站進行田間試驗來驗證此數學模式。若效果良好將應用於全省各地，進而估算全省水田對地下水補注之涵養量，協助政府單位由生態環境觀點來決定我國加入 GATT 後之水田耕種面積。

參考文獻

1. 蔡明華，1993，“水田灌溉之公益效能剖析研究”，農委會，62PP。
2. 蔡明華、林永德，1994，“因應加入 GATT 之農業對策研究—水稻田生態環境保護對策”，水資源經營研討會，台北市，P123-137。
3. 陳尙、李德滋，1964，“以土壤水分當量推算水稻灌溉需水量之研究”，農工學報第 10 卷第 4 期，P15-40。
4. 溫理仁，1995，“水田、地下水與地盤下陷”，台灣水利第 43 卷第 2 期，P1-23。
5. 陳焜耀、沈克毅，1995，“田間滲漏對環境污染影響之研究”，1995 年中日農業水利研討會，台北市，P56-76。
6. Kirkham, D., and W. L. Powers. (1972). Advanced soil physics, Wiley-Interscience, New York.
7. Philip, J. R. (1957). "The theory of infiltration: 1. The infiltration equation and its solution." Soil Science, 83:345-357.
8. Philip, J. R. (1958). "The theory of infiltration: 6 Effect of water depth over soil." Soil Science, 85:278-286.
9. Richards, L. A. (1931). "Capillary conduction of liquids through porous mediums." Physis, 1:318-333.
10. Shan, C. and D. B. Stephens. (1992). "A generalized solution to ponded infiltration." Lawrence Berkeley National Lab., Berkeley, CA.
11. van Genuchten, M. Th. (1980). "A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils." Soil. Sci. Soc. Am. J., 44:892-89

收稿日期：民國 84 年 8 月 25 日

修正日期：民國 84 年 9 月 20 日

接受日期：民國 84 年 10 月 11 日